The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

日本 AEM 学会誌 Volume 3 Number 2 JUNE 1995

学術論文

GSMAC 有限要素法による電磁熱流体の立方体 Cavity 内自然対流解析

Numerical Analysis of Natural Convection of Thermo-electrically Conducting Fluid in a Cubic Cavity Using GSMAC-FEM

非 正 伊藤 好文 (慶應大学 [院]) 非 正 中井 太二郎 (慶應大学 [院])
棚橋 隆彦 (慶應大学理工学部)

Yoshifumi ITO, Keio University, 3–14–1 Hiyoshi, Kohoku–ku, Yokohama 223
Taijiro NAKAI, Keio University
Takahiko TANAHASHI, Keio University

The application of MHD(Magnetohydrodynamics) devices have been rapidly developed in recent years. Thermo-electrically conducting fluid has been increasingly used in the manufacturing process of semiconducting material such as silicon crystal. In the present paper,we propose a new GSMAC(Generalized Simplified Marker and Cell) finite element method coupling with ϕ method. The present scheme efficiently satisfies both conservation of mass and electrical current. In order to verify the present scheme, we discuss the natural convection of thermo-electrically conducting fluid in a cubic cavity under a constant magnetic field. The numerical results obtained here agreed well with the past experimental and numerical results.

key words : Thermo-Electrically Conducting Fluid, Natural Convection, GSMASC-FEM, ϕ Method, Three- Dimensional Analysis

1 緒言

電磁熱流体に関する研究は，1937 年，Hartmann の水銀力学に始まり，以来電磁流体力学 (Magnetohydrodynamics;MHD) として発展してきた．現在では MHD 発電 [1]，プラズマ制御，溶融金属の移送および制御などに応用される．特に，最近の高温超伝導物質に関する研究成果からその工学応用範囲は飛躍的に拡大されており，今後は，これらの MHD 機器の精密化及び効率向上のため電磁熱流体の諸現象を正確に予測できる手法の確立が要求される．

しかし現在，理論解析・実験ともに問題があり電磁熱流体の流動現象を予測するためには，数値解析に頼らざるを得ない．また，最近の大型計算機の能力向上により数値解析による予測は実用レベルに達しつつある．

磁場の正確な解析手法として主に A 法 [2] と B 法 [3] がある．しかし，シリコン・水銀に代表される低磁気 Reynolds 数のモデルでは拡散条件を満足する時間刻み幅が小さくなるため，大規模計算には不向きである．工学上，作動流体が低磁気 Reynolds 数 ($Re_m = 1 \sim 10^{-3}$) である場合が多く，解析環境の向上が必要である．

そのため本研究では低磁気 Reynolds 数モデルに適用できる ϕ 法を有限要素法に拡張する．そして有限要素法として GSMAC 法を採用する．磁気 Reynolds 数が小さい場合，流れ場と電磁場の相互作用により起こる誘起磁場は無視できる．ϕ法では誘起磁場を無視する仮定により，磁場の方程式系を簡単化している．解析モデルとしては，立方体 Cavity 内の電磁熱流体の自然対流を用いる．解析結果の比較・検討には尾添・岡田のϕ法 (差分法) による数値解析結果 [4] および実験結果 [6] を用いる．

主な記号

$\boldsymbol{B}_o$: 印加磁場
$\boldsymbol{C}_\alpha$: 要素係数行列 (勾配行列)
Ec : Eckert 数 ($= U_r^2/C_p\Delta T$)
$E^i_{\alpha\beta}$: 対流行列
Gr : Grashof 数 ($= \beta_v \Delta T g L_r^3/\nu^2$)

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

H : Bernoulli 関数 $(= p + \boldsymbol{v}^2/2)$
H^* : Bernoulli 関数の修正量
Ha : Hartmann 数 $(= \sqrt{\sigma_e/\rho\nu}B_oL_r)$
$\boldsymbol{j}$: 電流密度ベクトル
L_r : 代表長さ
$M_{\alpha\beta}$: 要素係数行列 (質量行列)
$\overline{M_{\alpha\beta}}$: 要素係数行列 (質量集中行列)
Nu : 伝熱壁の壁面平均 Nusselt 数
N_α, N_β : 形状関数
Pr : Prandtl 数 $(= \nu/\alpha)$
Ra : Rayleigh 数 $(= Pr \cdot Re)$
Re : Reynolds 数 $(= U_rL_r/\nu)$
$\boldsymbol{S}_\alpha, \boldsymbol{S}'_\alpha, \boldsymbol{S}^*_\alpha$: 境界項
U_r : 代表流速
$\boldsymbol{v}$: 流速ベクトル
$\tilde{\boldsymbol{v}}$: 流速ベクトルの予測子
V^e : e 番目の要素の体積
$W_{\alpha\beta}$: 要素係数行列 (拡散行列)
ϕ_H : 修正速度ポテンシャル
ϕ_E : 電位ポテンシャル
Ω : 境界領域
$\boldsymbol{\omega}$: 渦度ベクトル
χ : 修正電位ポテンシャル

添字

n : 時間ステップ数
e : 要素番号
α, β : 要素内節点番号

2 数値解析手法

2.1 支配方程式系

電磁熱流体の支配方程式は，速度場，電磁場および温度場を支配する方程式からなる．速度場の支配方程式は，連続の式と Navier-Stokes 方程式，電磁場の支配方程式は，Ohm の法則と電荷不在の法則である．そして，温度場の支配方程式は，Joule 発熱項が付加した Energy 方程式である．以下に，支配方程式系を示す．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla H + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{Re}\nabla^2 \boldsymbol{v} + \frac{Ha^2}{Re}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}_o + \frac{Gr}{Re^2}T\boldsymbol{e}_y \tag{2}$$

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_o) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{j} = -\nabla\phi + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_o) \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)T + \frac{1}{Ra}\nabla^2 T + \frac{Ha^2 Ec}{Re}\boldsymbol{j}^2 \tag{6}$$

ここで，上記の電磁熱流体の支配方程式は，以下の仮定を設け簡単にしている．

(1) 電磁熱流体は，Newton 流体と仮定し，流れは非圧縮・層流とする．

(2) 浮力項の密度以外の物性値温度依存性を無視する (Boussinesq 近似)．

(3) 浮力及び Lorentz 力以外の外力の影響を無視する．

(4) 印加磁場は一定とする（誘起磁場を無視）．

(5) 変位電流は無視する．

(6) 電磁熱流体は電気的に中性で，無極性である．

(7) 粘性散逸による発熱を無視する．

また，Navier-Stokes 方程式 (2) は，以下のベクトル解析の公式を用いて回転系表示で示されている．

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) - \nabla\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) \tag{7}$$

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

2.2 数値解析手法

式 (1)~(6) に対して，Galerkin 法を用いて空間の離散化を行う．ここで，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{j}$および T に関して六面体双一次要素による補間，その他の変数については要素内一定の補間を適用する．さらに，式 (2) を速度について陽的に，Bernoulli 関数について陰的に時間前進させる．無次元数に関して $Re = Gr$ とした．

•速度場

$$\boldsymbol{\omega}_e^n = \frac{1}{V^e}\boldsymbol{C}_\alpha \times \boldsymbol{v}_\alpha^n \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{v}_\beta} &= \boldsymbol{v}_\beta^n + \frac{\Delta t}{\overline{M_{\alpha\beta}}}\Big[\boldsymbol{C}_\alpha H_e^n + M_{\alpha\beta}\boldsymbol{v}_\beta^n \times \boldsymbol{\omega}_e^n \\ &+ \frac{Ha^2}{Gr}M_{\alpha\beta}\boldsymbol{j}_\beta^n \times \boldsymbol{B}_o \\ &- \frac{1}{Gr}\left(W_{\alpha\beta}v_{x\beta}^n - M_{\alpha\beta}T_\beta^n \boldsymbol{e}_y\right) - S_{x\alpha}\Big]\end{aligned} \tag{9}$$

$$\phi_{He}^k = -\lambda \boldsymbol{C}_\alpha \cdot \tilde{\boldsymbol{v}_\alpha}^k \tag{10}$$

$$\boldsymbol{v}_\beta^{k+1} = \tilde{\boldsymbol{v}_\beta}^k + \frac{\boldsymbol{C}_\alpha}{\overline{M_{\alpha\beta}}}\phi_{He}^k \tag{11}$$

$$H_e^{k+1} = H_e^k + \phi_{He}^k/\Delta t \tag{12}$$

•電磁場

$$\tilde{\phi_E} = -\lambda \boldsymbol{C}_\alpha \cdot \left(\boldsymbol{v}_\alpha^{n+1} \times \boldsymbol{B}_o\right) \tag{13}$$

$$\tilde{\boldsymbol{j}_{x\beta}} = \frac{1}{\overline{M_{\alpha\beta}}}\left(\boldsymbol{C}_\alpha - \boldsymbol{S}'_\alpha\right)\tilde{\phi_E} + \boldsymbol{v}_\beta^{n+1} \times \boldsymbol{B}_o \tag{14}$$

$$\chi_e^k = -\lambda \boldsymbol{C}_\alpha \cdot \tilde{\boldsymbol{j}_\alpha}^k \tag{15}$$

$$\boldsymbol{j}_\beta^{k+1} = \tilde{\boldsymbol{j}_\beta}^k + \frac{\boldsymbol{C}_\alpha}{\overline{M_{\alpha\beta}}}\chi_e^k \tag{16}$$

$$\phi_E^{k+1} = \tilde{\phi_E^k} + \chi_e^k \tag{17}$$

•温度場

$$\begin{aligned}T_\beta^{n+1} = T_\beta^n + \frac{\Delta t}{\overline{M_{\alpha\beta}}}\Big[&-\left(\boldsymbol{v}_e^{n+1} \cdot \boldsymbol{E}_{\alpha\beta}\right)T_\beta^n \\ &-\frac{1}{Ra}\left(W_{\alpha\beta}T_\beta^n - S'_\alpha\right) + \frac{Ha^2 Ec}{Gr}M_\alpha(\boldsymbol{j}_e^{n+1})^2\Big]\end{aligned} \tag{18}$$

ただし，下添字α，βは要素内局所接点を表し，本論文では，1 から 8 の値をとる．また，下添字 e は要素一定を意味する．一般に，非圧縮電磁熱流体の有限要素解析では，連続の式と電荷不在の法則を満足させる Poisson 方程式に多くの計算時間を要する．本論文では，Poisson 方程式の高速解法として，加藤・棚橋 [7] によって提案された速度と Bernoulli 関数を同時に緩和させながら解く方法を適用している．式 (8) から (18) の各要素係数行列と境界積分項は，それぞれ次式で計算される．

$$M_{\alpha\beta} = \int_{V^e} N_\alpha N_\beta dV^e \tag{19}$$

$$M_\alpha = \int_{V^e} N_\alpha dV^e \tag{20}$$

$$W_{\alpha\beta} = \int_{V^e} \nabla N_\alpha \cdot \nabla N_\beta dV^e \tag{21}$$

$$\boldsymbol{C}_\alpha = \int_{Ve} \nabla N_\alpha dV^e \tag{22}$$

$$\boldsymbol{E}_{\alpha\beta} = \int_{V^e} N_\alpha \nabla N_\beta dV^e \tag{23}$$

$$\boldsymbol{S}_\alpha = \int_{\Omega_2^e}\left(H_E^n \boldsymbol{n} - \frac{1}{Re}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial n}\right)d\Omega^e \tag{24}$$

$$\boldsymbol{S}'_\alpha = \int_{\Omega_4^e} N_\alpha \boldsymbol{n} d\Omega^e \tag{25}$$

$$S_\alpha^* = \int_{\Omega_6^e} N_\alpha \frac{\partial T^n}{\partial \boldsymbol{n}} d\Omega_6^e \tag{26}$$

ただし，$\overline{M_{\alpha\beta}}$は対角化された質量集中行列とする．

2.3 解法のアルゴリズム

時間前進のアルゴリズムは以下の通りである．

Step1 n 時刻の$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{B}_o$，Hから，予測子$\tilde{\boldsymbol{v}}$を式 (9) より求める．

Step2 式 (10) から，修正速度ポテンシャルϕ_H^k を直接法で求める．

Step3 ϕ_H^kを式 (12) に代入し修正量 H^*を求め，さらに H^*と予測子$\tilde{\boldsymbol{v}}$から $n+1$ 時刻の速度$\boldsymbol{v}^{n+1}$を式 (11) より求める．

Step4 式 (13) から，電位ポテンシャルの予測子$\tilde{\phi_E}$を直接法で求める．

Step5 $\tilde{\phi_E}$を式 (14) に代入し，電流密度の予測子$\tilde{\boldsymbol{j}}$を求める．

Step6 式 (15) から，修正電位ポテンシャルχ_e^kを直接法で求める．

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

Step7 χ_e^kを式 (16), (17) に代入し，$n+1$ 時刻の ϕ_E^{n+1}, $\boldsymbol{j}^{n+1}$を求める.

Step8 式 (18) から，$n+1$ 時刻の温度 T^{n+1}を求める.

3 計算モデル

本研究において，解析モデルに図 1 に示すような立方体 Cavity 内自然対流問題を取り上げる．本解析における境界条件として，速度は全壁面で non−slip とし，温度は $x=0$, $x=1$ それぞれの面で $T=1$, $T=0$, 残りの面を断熱面 $(\partial T/\partial n)$=0 として与える．また，温度の初期条件として，一般に自然対流の非定常解析では，断熱面および Cavity 内部を $T=0$ とするが，本研究では Ozoe・Okada による数値解析[4]，尾添の実験 [6] の条件に合わせて $T=0.5$ で与える．電場の境界条件は，立方体 Cavity 全壁面を絶縁体と仮定するので，電位ポテンシャルに関して $(\partial\phi/\partial n)$=0 として与える．磁場については，立方体 Cavity の境界および内部は，すべてその大きさは $|\boldsymbol{B}_0|=1$ で時間に関係なく一定であり，x, zは正方向，yは負方向に印加している．本解析における計算条件を表 1 に示す．計算条件は，Ozoe・Okada による数値解析 cite4(Case1∼7)，尾添の実験 [6](Case8∼10) の条件に合わせている．x, y, z方向にそれぞれ 20, 14, 10 と分割された不等分割直交メッシュを用いている.

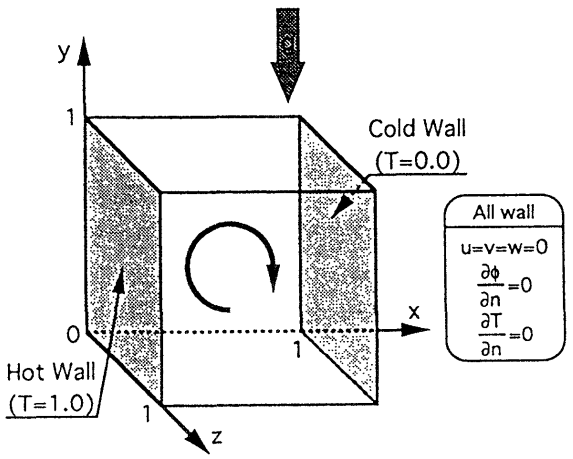


Fig.1 計算モデル

Table 1 計算条件

Case	Pr	Ra	Ha	$\boldsymbol{B}_o$
1	0.054	10^7	0	−
2	0.054	10^7	100	$+x$
3	0.054	10^7	100	$-y$
4	0.054	10^7	100	$+z$
5	0.054	10^6	0	−
6	0.054	10^6	300	$+x$
7	0.054	10^6	500	$+x$
8	0.025	10^5	0	−
9	0.025	10^5	40	$+x$
10	0.025	10^5	108	$+x$

4 計算結果および検討

4.1 Hartmann 数依存性

図 2 は Ra=10^7, Pr=0.054, x 方向磁場印加の場合 (Case 5∼7) の時間 $t=2.0\times10^5$における各中央断面での等温線図である．(a), (b), (c) はそれぞれ Hartmann 数が 0(Case 5), 300(Case 6), 500(Case 7) の場合である.

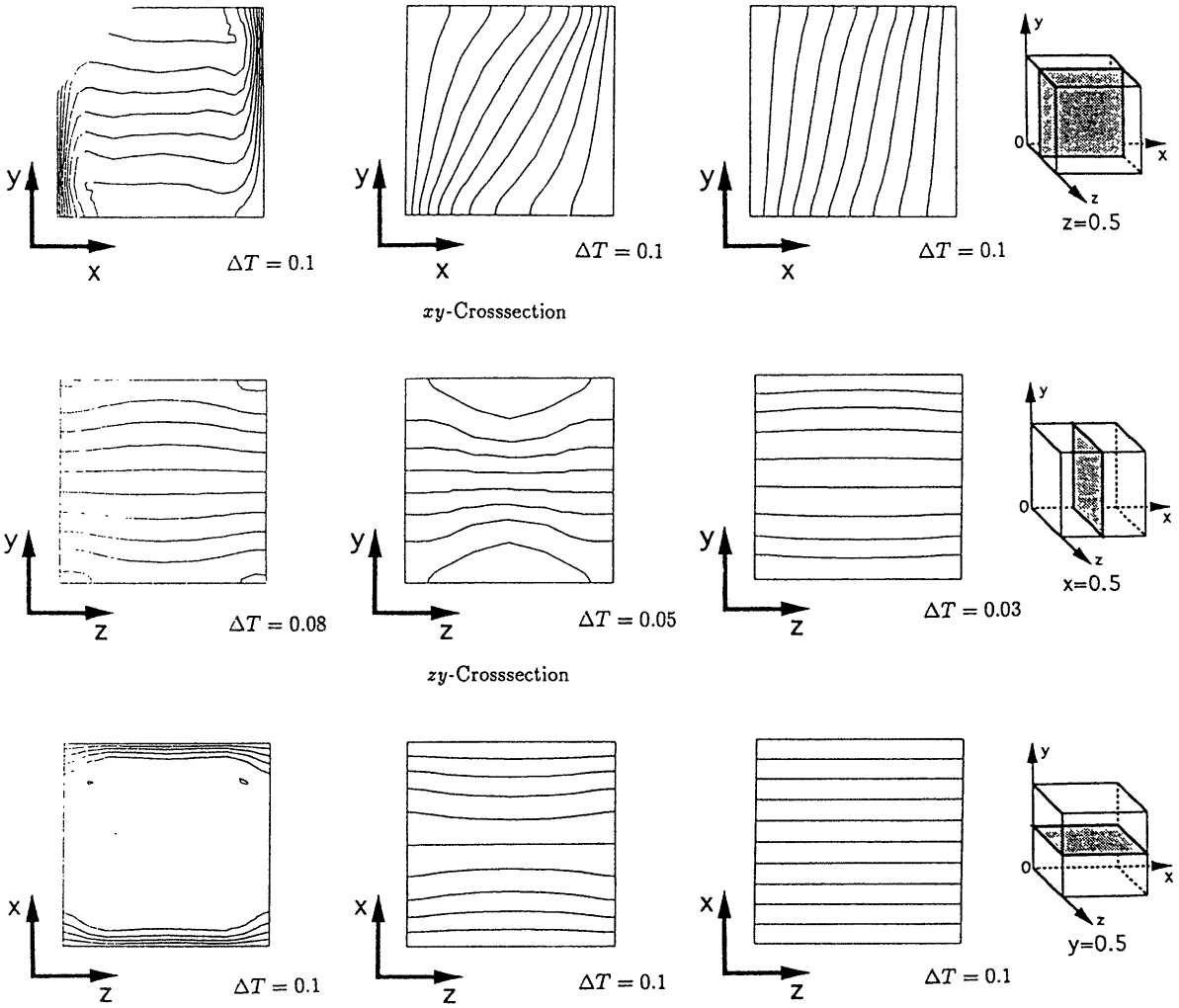
磁場なし (Case 5) の場合，断面中央部では温度が下から上方向，つまり yの正方向へと上昇している．しかし，磁場を印加する (Case 6, 7) と，断面中央部および高温 ($x=0$ 面)，低温 ($x=1$ 面) 壁面付近において温度は低温壁から高温壁へ，つまり x の負方向へと上昇している．これは，磁場印加により対流が抑制され，熱の移動が対流より伝導の方が支配的になっていることを示している.

図 2 は Ra=10^7, Pr=0.054, x 方向磁場印加での Nusselt 数の経時変化の Hartmann 数依存性を示す．本解析では高温壁，低温壁の Nusselt 数の計算を求めたが，Cavity 内部および断熱壁の初期値を 0.5 と設定したため，高温，低温両壁の Nusselt 数の値の差がほぼ一致した (高温，低温両壁の Nusselt 数の値の差が 10^{-6}のオーダー) 結果となった．したがって，高温壁と低温壁との Nusselt 数変化は，ほぼ等しいとみなし，高温壁の Nusselt 数を例にとり，検討・考察を行うものとする.

図 3 の磁場の印加方向を全て x 方向とする Nusselt 数の経時変化において，磁場なし (Case 5) と磁場印加の場合 (Case 6), (Case 7) で明かな違いは周期特性の有無である．沖・棚橋 [3] の数値解析によると，

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics



(a) Ha=0 (Case 5) (b) Ha=300 (Case 6) (c) Ha=500 (Case 7)

Fig.2 各中央断面の等温線図 ($Ra = 10^6$, $Pr = 0.054$, x 方向磁場印加)

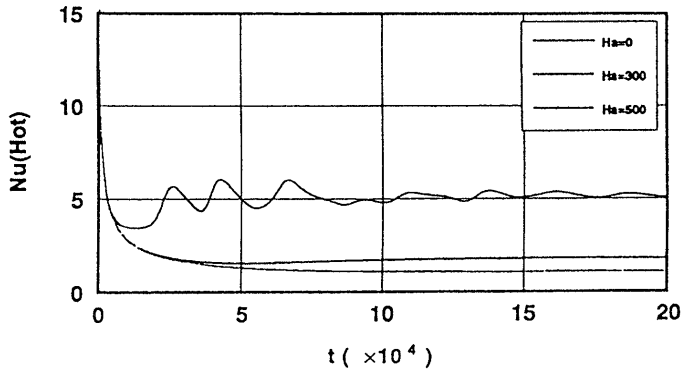


Fig.3 Hartmann 数の大きさによる壁面平均 Nusselt 数の経時変化
($Ra = 10^6$, $Pr = 0.054$)

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

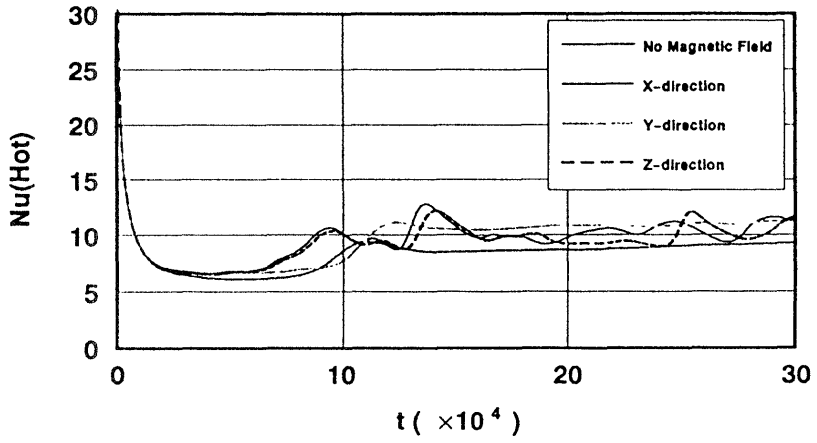


Fig.4 磁場印加方向方向による壁面平均 Nusselt 数の経時変化
($Ra = 10^7$, $Pr = 0.054$)

磁場なし (Case 5) の場合，低 Prandtl 数流体の自然対流において充分に発達した流れは回転流れであり，振動周期のある流れを示し定常流に至らないと報告されている．本解析結果においても，定性的ではあるが，磁場なし (Case 5) の Nusselt 数の経時変化には周期性があらわれている．

一方，磁場印加の場合 (Case 6，7) では周期性は現れず定常に至る．磁場の印加による流れ方向の反対方向に Lorentz 力が作用するため，流れの抑制効果が生じ定常流が実現されているからである．Ha=300(Case 6) の場合 Nusselt 数は約 2，Ha=500(Case 7) では約 1 と，Hartmann 数が大きくなるにつれ Nusselt 数が小さくなっている．これも，明らかに印加磁場の大きさの増大に伴なって大きくなる，流れと反対方向の Lorentz 力の作用により流れが抑制され，熱の移動が対流より伝導の方が支配的となっていることを示している．

4.2 磁場印加方向による流動特性

図 4 は Ra=10^7，Pr=0.054(Case 1 ～ 4) での磁場の印加方向による壁面平均 Nusselt 数の経時変化を示す．磁場印加 (Case 2 ～ 4) の場合，すべて Ha=100 とする．磁場なし (Case 1) の場合，前節 4.1 の検討と同様に壁面熱伝達の周期性が確認される．その周期は定性的ではあるが，Ra=10^6(Case 5) と比較して長く，複雑な特性を示している．

x 方向磁場印加 (Case 2) の場合，磁場なしおよび印加磁場下の中で Nusselt 数が最も小さい．また，流体の周期性を最も抑えている．これは y 方向に Lorentz 力が作用し，高温，低温両壁 (x=0，1 面) 付近で自然対流が抑制される．したがって，高温，低温両壁 (x=0，1) 面上での熱伝達は磁場なし (case 1) の場合と比べて伝導の影響が支配的となり，よって Nusselt 数が小さくなるといえる．

y 方向磁場印加 (Case 3) の場合，周期性が抑えられている．平均的に Nusselt 数の大きさは磁場なし (Case 1) の Nusselt 数の平均よりやや小さい程度である．高温壁面では Lorentz 力の抑制効果が生じていない．よって Nusselt 数の大きさにはそれほど影響せず，周期性の抑制効果があらわれているといえる．

z 方向磁場印加 (Case 4) の場合は，x，y 方向磁場印加 (Case 2，3) の場合と異なり周期性が確認される．その周期性は磁場なし (Case 1) の Nusselt 数経時変化と相似した値を示しているが，Nusselt 数の周期のずれが生じていることが定性的にわかる．

4.3 Ozoe・Okada の数値解析 [4]，尾添の実験 [6] との比較

表 2 は Ozoe・Okada の数値解析 [4] (Case 1～ 6) および尾添の実験 [6] (Case 8 ～ 10) の壁面平均 Nusselt 数の比較をしている．(Case 7) は文献に掲載されていないため比較していない．Nusselt 数の値は周期性があり定常にならないものもあるので，(Case 1～4) は $t = 2.0 \times 10^5$以降を平均し (Case 5 ～ 6) は $t = 1.5 \times 10^5$以降を平均した値とした．

Ozoe・Okada [4] の数値解析および尾添 [6] の実験は本解析の壁面平均 Nusselt 数と比較し良好に一致した．

NII-Electronic Library Service

The Japan Society Applied Electromagnetics and Mechanics

表 2 Ozoe・Okada [4] および尾添 [6] の壁面平均 Nusselt 数との比較

Case	Ra	Ha	$\boldsymbol{B}_o$	Nu(Ozoe)	Nu(Present)
1	10^7	0	–	10.52	10.81
2	10^7	100	$+x$	9.66	8.75
3	10^7	100	$-y$	10.45	10.79
4	10^7	100	$+z$	10.02	10.37
5	10^6	0	–	5.74	5.39
6	10^6	300	$+x$	2.25	1.97
8	10^5	0	–	2.95	3.06
9	10^5	40	$+x$	2.38	2.50
10	10^5	108	$+x$	1.49	1.66

5 結言

本研究においては，GSMAC 有限要素法を磁場解析のϕ法に拡張して，高速かつ低容量のスキームを開発した．このスキームを用いて電磁熱流体の立方体 Cavity の自然対流の解析を行い，その有効性を検討し以下の結言を得た．

(1) 定常時の伝熱壁面 Nusselt 数について，尾添の実験結果 [6] (溶融ガリウム:Pr=0.025) と比較し良好に一致した．また，壁面平均 Nusselt 数および等温度線図，速度ベクトル図について，Ozoe・Okada の数値解析結果 [4] (溶融シリコン:Pr=0.054) と比較し良好に一致した．これは本研究で開発したスキームの有効性を示すものである．

(2) 磁場なしの場合，電磁熱流体は低 Prandtl 数流体特有の回転流れとなり，壁面熱伝達の周期性が数値的に確認された．

(3) 磁場印加の大きさに伴い，Lorentz 力の対流抑制効果が大きくなる．それゆえ，対流が抑制され主に伝導によって熱が移動することがわかった．

(4) 磁場印加方向により対流抑制効果の生じる位置が変わり，その位置での熱伝達は磁場なしの場合と比べて伝導の影響が対流より支配的となった．

(1994 年 10 月 4 日受付)

参考文献

[1] 日下，電総研研究速報，TR-90-14，(1990).

[2] Ozoe,H. and Maruo,E.，JSME Int. J.，30-263，(1987)，774.

[3] 沖・棚橋，機論，59-563，B(1993)，2165.

[4] Ozoe,H. and Okada,K.，Int. J. Mass Transfer，32-10，(1989)，1939.

[5] 棚橋，GSMAC-FEM 数値流体力学の基礎と応用，アイピーシー，(1991)，735.

[6] 尾添，伝熱研究 29，112.

[7] 加藤・棚橋，機論，57-540，B(1991)，2640.

NII-Electronic Library Service