日本 AEM 学会誌　Volume 3　Number 4　DECEMBER　1995

学術論文

辺要素を用いた二次元有限要素法による静磁界及び渦電流解析

Two-Dimensional Magnetostatic and Eddy Current Analysis by Finite Element Method Using Edge Element

坪井　始　(福山大学)　小林　富士男　(福山大学)
美咲　隆吉　(福山大学)　矢野　健三　(津山高専)

Hajime TSUBOI, Member of JSAEM, Fukuyama University, Gakuencho, Fukuyama 729-02
Fujio KOBAYASHI, Member of JSAEM, Fukuyama University
Takayoshi MISAKI, Member of JSAEM, Fukuyama University
Kenzo YANO, Member of JSAEM, Tsuyama National College of Technology

Two-dimensional finite element analysis using vector potential with two components based on edge element is investigated. The magnetic vector potential is introduced and the tangential component along the edge of triangular element is chosen as unknown variable preserving the tangential continuity. The formulation of the two-dimensional analysis and the numerical examples are shown.

Key Words : Finite Element Method, Edge Element, Vector Potential, Eddy Current, Magnetic Field

1　まえがき

辺要素は，高周波問題における固有値解析でのスプリアス解の問題を解決する目的で導入されたため，高周波問題での応用が多い [1], [2]．また，辺要素は渦電流解析においても導入されており [3], [4]，三次元解析が実用化されてきた．

ここでは，二成分をもつ磁気ベクトルポテンシャルを用いた二次元解析を行っている．一次の三角形辺要素を導入し，ベクトルポテンシャルの辺方向成分を未知変数とする．この辺要素有限要素法の静磁界解析と渦電流解析への適用法を検討し，計算例を示す．

2　定式化

一次の三角形辺要素を Fig. 1 に示す，辺上のベクトルポテンシャル（磁気ベクトルポテンシャル）の接線成分を離散化された未知変数とする．したがって，要素境界でベクトルポテンシャルの接線成分が連続に定義され，法線成分は不連続となる．要素 e 内のベクトルポテンシャル A^e は次式で定義される．

$$\boldsymbol{A}^e = \boldsymbol{N}_i A_i + \boldsymbol{N}_j A_j + \boldsymbol{N}_k A_k \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{N}_j, \boldsymbol{N}_k$ はベクトル補間関数，A_i, A_j, A_k は辺上のベクトルポテンシャルの接線成分である．

ベクトル補間関数 $\boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{N}_j, \boldsymbol{N}_k$ は座標の一次関数で次のように与えられる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_i &= L_j \nabla L_k - L_k \nabla L_j \\ \boldsymbol{N}_j &= L_k \nabla L_i - L_i \nabla L_k \\ \boldsymbol{N}_k &= L_i \nabla L_j - L_j \nabla L_i \end{aligned} \tag{2}$$

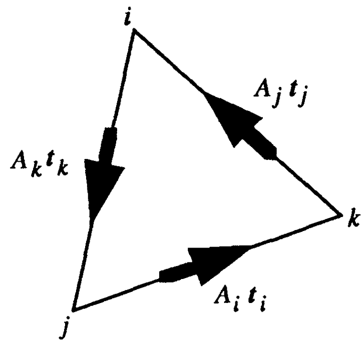


Fig.1 Edge element.

ここで，L_i, L_j, L_k は面積座標である．
面積座標は，

$$
\begin{aligned}
L_i &= a_i + b_i x + c_i y \\
L_j &= a_j + b_j x + c_j y \\
L_k &= a_k + b_k x + c_k y
\end{aligned}
\tag{3}
$$

で表される座標の一次関数である．(3) 式を (2) 式に代入すると次の式を得る．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_i &= (b_k L_j - b_j L_k)\,\boldsymbol{i} + (c_k L_j - c_j L_k)\,\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{N}_j &= (b_i L_k - b_k L_i)\,\boldsymbol{i} + (c_i L_k - c_k L_i)\,\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{N}_k &= (b_j L_i - b_i L_j)\,\boldsymbol{i} + (c_j L_i - c_i L_j)\,\boldsymbol{j}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

要素 e 内の磁束密度 $\boldsymbol{B}^e$ は一定値となり，(4) 式を用いると $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ から次のように表される．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^e &= \nabla \times \boldsymbol{A}^e \\
&= 2\{(b_j c_k - b_k c_j) + (b_k c_i - b_i c_k) \\
&+ (b_i c_j - b_j c_i)\}\,\boldsymbol{k}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

一方，要素内の $\boldsymbol{A}$ の発散は次のように零となる．

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{A}^e = 0 \tag{6}
$$

上式は要素内における A の性質であり，有限要素法の定式化において課せられるクーロンゲージのような解析領域における拘束条件とはならない．

また，Fig. 1 の要素では，ベクトル補間関数に次の性質がある．

$$
\begin{aligned}
&\int_j^k (\boldsymbol{N}_i A_i) \cdot \boldsymbol{t}_i \, dl = A_i \\
&\int_k^i (\boldsymbol{N}_j A_j) \cdot \boldsymbol{t}_j \, dl = A_j \\
&\int_i^j (\boldsymbol{N}_k A_k) \cdot \boldsymbol{t}_k \, dl = A_k
\end{aligned}
\tag{7}
$$

すなわち，未知変数 A_i, A_j, A_k は辺上の積分値となっている．

Fig. 2 にベクトル補間関数の例を示す．この場合のベクトル補間関数は次のように表される．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_i &= -y/4\boldsymbol{i} + x/4\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{N}_j &= -y/4\boldsymbol{i} + (-1/2 + x/4)\,\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{N}_k &= (1/2 - y4)\,\boldsymbol{i} + x/4\boldsymbol{j}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

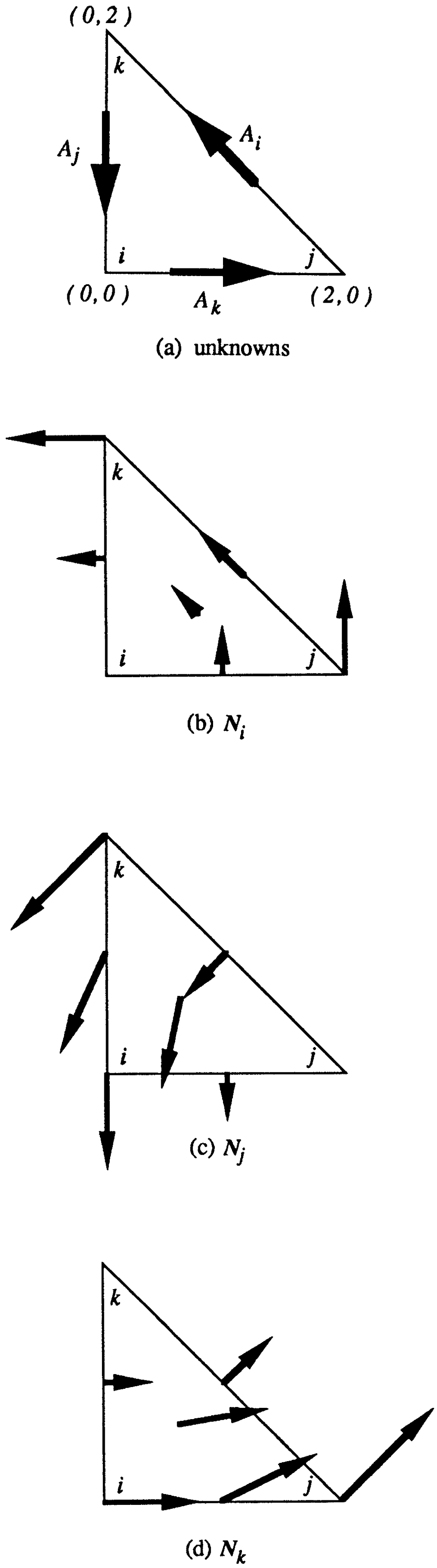


Fig.2 Vector interpolation functions.

Fig. 2 からわかるように，辺上では接線成分は一定値で，法線成分は一次関数となっている．また，接線成分は，定義された辺以外の辺上で零となることが確認できる．

物理量の時間依存性が正弦波の場合，渦電流問題の支配方程式は次式で与えられる．

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + j\omega \boldsymbol{D} \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{H}$ は磁界の強さ，$\boldsymbol{J}$はソース電流密度，$\boldsymbol{D}$ は電束密度，ω は角周波数である．

(9) 式を用いてガラーキンの重み付残差方程式を作成すると次のようになる [5].

$$\iint_S \boldsymbol{N}_i \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H} - j\omega \boldsymbol{D} - \boldsymbol{J}) ds = 0 \tag{10}$$

これを変形して，

$$\int_L (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{N}_i) \cdot ndl + \iint_S (\boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{N}_i - j\omega \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{D} - \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}) ds = 0 \tag{11}$$

となる．そこで，$\boldsymbol{D} = \varepsilon^* \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E} = -j\omega \boldsymbol{A}, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu, \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を (11) 式に代入し，自然境界条件（ $\boldsymbol{H}$の法線成分が零）を導入して次式を得る．

$$\iint_S \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{N}_i \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} - \omega^2 \varepsilon^* \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J} \right) ds = 0 \tag{12}$$

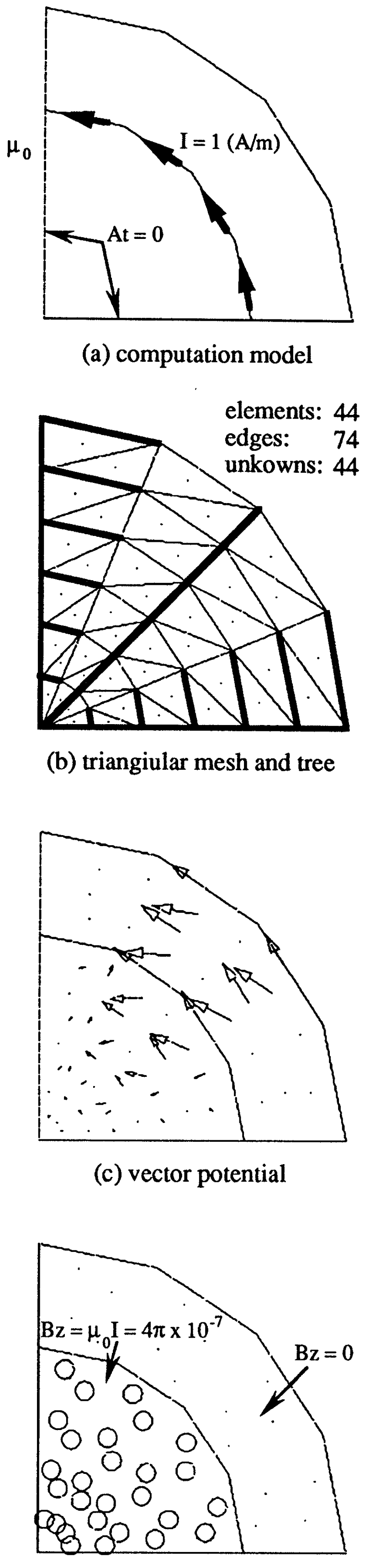
ここで，ε^* は複素誘電率($\varepsilon^* = \varepsilon - j\sigma/\omega$)である．(12) 式をすべての辺に適用して最終の連立方程式の係数行列が計算される．

3 計算例

3.1 静磁界問題

静磁界問題では，(12) 式で $\omega = 0$ とおいて連立方程式の係数行列が作成される．しかし，(12) 式から得られるすべての辺についての連立方程式は，$\boldsymbol{A}$ についての任意性が残っているため，このままでは解くことができない．そこで，すべての節点を通る tree を作成し，co-tree を構成する辺上の $\boldsymbol{A}$ を未知数とする連立方程式を作成する [4].

Fig. 3 に，無限長ソレノイドの解析例を示す．この場合，ソレノイドの内部の磁束密度は$\mu 1$ に，外部は零となる．Fig. 3 (a) に 1/4 領域の解析モデルと



(a) computation model

(b) triangiular mesh and tree

(c) vector potential

(d) magnertic flux density

Fig.3 Magnetostatic problem

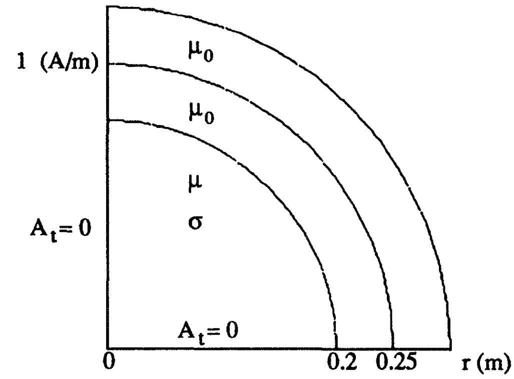
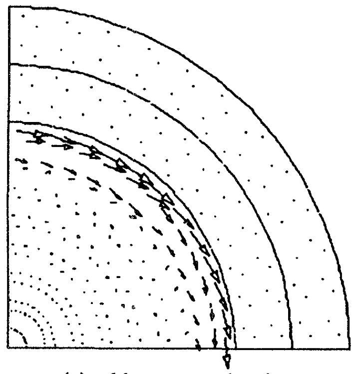


Fig.4 Computation model for eddy current problems.



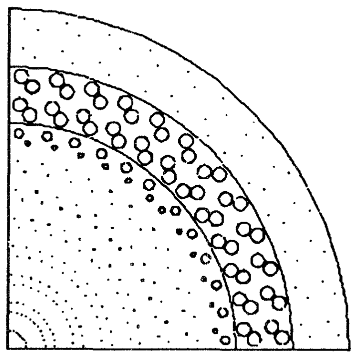


Fig.5 Computation results at $f = 60Hz$, $\mu_1 = \mu_0, \sigma = 1 \times 10^7$.

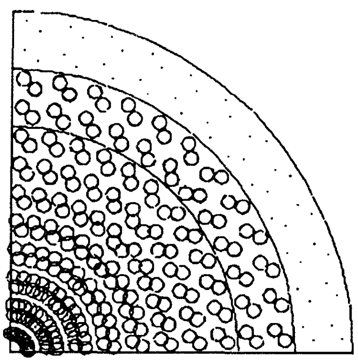


Fig.6 Magnetic flux density at $f = 0.1Hz$, $\mu_1 = \mu_0, \sigma = 1 \times 10^7$.

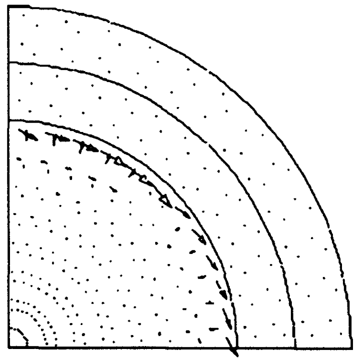


Fig.7 Eddy Current distribution at $f = 60Hz$, $\mu_1 = 1000\mu_0, \sigma = 1 \times 10^7$.

境界条件を示す．(b) は三角形要素分割と tree を示す．総辺数 74 に対して co-tree を構成する未知数は 44 となった．(c) は辺上のベクトルポテンシャルの計算結果である．(d) には磁束密度の z成分の大きさを示す．磁束密度の計算値は，ソレノイド内部で一様，外部は零となり，解析解と非常によく一致した．静磁界問題では高精度に解が得られることがわかった．

3.2 渦電流問題

渦電流問題では，(12) 式を用いて連立方程式を構成することができ，三次元問題における$\phi = 0$ のゲージを導入した場合に相当するので境界条件を導入するだけで連立方程式を解くことができる．ただし，この場合は複素解析となる．このとき，渦電流密度$\boldsymbol{J}$は次式で計算できる．

$$\boldsymbol{J} = -j\omega\sigma\boldsymbol{A} \tag{13}$$

Fig. 4 に計算モデルを示す．要素数は 1/4 領域で 276 である．Fig. 5 は，$f = 60Hz, \mu_1 = \mu_0$, $\sigma = 1 \times 10^7$ の場合の渦電流密度と磁束密度の実部の計算結果である．また，Fig. 6 は，周波数を下げて $f = 0.1Hz$とした場合の結果で，静磁界と同様の結果が得られた．Fig. 7 は，$\mu = 1000\ \mu_0$とした場合の結果である．磁性導体の渦電流解析も可能であるが，渦電流の浸透深さに対応した要素分割が必要である．

4 むすび

以上，辺要素を用いた二次元有限要素解析について述べた．従来の二次元解析は，ベクトルポテンシャルの z 成分を未知変数とする解析であったが，ここで紹介した手法はベクトルポテンシャルの二成分，すな

わち x 成分と y 成分をもつベクトル変数を未知とする解析である．したがって，静磁界解析ではソース電流を面内のベクトル量として扱うことができ，渦電流解析では二次元解析領域の面内のベクトル量として渦電流を求めることが可能である．三次元解析比較すれば解析対象は限られるが，実用的な手法であることが確認できた．

（1995 年 3 月 14 日受付）

参考文献

[1] 羽野：新しい三角形要素を用いたベクトル有限要素法による異方性導波路の解析，電子情報通信学会誌 C, Vol. J70C (1987) p.1329.

[2] A. F. Peterson: Vector finite element formulation for scattering from two-dimensional heterogeneous bodies, IEEE Trans. on Anfennus and Propagation, Vol. 43 (1994) p. 357.

[3] 羽野：第 7 章 辺要素有限要素法，数値電磁界解析法の基礎（坪井，内藤編）(1994) p. 90，養賢堂.

[4] A. Kameari: Three-dimensional eddy current calculation using edge elements for magnetic vector potential, Applied Electromagnetics in Materials (editor: K. Miya), (1989) p. 225, Pergamon Press.