

解説

ウェーブレット解析によるデータ処理

榊原 進 (いわき明星大学, 理工学部)

1 はじめに

自然現象や工業機器で生じるさまざまな量の時間的または空間的変動は、時刻 t または空間座標 x (2次元では (x, y) , 3次元では (x, y, z)) の関数 f として表される。多くの現象には始めと終わりがあり、したがってこの関数は、その値がある有限の区間の外では 0 である、言い換えればコンパクトなサポートをもつ。さらに、区間内でもその値が無限に大きくなることはない。このような関数を一般に信号と呼ぶが、数学的には 2 乗可積分関数である。

関数 f の変数を x とし、仮に時間と呼ぶことにする (実際は空間座標であることもある)。フーリエ変換によって、2 乗可積分関数 f はまた周波数領域でも表現される。これに対して元の $f(x)$ を時間領域における表現という。周波数領域における表現は信号の周期性を探るのに適しており、周期的な信号はさまざまな応用において非常によく現れるから、フーリエ解析は信号解析の最も一般的な手法となっている。

しかし信号はすべて周期的であるとは限らない。実際の信号は周期的な信号やカオス的な信号が部分的に入り交じっている。また、おおむね周期的であっても、信号には始めと終わりがある。その前後では 0 であることが多い。人の話し声はその代表で、子音の冒頭はカオス的で、それに続く音あるいは母音は周期的であり、一定の時間で終了する。すべて周波数領域でとらえるフーリエ変換は、こうした複雑な信号の表現には適さない。

このような例からわかるように、信号は周期的な部分を時間的な推移のなかでとらえるのが適切である。信号を時間領域と周波数領域の両面か

ら同時に表現する方法を時間周波数解析という。ウェーブレットはフーリエ変換に代わる信号処理および信号解析の手法で、時間周波数解析を最も自然な形で実現する [1-7]。本稿では、このウェーブレットの基礎を詳しく紹介し、ひとつの応用例を示す。

2 信号の基本単位

2 乗可積分関数の空間を $L^2(\mathbf{R})$ と書く。信号は一般にその値が 0 の周りを行ったり来たりする $L^2(\mathbf{R})$ 関数で、部分的には周期的であることが多い。したがって、信号は時間軸と周波数軸が張る平面 (信号平面) 上に一定の領域を占める (図 2 参照)。言い換えれば、信号はこの平面上の小さな領域を連ねたものとして表現することができる。このとき信号の占める領域には最小の単位がある。

信号 $f(x)$ の時間幅 Δ_f を次のように定義する。

$$\Delta_f = \frac{1}{\|f\|} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \tilde{x})^2 |f(x)|^2 dx} \quad (1)$$

ここで $\tilde{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx / \|f\|^2$, および $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ である。同様にフーリエ変換 $\hat{f}(\omega)$ の周波数幅 $\Delta_{\hat{f}}$ も、この式で f を \hat{f} に、 x を ω に置き換えて得られる。これらの量は、不確定性と呼ばれる次の不等式を満たす。

$$\Delta_f \Delta_{\hat{f}} \geq \frac{1}{2} \quad (2)$$

Δ_f は幅といっても $f(x)$ のほぼ中心 \tilde{x} の片側の幅であるから、信号 $f(x)$ の時間的広がり Δ_f は $2\Delta_f$ となる。同様に、周波数的広がり $\Delta_{\hat{f}}$ であるから、 $2\Delta_f 2\Delta_{\hat{f}} \geq 2$ が成り立つ。言い換え

れば、任意の信号は信号平面上の面積 2 以下の領域にはなり得ない。

3 ウェーブレット変換

実数 \mathbf{R} 上の関数 f のフーリエ変換 \hat{f} は \mathbf{R} 上の関数

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \quad (3)$$

であるが、これは $e^{i\omega x}$ を積分核とした積分変換である。逆変換は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (4)$$

で与えられる。

ウェーブレット変換 $(W_{\psi}f)(b, a)$ も同様に、マザー関数と呼ばれる関数 ψ をトランスレート (平行移動) し、スケール (拡大・縮小) した $\psi((x-b)/a)$ の複素共役を積分核とする積分変換である。

$$(W_{\psi}f)(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} f(x) dx \quad (5)$$

ただし、これはトランスレーションとスケールのパラメータ $(b, a) \in \mathbf{R}^2$, $a \neq 0$, の 2 変数関数である。逆変換は

$$f(x) = \frac{1}{C_{\psi}} \int \int_{\mathbf{R}^2} (W_{\psi}f)(b, a) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{dad b}{a^2} \quad (6)$$

で与えられる。ここで、右辺が定義できるためには次のアドミッシブル条件が満たされなければならない。

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (7)$$

一般的なアドミッシブル条件 (7) の代わりに、ふつう次の条件式が使われる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (8)$$

この式は $\psi(x)$ が振動的であることを意味する (図 1, 3, 4 参照)。ウェーブレット変換 (5) の積分核において ψ のトランスレートが意味を持つためには、 ψ が局在化されていることが望ましい。振動的で波 (wave) のようであること、また局在化されていて小さい (let) ことから ψ はウェーブレット (wavelet) と呼ばれる。

応用にはよく離散化されたフーリエ変換が使われる。周波数 $\omega \in \mathbf{R}$ を整数値 $n \in \mathbf{Z}$ に限定して離散化される。逆変換は (4) の代わりに

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inx} \quad (9)$$

で与えられ、これは区間 $[0, 2\pi)$ で定義された関数 ($L^2[0, 2\pi)$ 関数) を周期関数として拡張した関数を表す。フーリエ変換は (3) の代わりに

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx \quad (10)$$

で与えられる。逆変換 (9) は $f \in L^2[0, 2\pi)$ のフーリエ級数とも呼ばれるが、これは f の e^{inx} による展開である。ここで重要なことは、関数 $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ が $L^2[0, 2\pi)$ の直交基底を成すことで、そのため c_n は基底関数 e^{inx} と関数 f の内積 (10) によって与えられるのである。

ウェーブレットも同様に離散化される。ふつうパラメータ $(b, a) \in \mathbf{R}^2$ が、 $(b, a) = (2^{-j}k, 2^{-j})$, $(j, k) \in \mathbf{Z}^2$, のように離散化される。ウェーブレット変換 $(W_{\psi}f)(2^{-j}k, 2^{-j})$ は $d_k^{(j)}$ と書かれ、変換と逆変換を与える式はそれぞれ以下のようになる。

$$f(x) = \sum_j \sum_k d_k^{(j)} \psi(2^j x - k) \quad (11)$$

$$d_k^{(j)} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(2^j x - k)} f(x) dx$$

これ以降は実関数を扱うこととし、複素共役 $\bar{\psi}$ は単に ψ と書く。この式は $f \in L^2(\mathbf{R})$ の $\psi(2^j x - k)$ による展開式と見ることができる。しかし、マザー関数 ψ がアドミッシブル条件を満たすというだけでは $\{\psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ が $L^2(\mathbf{R})$ の直交基底となることは保証されない。

アドミッシブル条件 (7) を満たす関数は明らかに無限個存在するから、いろいろなウェーブ

レットを考えることができる。しかし、直交基底を作るウェーブレットはたくさんは知られていない。直交規定を成す ψ を作る一般的な処方がないからである。一般に知られている直交ウェーブレットは多重解像度解析という性質を利用して構成される。次の節では、最も簡単なマザー関数である Haar の基底を使って多重解像度解析を説明する。

4 多重解像度解析

Haar のスケーリング関数は次のように定義される (図 1 参照)。

$$\phi_H(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \quad (12)$$

関数 $f \in L^2(\mathbf{R})$ を次のような階段関数 f_j , $j \in \mathbf{Z}$, で近似することができる。

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^{(j)} \phi_H(2^j x - k) \quad (13)$$

ここで係数 $c_k^{(j)}$ を

$$c_k^{(j)} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi_H(2^j x - k) f(x) dx \quad (14)$$

とすれば、 f_j は解像度 2^j , またはレベル j における f の近似となる。

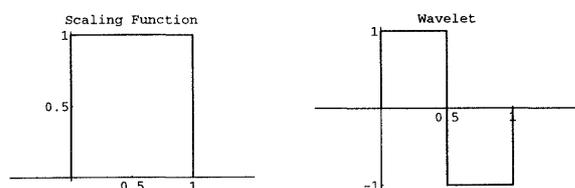


図 1. Haar の関数

レベル j において $\{\phi_H(2^j x - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$, の張る空間を V_j とする。定義 (12) から明らかに、異なる k をもつ $\phi_H(2^j x - k)$ は直交する。つまり $\{\phi_H(2^j x - k)\}$ は V_j の直交基底を成し、上の (13) は $f_j \in V_j$ の直交基底による展開である。

レベル j の関数 $f_j(x)$ が与えられたとき、これから 1 つ下のレベル $j-1$ の関数 $f_{j-1}(x)$ を求めるのは簡単である。 $f_j(x)$ の階段を 2 段ず

つ組にして平均値をとれば、段数が半分になった $f_{j-1}(x)$ が得られる。

$$c_k^{(j-1)} = \frac{1}{2}(c_{2k}^{(j)} + c_{2k+1}^{(j)}) \quad (15)$$

解像度が半分になって失われた部分を $g_{j-1} = f_j - f_{j-1}$ とし、

$$f_j(x) = f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x) \quad (16)$$

と書いておく。いま、

$$d_k^{(j-1)} = \frac{1}{2}(c_{2k}^{(j)} - c_{2k+1}^{(j)}) \quad (17)$$

と置き、Haar のウェーブレットを次のように定義する (図 1 参照)。

$$\psi_H(x) = \phi_H(2x) - \phi_H(2x - 1) \quad (18)$$

すると、 $g_j(x)$ は次のように表される。

$$g_j(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k^{(j)} \psi_H(2^j x - k) \quad (19)$$

$\{\psi_H(2^j x - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$, の張る空間を W_j とする。定義 (12), (18) から明らかに、異なる k をもつ $\psi_H(2^j x - k)$ は互いに直交する。つまり $\{\psi_H(2^j x - k)\}$ は W_j の直交基底を成す。

式 (16) は

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \quad (20)$$

であることを意味する。これを $V_{j-1} \subset V_j$ と見て、この関係を再帰的に構成すれば

$$\dots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \quad (21)$$

を得る。この階層構造をスケーリング関数 ϕ_H によって生成される多重解像度解析という。

また (20) を右辺に再帰的に代入し、 $j \rightarrow \infty$ のとき $f_j(x) \rightarrow f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ であることに注意すれば、

$$L^2(\mathbf{R}) = \dots \oplus W_{j-1} \oplus W_j \oplus W_{j+1} \oplus \dots \quad (22)$$

となる。これは (11) が f の直交基底による展開であることを意味する。

$\psi(x)$ の時間幅を Δ_ψ とし, $\hat{\psi}(x)$ の周波数幅を $\Delta_{\hat{\psi}}$ とする. $\psi(2^j x)$ の幅は $2^{-j}\Delta_\psi$ で, $\hat{\psi}$ の周波数幅は $2^j\Delta_{\hat{\psi}}$ となる. したがって, ψ が信号平面上に占める面積はレベル j によらず一定である. $2\Delta_\psi 2\Delta_{\hat{\psi}} \simeq 2$ となるような ψ をうまく選べば, 展開式 (11) は信号 f を最も最小の単位で表現したものとなる (図 2 参照). こうしてウェーブレット展開は自然な形で時間周波数解析を実現するのである.

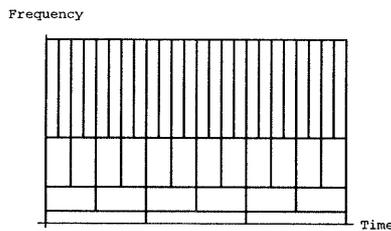


図 2. 信号平面上のウェーブレットの表現

5 トゥー・スケール関係

一般に, トゥー・スケール関係といわれる関係式

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} p_k \phi(2x - k) \quad (23)$$

を満たす関数 ϕ をスケーリング関数という. 数列 $\{p_k\}$ が有限であれば ϕ のサポートはコンパクトである. この関係式 (23) は $V_0 \subset V_1$ を表す. スケーリング関数によってウェーブレット ψ は

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} q_k \phi(2x - k) \quad (24)$$

と定義される ((18) は一例). これは $W_0 \subset V_1$ を表す. V_0 と W_0 が互いに直交であれば $V_1 = V_0 \oplus W_0$ となる. 上の式で x を $2^j x$ に置き換えれば一般の場合 (20) となる. こうして, スケーリング関数 ϕ による多重解像度解析 (21) が生成される. 異なる k をもつ $\phi(x - k)$ が互いに直交すれば, $\{\phi(2^j x - k)\}$ は V_j の直交基底, $\{\psi(2^j x - k)\}$ は W_j の直交基底を成し, (11) は f の直交基底による展開となる.

多重解像度解析を基礎とするウェーブレット構成法では, まず (23) を満たすスケーリング関数を見出し, これからウェーブレットを作る. 最

も簡単なものは Haar のスケーリング関数 (12) で, これは次のトゥー・スケール関係を満たす.

$$\phi_H(x) = \phi_H(2x) + \phi_H(2x - 1)$$

しかしこれは不連続な関数で扱い難く, 連続な関数でウェーブレットを構成することが望ましい. 実際, 1988 年に Daubechies によって連続な直交ウェーブレットが作られてから, ウェーブレットは急速な発展を見る [8].

6 直交ウェーブレット

Daubechies の直交ウェーブレットの構成法では, まず (23), (24) における数列 $\{p_k\}$ と $\{q_k\}$ を決定する. $L^2(\mathbf{R})$ における関数 f と g の内積を

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx$$

とする. これが 0 であれば f と g は互いに直交である. ϕ と ψ に以下の正規直交条件を課す.

$$\begin{aligned} \langle \phi(\cdot) | \psi(\cdot - m) \rangle &= 0, \quad m \in \mathbf{Z}, \\ \langle \phi(\cdot) | \phi(\cdot - m) \rangle &= \delta_{m,0} \end{aligned} \quad (25)$$

これらに (23), (24) を代入することにより, 直交条件を $\{p_k\}$ と $\{q_k\}$ について書き換えることができる.

$$\sum_k p_k q_{k+2m} = 0, \quad m \in \mathbf{Z}, \quad (26)$$

$$\sum_k p_k p_{k+2m} = 0, \quad m \neq 0 \quad (27)$$

また (23), (24) を積分することにより

$$\sum_k p_k = 2, \quad \sum_k q_k = 0 \quad (28)$$

を得る. ふつう (26) の 1 つの解

$$q_k = (-1)^k p_{1-k} \quad (29)$$

が使われる.

Daubechies はさらに初めの $N - 1$ 次までのモーメントが 0 になるという条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^l \psi(x) dx = 0, \quad l = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (30)$$

を課せば, $2N$ 個の 0 でない p_k が決まることを示した. この条件は q_k について

$$\sum_k k^l q_k = 0, \quad l = 0, 1, \dots, N-1, \quad (31)$$

となる.

$N = 1$ の場合の解は $p_0 = p_1 = 1$ で, これは Haar の関数を与える. $N = 2$ の場合の解は

$$\left. \begin{matrix} p_0 \\ p_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}, \quad \left. \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right\} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}, \quad (32)$$

である. $N = 3$ の場合もここに示した方法で $\{p_k\}$ を求めることができるが, 大きい N については解くべき代数方程式の次数が増え, 厳密解は得られない. 一般には $\{p_k\}$ はトゥー・スケール関係のフーリエ変換を使う別の方法で求められるが, 詳しくは文献 [1,2,7] を参照されたい.

直交規格化の条件 (25) は $\|\phi\|^2 = 1$ を意味するが, これから $\int \phi(x) dx = 1$ であることが導かれる. さらにこれは $\sum_n \phi(n) = 1$ と同等であることを示すことができる. 一方, (23) において $x = n \in \mathbf{Z}$ と置くと, $\phi(n), n \in \mathbf{Z}$, についての固有方程式となる. これらを解けば整数点における $\phi(n)$ の値が決まる. (23), (24) において $x = n/2$ と置けば, 右辺は整数点の ϕ の値だけで決まるから, $\phi(n/2), \psi(n/2)$ が決まる. これを繰り返せば $\phi(2^{-j}x), \psi(2^{-j}x)$ の値が求められる. 連続性の証明は別に与える必要があるが, とりあえずこうしてスケール関数とウェーブレットが求められる.

図 3 に Daubechies の関数の例を示す. 上が $N = 2$, 下が $N = 5$ の場合であるが, N が大きいほど滑らかになり, サポートは大きくなる. $\text{supp } \phi = [0, 2N - 1]$ および $\text{supp } \psi = [1 - N, N]$ である. また $\phi \in C^{\mu(N)}$ で, 大きい N については $\mu(N) \approx 0.2075N$ となることが示される.

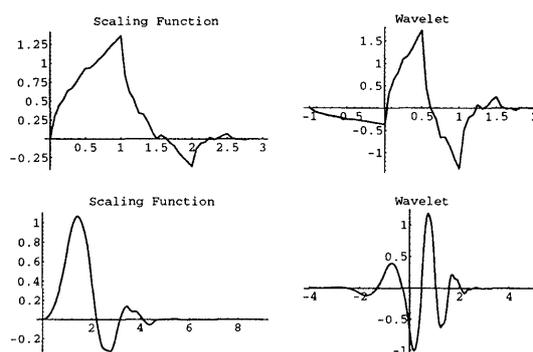


図 3. Daubechies の関数

7 分解・再構成アルゴリズム

関数 $f_j \in V_j$ が (13) のように与えられたとき, これを (16) のように分解することができる. それには $c_k^{(j)}$ から $c_k^{(j-1)}$ と $d_k^{(j-1)}$ を求めればよい.

$V_1 = V_0 \oplus W_0$ であるから

$$\begin{aligned} & 2\phi(2x - l) \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} [g_{2k-l}\phi(x - k) + h_{2k-l}\psi(x - k)], \end{aligned}$$

$l \in \mathbf{Z}$, と書ける. $\{g_k\}, \{h_k\}$ は $\{p_k\}$ から求められる数列で, 0 でない要素の個数はそれぞれ $2N$ である. この関係式を上式 (13) に適用し, その結果を $f_{j-1} + g_{j-1}$ と見ることによって

$$\begin{aligned} c_k^{(j-1)} &= \frac{1}{2} \sum_l g_{2k-l} c_l^{(j)}, \\ d_k^{(j-1)} &= \frac{1}{2} \sum_l h_{2k-l} c_l^{(j)} \end{aligned} \quad (33)$$

を得る ((15), (17) は一例). これは分解アルゴリズムであるが, 数列の離散的な畳み込みで, 一方の要素の個数はわずか $2N$ 個であるから, 高速で実行できる.

また, (16) の右辺から左辺を再構成するアルゴリズムも求められる. それには右辺を (13), (19) のように書いておき, これに (23), (24) を代入する. こうして

$$c_k^{(j)} = \sum_l [p_{k-2l} c_l^{(j-1)} + q_{k-2l} d_l^{(j-1)}] \quad (34)$$

を得る. これも離散的な畳み込みで, 高速に実行できるアルゴリズムである.

8 スプライン・ウェーブレット

m 階のカーディナル B スプライン N_m は、 $m = 1$ のとき $N_1 = \phi_H$ として

$$N_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{m-1}(x-y) N_1(y) dy, \quad (35)$$

$m \in \mathbf{Z}$, によって定義される。これはサポート $[0, m]$ を持ち、 $m-1$ 次の多項式を m 個、整数点で滑らかにつないだもので $N_m \in C^{m-2}$ である。 N_m は 0 でない p_k を

$$p_k = \frac{1}{2^{m-1}} \binom{m}{k}, \quad 0 \leq k \leq m$$

としてトゥー・スケール関係 (23) を満たし、したがってこれをスケール関数と見なすことができる。しかし異なる整数 k をもつ $N_m(x-k)$ は互いに直交しない。Chui と Wang は N_m に直交するウェーブレット ψ_m を構成した [9]。数列 $\{q_k\}$ の 0 でない要素は $q_k, 0 \leq k \leq 3m-2$ で、

$$q_k = \frac{(-1)^k}{2^{m-1}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(k+1-l)$$

のようになり、 ψ_m は (24) から得られる。 N_m と ψ_m は直交関係 (25) を満たさないために、内積によって f の ψ_m による展開係数を求めることができない。このため一般には扱いにくいと考えられているが、むしろ利点も多い。スプラインはもともと離散データの補間関数としてよく使われており、実際、データ列 $\{\theta_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ から $\{c_k^{(0)}\}$ を求める高速の補間アルゴリズムを簡単に得ることができる。これを使えば内積の計算は不要である。また、直交ウェーブレットと違って、任意の x の値について簡単に N_m や ψ_m の値を求めることができる。まだ広く応用されていないが、スプライン・ウェーブレットは有望である [10]。

図 4 に B スプラインとそれに対応するウェーブレットを、 $m=2$ と $m=4$ について示す。

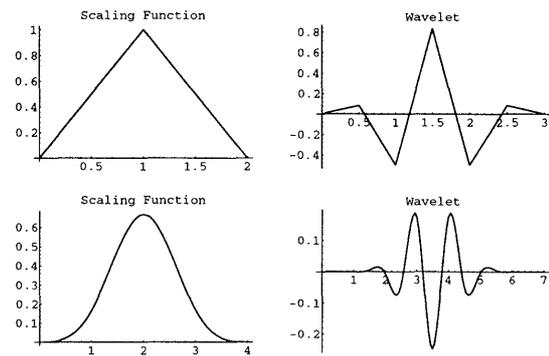


図 4. スプライン・ウェーブレット。

9 フィルタバンク

ウェーブレットは信号の時間周波数解析を可能にする。つまり、信号平面上の最小単位の範囲で、時間と周波数を同時に特定することができる。しかも、多重解像度解析という性質は、信号をいっぺんに成分に分解せず、解像度を 1 レベルずつ下げて分解することを可能にする。こうした特徴を生かすことによって、ウェーブレットは効果的な応用ができる。

応用の方法は、ウェーブレット解析をデジタル・フィルタとして扱うか、関数の近似として扱うかの 2 つに大別される。

第 1 の方法では、データ列 $\{\theta_k\}, k \in \mathbf{Z}$, を (13) における係数 $\{c_k^{(0)}\}$ と見なす。これに分解アルゴリズム (33) を適用して得られた $\{c_k^{(-1)}\}$ と $\{d_k^{(-1)}\}$ はそれぞれ元のデータの低周波成分と高周波成分である。つまり $\{g_k\}$ と $\{h_k\}$ はローパス・フィルタ (LPF) とハイパス・フィルタ (HPF) として働く。これを見るために $\{g_k\}$ から多項式

$$G(z) = \frac{1}{2} \sum_k g_k z^k$$

を定義する ($G(z^{-1})$ は z 変換といわれる)。 $H(z), P(z), Q(z)$ も同様に定義される。 $|G(e^{-i\omega})|$ と $|H(e^{-i\omega})|$ を $0 \leq \omega \leq \pi$ の範囲でプロットすれば LPF と HPF の周波数特性が得られる。図 5 に Daubechies の関数の $N=2$ (左) と $N=5$ (右) についてこれを示す。 N が大きいほど遮断特性がよい。

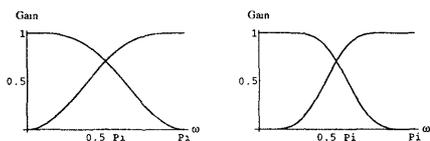


図 5. Daubechies 関数によるフィルタの周波数特性.

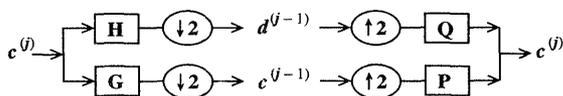


図 6. QMF.

分解アルゴリズム (33) は LPF $G(z)$ と HPF $H(z)$ を組み合わせたフィルタバンクの動作に対応しており、それぞれデータと $\{g_k\}$ または $\{h_k\}$ の離散的な畳み込みを行った後、2:1 のダウンサンプリングを行う。図 6 の左側はこれを図式的に表したものである。再構成アルゴリズム (34) は、データ $\{c_k^{(-1)}\}$ と $\{d_k^{(-1)}\}$ を 1:2 にアップサンプリングして、これを同様なフィルタバンクを通して合成信号を得る。図 6 の右側はこれを図式的に表す。このような分解・再構成を行うフィルタバンクをクアドレチャーマラー・フィルタ (QMF) という。上に定義した $G(z)$ などは式

$$\begin{aligned} P(z)G(z) + Q(z)H(z) &= 1 \\ P(z)G(-z) + Q(z)H(-z) &= 0 \end{aligned}$$

を満たすが、これは分解・再構成されて信号が元に戻ることを保証する。言い換えれば、ウェーブレット解析は、時間周波数解析を実現しかつ完全再構成可能な QMF を実現するのである。

音声信号や画像の圧縮に使われる方法として最近注目されている方法にサブバンド符号化がある。これには QMF の低周波側の出力にまた QMF をカスケード接続して、図 7 のような構成のフィルタバンクを使う。このフィルタバンクの動作は、関数 f_j を (16) のように分解し、これを再帰的に繰り返すことに対応する。こうしてウェーブレットは音声信号や画像圧縮に直接的な関わりをもつ [11]。信号処理の基礎については文献 [12] を参照されたい。

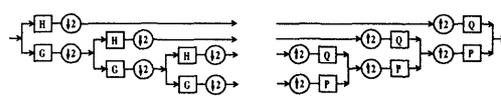


図 7. サブバンド分解のフィルタバンク.

大きい N の Daubechies の関数では、対応するフィルタ $H(z)$ の低域遮断特性がよく、データの不連続性に鋭敏に反応する。一見滑らかに見えるデータ列に潜む不連続を検出した例を図 8 に示す。図の左側のデータ列 $\{c_k^{(0)}\}$ は $m = 4$ の B スプライン $N_4 \in C^3$ をサンプルしたもので、元の関数の 3 次の導関数に現れる不連続点がウェーブレットによって検出された。

不連続点の検出にはデータの高周波成分だけを取り出して、その位置を検出すればよく、それには必ずしも多重解像度解析は必要ない。したがって、遮断特性のよい HPF を構成できるウェーブレット ψ を任意に選ぶことができ、対応するスケール関数はなくてもよい。この手法は部材の内部に潜む亀裂の検出などに応用されている [13,14]。

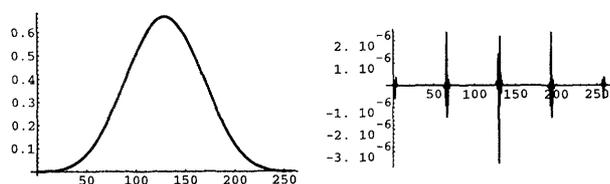


図 8. ウェーブレットによる不連続の検出.

10 関数の補間と近似

もう 1 つの方法では、データ列 $\{\theta_k\}$ を $f_0(k) = \theta_k$ のように補間する近似関数 $f_0(x)$ を (13) の形で決める。スプライン・ウェーブレットでは、 $\{\theta_k\}$ から係数 $\{c_k^{(0)}\}$ を効率のよいアルゴリズムで求めることができる [10]。これに分解・再構成のアルゴリズム (33),(34) を適用し、係数 $\{d_k^{(-1)}\}$ から得られる $g_{-1}(x)$ が元の信号の振動成分を表し、 $\{c_k^{(-1)}\}$ から得られる $f_{-1}(x)$ が平滑化された信号を表す。この方法では信号は連続関数として扱われる。したがって平滑化された信号 $f_{-1}(x)$ の導関数を求めるなどの応用ができる。

簡単な応用例として、図 9 に示すような周期

性のないデータ列からノイズを取り除くことを考える。離散フーリエ変換 (左下) ではデータとノイズの区別は付きにくい。実際、フーリエ変換のある閾値より小さい値を切り捨てて、逆変換してデータを再構成すると図の右上のようになる。一方、分解アルゴリズム (33) によって得られた g_{-1} と g_{-2} を切り捨てて $f_{-2}(x)$ をプロットしたのが図の右下である。一般に、ウェーブレットによる方法ではピークの高さは保たれ、高調波成分のデータのない領域への滲みだしは少ない。

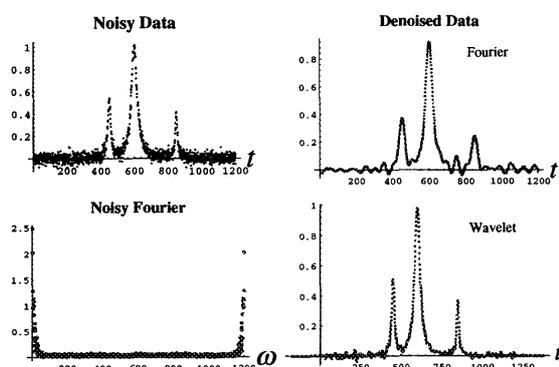


図 9. 周期的でないデータ列におけるノイズ除去。

11 応用例

振動系を加振して、系に働く乾性摩擦力の性質を調べる実験において、ノイズの除去にウェーブレット解析を用いた例を示す [15-18]。変位 x と摩擦力 f を一定の時間間隔 $\Delta t = 0.005$ 秒で測定した、それぞれ 6320 個の離散データ x_k, f_k が得られた。乾性摩擦力 f は速度 v の $f = -F \text{sign } v$ なる関数としてモデル化されるが、実際にはもっと複雑な関数と考えられる。実験では、変位から速度 v を求め、これと摩擦力 f の関係を調べるのが目的であるが、ここでは速度 v と摩擦力 f のデータからノイズを取り除くことに焦点を当てる。

まず、変位 x_k をデータ列 $c_k^{(0)}$ として分解アルゴリズム (33) を適用する。 $d_k^{(-1)}$ の値の分布はほぼ一様で、これはすべてノイズと考えられた。そこで、次にマザー関数を $m = 4$ の B スプラインとして、 x_k の補間関数 $f_0(x)$ を作り、これを $f_0(x) = f_{-2}(x) + g_{-1}(x) + g_{-2}(x)$ に分解す

る。上の観察から g をノイズと見なし、 $f_{-2}(x)$ を平滑化された信号と見なす。図 10 に補間関数 (上) と平滑化された信号 (下) の一部を示す。ノイズがとれて、滑らかな曲線が得られている。

次に速度 v を求める。変位 x_k から次のようにして速度 v_k を求めることができる。

$$v_k = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2\Delta t} \quad (36)$$

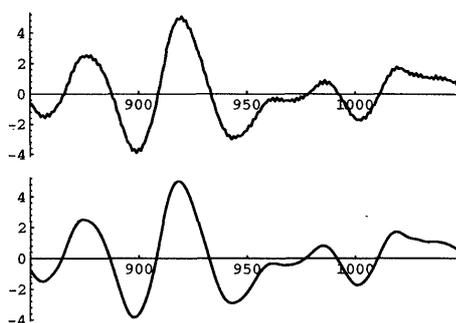


図 10. 変位におけるノイズ除去

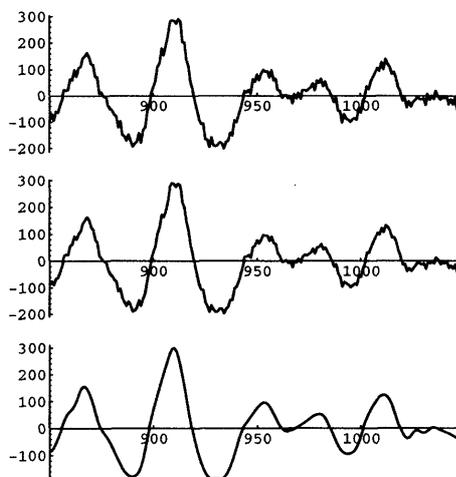


図 11. 速度におけるノイズ除去

これは図 11 (上) に示すようにノイズの影響を強く受けている。これを通常のバターワース、デジタルフィルタで処理したものを図 11 (中) に示す。ノイズ除去の効果はそう大きくない。ウェーブレットを使う方法では、図 10 のように変位が十分滑らかな関数 $f_{-2}(x)$ として得られている。したがって、これを微分して速度を求めることができる。特にこの場合、B スプラインの微分公式

$$N'_m(t) = N_{m-1}(t) - N_{m-1}(t-1)$$

を使って簡単に求めることができる。こうして得られた結果を図 11 (下) に示す。

一方、摩擦力 f については、信号そのものが方形波に似ているため、そのエッジに相当する真の信号の一部は残さなければならない。ウェーブレット縮小法 [19] を用いて処理した結果を図 12 (下) に示す。図 12 (上) の元の信号と較べると、細かいノイズは取れているものの、角は丸くなっている。

ジャンプのある関数をフーリエ級数に展開して有限項で打ち切ると、近似関数はジャンプの近傍でオーバーシュートをもつことは Gibbs の現象として知られているが、ウェーブレット展開においても同様のことが起こる。つまり、ジャンプの近傍では高周波のウェーブレット成分はノイズと区別できない。したがって、ジャンプのあるデータからノイズを分離するには特別な工夫が必要とされる [20]。

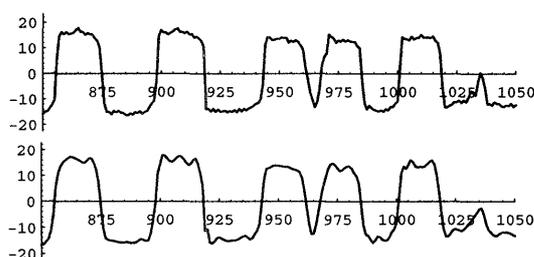


図 12. 摩擦力におけるノイズ除去

12 結論

ウェーブレット解析は時間周波数解析を実現する画期的な信号処理手法で、データ処理に極めて有効に利用できる。ウェーブレットは Daubechies の関数や B スプラインを基にしたもののほか、様々な種類の関数を使って構成することができる。多重解像度解析などの一般的な構造は共通であるが、その性質は細かい点でそれぞれ異なっている。応用の際、目的に合わせて関数を正しく選択することが重要であろう。とくに、関数の補間・近似という立場からの B スプライン・ウェーブレットは、その利点を有効に活用できる多くの応用があると期待される。いろ

いろな場面に様々なマザー関数を使ってウェーブレット解析を行い、多くの経験を積み重ねて、それぞれの特徴を把握することが今後の課題であろう。

参考文献

- [1] Chui, C. K., *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, 1992.
桜井・新井 訳, ウェーブレット入門, 東京電機大学出版, 1993.
- [2] Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.
- [3] Meyer, Y., *Wavelets*, SIAM, 1992.
- [4] 山口・山田, ウェーブレット解析, 科学, **60**, 1990, 398-405.
- [5] 佐藤, ウェーブレット理論の数学的基礎 I, II, 日本音響学会誌, **47**, 1991, 405-423.
- [6] 山口 他, 「ウェーブレット特集」, 数理科学 12 月号, 1993.
- [7] 榊原 進, ウェーブレット ビギナーズガイド, 東京電機大学出版, 1995 (近刊).
- [8] Daubechies, I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure. and Appl. Math.* **41**, 1988, 909-996.
- [9] Chui, C. K. and J. Z. Wang, On compactly supported spline wavelets and a duality principle, *Trans. Amer. Math. Soc.* **330**, 1992, 903-915.
- [10] Sakakibara, S., A practice of data smoothing by B-spline wavelets, in *Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, ed. by C. K. Chui *et al.*, 1994, Academic Press, 179-196.
- [11] 斎藤 他, 特集「ウェーブレットへの道」, 電子情報通信学会 秋期大会 講演論文集, 1994.

- [12] イブ・トーマス, 中村 尚五, プラクティス デジタル信号処理, 東京電機大学出版, 1995.
- [13] 岸本・井上・中西・渋谷, 分散性波動のウェーブレット解析, 機械学会 第 6 回計算力学講演会 (仙台) 講演論文集, 1993, 350-351.
- [14] 曾根・山本・中岡・増田, ウェーブレット変換を用いた高層構造物のヘルスマonitoring システム, 機械学会 機械力学・計測制御講演会 (秋田) 講演論文集, 1994, 421-424.
- [15] 榊原・清水, 乾性摩擦系の振動応答におけるノイズの影響, 機械学会 第 6 回計算力学講演会 (仙台) 講演論文集, 1993, 299-300.
- [16] 榊原・清水, ウェーブレットを用いた乾性摩擦の解析法, 機械学会 機械力学・計測制御講演会 (秋田) 講演論文集, 1994, 172-175.
- [17] 榊原・遠藤, 狭帯域スペクトルを持つ振動波形のウェーブレット解析, 機械学会 機械力学・計測制御講演会 (秋田) 講演論文集, 1994, 168-171.
- [18] 榊原, ウェーブレット縮小法による乾性摩擦力解析法, 機械学会 第 7 回計算力学講演会 (東京) 講演論文集, 1994, 269-270.
- [19] Donoho, D. L., and Iain M. Johnstone, Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, *Biometrika*, to appear, (Stanford Univ. Dept. of Statistics, Technical Report 400, 1992).
- [20] Donoho, D. L., On minimum entropy segmentation, in *Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, ed. by C. K. Chui *et al.*, 1994, Academic Press, 233-269.