連載

形式と意味(3)

—電磁気学の場合—

宮 健三(東京大学)

1 はじめに

本年9月12日から10月1日までの18日間,ソフィア(ブルガリア),パリ(フランス),アテネ(ギリシャ),ブダペスト(ハンガリー),ブラティスラバ(スロバキア)にそれぞれ3泊から4泊して,研究打合わせを行い,合同セミナー,国際ワークショップ,日本ー中欧ワークショップに出席してきた.これらは全て,日本AEM学会が主催,もしくはそれに近い形で運営してきたものである.多くの日本人研究者と一緒であったが,大分大学の榎園正人教授と一緒に旅行したアテネは特別に印象的であった.私はこれで中国の始皇帝の兵馬俑,エジプト・ルクソールのカルナック神殿と周辺の文化遺跡,ギリシャ文明の遺跡,の三つを目にすることが出来たことになる.これらを見て思うのは,人間とは一体どういう創造物なのであろうか,この人間が顕在的に持っている能力と意図,潜在的に人間の制御の及ばない形で持っている能力と意図はどのような言葉で,どのような概念で説明できるのであろうか,ということである.

地球の歴史は45億年であり,生物の歴史は35億年であり,人間の歴史は500万年であり,言語の歴史は数万年であり,文明の始まりと云われるシュメール文明は今から5000年前の出来事であった.中国文明もエジプト文明もギリシャ文明も5000年前の頃のものであった.これ以外の文明もあちこちに存在していたが,これほどのものは他に存在しなかったといってよい.これらから我々は一体何を学べばよいのであろうか.

私は文化人類学者でも歴史家でもないので,それぞれの文明の特徴について多くを語ることは出来ないが,印象は語ることが出来る.

人間は砂漠で夜空に輝く星を眺めれば,人間をはるかに超えたものの存在(神)を感ぜずにはおれないといわれるが,偉大な王の死を見れば,死後の世界に強い関心を持たずにおれなかったようである.死後の世界に対する関心と宗教と文化(この場合hieroglyph象形文字)が融合したものがエジプト文明の本質的なもののようである.これに反してギリシャ文明は,明るい天空のもと,人間の生の喜びを思い切り表現したものとなっており,エジプト文明とは対照的である.2千数百年前に既に彫刻の「ミロのヴィーナス」や「サモトラケのニケ」が製作されていたのだ.ブロンズ像として有名な「ポセイドン」も2千数百年前のものである.

私と榎園教授はアテネ市の北に位置するパークホテルに滞在したのだが,そこから歩いて5分くらいの所に国立古代博物館があった.シュリーマン博士が発掘したミケネ文明の素晴らしい遺物が展示されているので知られている.アテネ工科大学も近くにあり,Mamalis教授と合同セミナーの打合わせをする傍ら,その博物館を3回訪れた.目的は,実に多くの多彩な壷とブロンズ像の “jockey on the race-horse” を鑑賞することにあった.これらが前回説明した「分割量化マトリックス」とどのように関係するのか,以下に説明してみたい.

2 文明と壷

古代文明を展示する博物館には,大抵古い時代の壷が展示されてある.洋の東西を問わずにである.何故古代人はこんなに壷に対して情熱を注いだのであろうか.

我々が現在所有しているのが当たり前と思っている文明の利器(テレビ,ラジオ,洗濯機,掃除機,魔法瓶,自動車,船舶,航空機など)など考えられない大昔,人々の生活の利器はどういうものであったのであろうか.水や油を溜める器,酒を溜める器,それら

を運ぶ道具であったものが壷であり，それらは生活必需品であった．従って人間の創造の意欲や工夫が壷に向かうのは当然であり，これは洋の東西を問わない．日本の茶器が生活必需品のレベルを通り越して茶道の中で文化になっていったのと動機は同じであろう．

ところで壷を時代的にならべてみると，形と表現が様々に変化しているのが見て取れる．写真 1 にそれを示している（これらは上記の博物館に展示してあるものから採った）．私はこれらに見られる変化を前回述べた名詞の世界，形容詞の世界，動詞の世界に分類してみたい．これらの系統的な 3 つの世界は芸術作品を理解する上でも有用なのである．その意味は次の通りである．

1) 名詞としての壷 (I.D. の確立)

この段階では，壷は本来の物理的機能（液体を蓄えるという機能）の実現に重点が置かれる．壷としてのアイデンティティーは液体を蓄えることにあるからである．いつしか人々は生活に便利なように形や姿を工夫したりすることによって様々の壷を製作するようになりそのある物は美術品として現在まで保存されている．その美的特徴は素朴さにある．写真 1(A) は 3000 年以上前のものであるが，高貴な人の死を悲しんでいる 4 人の女性も含めて形と表現は素朴そのものである．ここでは材質も幾何学も素朴であり，人間の工夫が十分に発達したものとなっていない．しかしながら，壷がどういうものであるかは，人々は生活に密着した形で認識の中に 1 つの領域を確立して行った．壷が人間の心の中に I.D. として確立していったと云うことができるだろう．

2) 形容詞としての壷 (関係の確立)

次の段階では，壷が多く生産されるにつれて，壷と人間との間の関係が質的に変化し始める．人々はある壷をとても便利と思うようになる．他の人々はある壷を大変美しいと思うようになる．そうすると，もっと便利なもの，もっと美しい壷を作り出したいと思うようになる．このとき我々は「人間と壷の間に強い相互作用が発生する」ことになると考える．

ところが様々の壷をじっと見ていると，A という壷と B という壷の関係はどうなっているのかと思うようになる．A から B に時代順に変化していくとき人間の認識に何が起きるのだろうか．形の変化と色の変化と材質の変化の構造はどうなっているのだろうか．これらの変化は前回にも前々回にも述べた表層構造的な知的操作「**移動，置換，消去，追加**」に基づいていることがわかる．移動と置換は内部での操作であり追加と消去は外部との係わりである．取手の位置の変化は移動であり，半円形の取手を楕円形に変えるのは置換であり，要素 a と b を消去して c を追加するなどが自由闊達に行われている．色彩についても同様である．何を良しとし，何を高く評価しないかは各人のセンスにもよるが，このセンスの内容を定量化することが望まれるが今回はこの辺に停めておきたい．

写真 1(A) と (B) の間には 600 年ものへだたりがある．大きな変化が見て取れる．写真 1(B) と 1(C) の間のそれは数十年であり，その変化はそれほど大きくない．しかしながら 1(C) には人々のことが描かれ始めている．壷が人間のための生活必需品から**人間の心の中**に入り始めるのである．そしてここで見逃してはならないのは，絵を描くには今までにない新しい技術を必要としたことである．**総合判断**と云われるようなことが実現したのである．これは子供が形容詞を覚えて自我を確立するのと同じイベントのように私には見える．

3) 動詞としての壷 (自由の確立)

壷は時代の進展と共に変化し，姿，形，色を自由に操作できるようになった．名詞と形容詞の時代は卒業したのである．壷は時間と空間を越える必要性が出てきたのである．子供の知的能力が名詞と形容詞だけに停まるというのは，赤ん坊から成長し小学一年生の体のままに停まるというのと同じ事で，実際には肉体的成長が小学一年生のままだということは聞いたことがない．これと同じ事で，壷の発達も動詞の世界の実現に向かわざるをえない．

この場合本質的なことは，壷に描かれている様々の絵や絵物語の意味なのである．自分の思いを，考えを，思想を彩色を工夫しながら絵として表現するとき，壷は名詞・形容詞の世界に支えられながら**時間と空間を越える**ことが出来るのである．これが動詞の世界の実現である．その後，男女の愛（エロス）を描きながら，主従の愛しい関係を表現しながら壷は様々に創造されていく（写真 1(D)）．これがラングとパロールの世界ということになる．

4) 知の周期性

前回紹介した生物学者ヘンケルの「**個体発生は系統発生を繰り返す**」を思い出して頂きたい．名詞，形容詞，動詞と比喩的に表現している人間の知的発展には人間の知を何となく取り囲む普遍的なものがあることがこれで分かって頂けるであろうか．壷でさえその

変化はこの形式をとるのである．多くの生物に関する変化は社会や国家も含めてこのような形態をとるように思える．これは一体どうしてなのであろうか．それでは翻って考えてみて，人類が数百万年にわたって発展させてきた巨視的な「知の進化」を我々は繰り返しているのではあるまいか．しかし本当にそうだろうか．本当は個体に特有の進化を系統が真似ているのではないだろうか．いずれにしてもその実態を知ろうとすれば，人間の知的変化を研究するしかないのではないだろうか．

人間の認識は人間が持っている形式である．人間の代表的な I.D. である．その具体的内容が意味である．壷でさえ同じ形式を取っているのである．壷で思想を表現できる技術を獲得したら，後は動詞の世界を卒業してパロールの世界に入っていく．このような目で様々の壷を眺めてみると，古代人と我々とは目に見えない形でつながっていることを実感することが出来る．この実感があるために，博物館に引き付けられるのである．そしてさらに重要なことは，古代人と現代人のつながりは時間と空間の相対性と関係していることである．

5) 分割量化マトリックス

以上の考えに触発されて，読者は壷の持つ世界を 3 × 3 の分割量化マトリックスを作成できるであろうか．それは Table 1 と類似なものとなる．

実は Table 1 は次に述べる少年騎手と競走馬に対する分割量化マトリックスである．Table 1 の内容をじっと見ていると,「人と馬の関係 (A(2, 1))」と「動物との心の通い (A(2, 3))」以外は壷の場合と共通である．その見方は次に説明しよう．

3 ブロンズ像ー少年騎手と競走馬

アテネの国立古代博物館の一階第 2 室目の中央にそれはしつらえてあった．写真 2 のブロンズ像がそれである．それを見た瞬間，私は本当にあっと息を呑む思いであった．五島列島の少年時代から今まで心の奥底につかえていたものとこのブロンズ像が共鳴したのを瞬間的に感じたからであった．私の先祖は大昔モンゴルの大草原で馬を駆って意気を吐いていたというのが少年時に培われた私の空想であったが，これはあくまでも根拠の無い勝手な空想であるが，いつまでも消えないでいたのも事実であった．それはどうでもよいとして，目前にあるブロンズ像の迫力，生命力，少年と馬の心の通い，少年のいうことならなんでも聞いてやろうという馬の優しさ，優勝を目指して天空を飛ぶが如く駆ける姿，どうしてこのようなものが 2 千数百年前に創造できたのであろうか．左手に手綱 (今それは失われてない) 右手に鞭 (これも失われてない) を持ちながら，少年の優勝しようというひたむきな姿，私は今までにこれほどのものを見たことが無いとその時思ったが，今もそう考えている．しかもこれは数十年前に海から引き揚げられたブロンズ像なのである．修復されているとはいえ，随所に傷みがあるのである.「ミロのヴィーナス」にしろこのブロンズ像にしろ，2400 年前のソクラテスやプラトンにしろ，当時の人間は現代人と少しも変わらなかったのだ．これらのことから推察すれば，人間が潜在的に究極的なものとして有する感性は時代と共にほとんど進歩しないのだということに気がつく．人間のエロスに進化があり，種の保存に対する意欲が失われれば人類は滅亡する他ないのは当然だから我々の DNA にはこれが変化しないようにプログラムが内蔵されているとしか考えようがない．男が女を見れば，女が男を見れば性的なものを感じるように出来ているのだ．人間の指がいつも 5 本あるのと同じくらい変化しないのだ．そしてこれらの感性は時間と共に変化しないので普遍性が内蔵されているといってよい．変化はある時間断面の中で空間的にのみ生じ，限りなく深く，広くなるだけではないのだろうかと思えるのである．この像はこういう事を私に教えてくれるのである．

芸術作品の鑑賞の仕方にも関係するので Table 1 を少し説明してみる．

(1) 芸術作品に関する主要な出来事は設計，製作，鑑賞であり，前二者は芸術家の仕事であり，鑑賞は不特定の第三者に属する．勿論，出来栄えは芸術家の責任である．ここにも名詞，形容詞，動詞のひな形をみることができる．即ち，設計は芸術作品の骨格を決めるものであり，設計の中で概念化を行う時，可能性 (類像性)，実現性 (指標性)，必然性 (象徴性) の順に必要な項目を順に決定していく．例えば可能性のレベルだけに停まるならば，計画は構想の段階どまりになって作品の完成はとても覚束ない．

(2) 製作は設計通りになされるから両者は本質的に同じ事ではないかという考えが絶えず生じる．これに対しては言語学における「シニフィアンとシニフィエ」の関係や「部分と全体」の関係が「設計と製作」の関

Table 1: 経験世界の造形化 (言語化) ―少年騎手と競走馬―

	設 計 (概念化)	製 作 (文脈化)	観 賞 (人と対象の統合化)
類像性 (構想のレベル) (可能性)	・要素の種類の特定化 ・幾何学的条件の特定化 ・モチーフの特定化	・素材の入手 ・要素の種類 ・要素の制作技術	・構成要素の組合わせ (配置, 比例) ・画竜点睛 ・心と対象との一体化
指標性 (製作性のレベル) (実現性)	・制作方法 ・表情 ・人と馬の関係	・要素の寸法, 形 ・構造化 ・要素の関係化	・美しい (均整) ・生き生きしている ・動物との心の通い
象徴性 (芸術性のレベル) (必然性)	・素材の仕様 ・形, 姿の受容性 ・象徴性の充足	・自己組織化 (新しいものの創造) ・I.D. の実現 ・シニフィアンとシニフィエ	・生きる希望 ・生存の意味 ・時間を超えた普遍性

係に対応していることを理解しておく必要がある. 例えば「石」や「stone」と書いた時, これは記号であるがこの記号の意味するものは何であろうかと問われた時, 問題は必ずしも単純でない. 目の前にある石も石なら, アメリカにある石も石であり, 石のどれ一つを取っても同じものはない. 同時に我々は今までに見たこともない石を見ても他の人々と同様にこれを石だと判断できる. この能力が基本的に重要なのである. 我々は「石」という記号の意味を教わるとき, 石の本質的な部分を理解するだけであって, 全ての石に関する情報を教わるわけではない. ところが我々は**生まれつきの能力**に基づいてそれまで見たこともない石も石だと判断できる. 実は人間のこの能力は**「部分から全体へ至る」**ことを可能とするものであって幼児が名詞を覚える時に生まれつきの能力として人間の中に確立されるものではないだろうか. 我々が見たこともない文章を容易に話したり理解できるのはこのおかげである. この能力はまたカブト虫が同種のものとそれ以外のものとを区別できるようにあらゆる生物に固有の能力である. しかし, 何故人間や生物がこのような**棲み分け**に必要な能力を有しているかは未知である. この棲み分けの話は今西錦司の著書に紹介されている. [1] この「部分を知って全体を推測する」能力は当たり前のこととして考えられているが, これほど重要なものもそう多くはないのである. そしてこれは「設計」と「製作」の関係でもある.

今設計されたもの (図や計算書や仕様書) があるとした時に, それは一つの記号とみなすことが出来るが, 先程の記号「石」が石を特定することが出来ないように, 設計に基づき製作されたものは「部分と全体」の関係になっておりここにも unique solution はないと思うべきである. 数人の製作者が同じ設計図に基づいて製品を製作したとしても出来栄えはそれぞれ異なるのである. 要するに, **設計は製作とは別の次元の出来事なのである.** ところが設計の詳細図面や仕様が十分に精しくなっておれば相当程度に同じ物が常に製作されることになる. 自動車でも原子炉構造物でも実際そのようになっている. この場合,「設計」と「製作」の間にはほとんど恣意性がないことになる. ところが, 性能や長期に使用した時の劣化などの特性に関して云うと異なった挙動を示すようになる. 劣化などについても「設計」通りにするためには今よりはるかに高度な技術を必要とするのであり, 現状ではほとんど人間はそれを制御できる能力を有していない. **偶発故障は今のところ人知を超えているのである.**

一方, 芸術作品の場合には,「設計」と「作品」の間には, 技術の場合以上の恣意性が存在する. それは, 設計通りに作品が出来ても人々を感動させることが難しいからである.

(3) そうやって芸術作品として出来上ったものをどのような観点から鑑賞すればよいのであろうか.

- 作品はまず類像性の視点から評価されるべきである. 構成要素とそれらの組合わせ, 配置, 要素同士のバランス, 寸法の比などのソフトについて鑑賞されなければならない. また材質などのハードは適したものになっているだろうか, 等々についても調べられなければならない.
- 次に指標性の視点から評価されなければならない. 作品は全体として均整がとれており, 美しいと感じられるであろうか. 陽にも陰にも生き生きとしているであろうか. 対象と見る人との間に心の通いがあるだろうか. つまり見るものと作品との間に心の相互作用があるかどうかが

大事なポイントと思われる．

- 最後に象徴性の視点から評価されなければならない．作品は見るものに「生きる希望」を与えてくれるだろうか,「部分から全体へ」のような意味での「生存の意味」を与えてくれるだろうか．あるいは時間と空間を超えた普遍性がそこには内包されているだろうか．

このように見方，考えを発展させていくと，時間の経過とともにいくらでもそれらが広く深くなっていく．それはそうするのが芸術性を高める上で好ましいのであるが，ポイントはそのような**感性の世界を類像性，指標性，象徴性の 3 つに区切る**ことが有用かどうかであろう．もちろん記号 (シニフィアン) と記号の意味するもの (シニフィエ) の間に恣意性があってこれの性質を極めることが本質的に重要であったように，3×3 のマトリックスをうめる言葉や表現は恣意的である．しかしながら，記号と記号の意味するものに関して，人間の認識の中に厳然と存在する「映覚聴象」に不定性がつきまとうように Table 1 の作り方にも表現方法に関して不定性が存在する．しかしながら，生物の「棲み分け」の能力や「部分から全体へ」至る能力がある限り，Table 1 の 3×3 の分割量化マトリックスには分析としての一般性があると云って良いと思う．

4　微分形式と意味

ここで唐突に微分形式が現われ，読者はびっくりされるであろうが，分割量化マトリックスの有効性を求めて，電磁気学のベクトル解析に有用な微分形式を「形式と意味」の視点から分析を試みてみようと思う．ここでは文献 [2] を参考にしている．

(1) 微積分の基本的考え方

微積分の初等的説明を今更する必要はないが，その基本的考えは非常に重要である．式で書くと，

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x) \tag{1}$$

$$\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a) \tag{2}$$

式 (1) は微積分の基本公式である．式 (2) はその別の表現であるが，1 次元の線分 $[a,x]$ 上での積分は 2 つの端点 $[a,x]$ における値 $F(x)$ と $F(a)$ の値で表わされている．線上での出来事は 2 つの端点での値で表現される．この視点が素朴であるが本質的にとても重要なのである．これを**「点から線へ」**と象徴的に表現することにする．このような考えを拡張して，**「線から面へ」**と**「面から体へ」**と拡張することにすると，それは一体どうなるのであろうか．面のことは線のことから予測できるのである．これらは微分形式の有意味な表現である．

ここで線，面，体というときそれらはそれぞれ線積分，面積分，体積分のことを云っている．結論から先に云えば，我々がよく知っているようにそれらは，それぞれ Green の定理または Stokes の定理，Gauss の発散定理と呼ばれており，次のように書ける．

$$\int_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial S}Pdx+Qdy \tag{3}$$

$$\int_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\int_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy \tag{4}$$

式 (3) では $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y)$ であるが式 (4) の場合には，P,Q,R は (x,y,z) の関数である．両式は微分形式の弁別的な表現 (差異的) であると考えたら良い．数式の展開には常に有意味な部分と弁別的な部分に大別されている．空間的な拡がりから云えばこれらは 1 次元，2 次元，3 次元となっている．比喩的にこれらは名詞，形容詞，動詞の世界にそれぞれ対応しているといえるかもしれない．先に述べた表層構造的な知的操作「移動，消去，置換，追加」の観点からすれば，式 (2)(3)(4) は追加という知的操作を施したと考えることができる．追加は，拡張や発展，創造を包含する言葉である．1 次元，2 次元，3 次元という展開は先に述べた**結合の軸**に沿って考えを進めていることにある．ではこれを選択の軸に沿って進めるとどうなるのであろうか．「点から線へ」,「線から面へ」,「面から体へ」のそれぞれに対応する選択の軸，**類像性 (icon)，指標性 (index)，象徴性 (symbol)** はどのように構築していったらよいのだろうか．これが次の課題である．

5　微分形式と線形写像

式 (2)(3)(4) を見てみると，右辺に着目して，考察の対象はそれぞれ $F(x), P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, $P(x,y,z)dy\wedge dz+Q(x,y,z)dz\wedge dx+R(x,y,z)dx\wedge dy$, である．これが Table 2 において分割量化マトリックスの類像性である．これらは独立した要素であり，微

分形式の可能性を示唆しているものと解釈される．ところが $F(x)$ と $Pdx+Qdy$ は関係があり，形式的に前者から後者が導出できることが期待される．同様に $Pdx+Qdy$ から $Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$ という形式が導出できることが好ましい．これらにはベクトル空間の性質が背景となっていることはいうまでもない．(文献 [2]) 今 dx や $dy\wedge dz$ などに着目しているのである．

このため，代数学では，**外微分**という操作を発明している．これはある空間から別の空間を導出する線形写像となっており，d という記号で表わされる．具体的に書くと，

$$df(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \tag{5}$$

ここで $F(x)\rightarrow f(x,y)$ とし，簡単のため次元は 2 次元 (x,y) としている．式 (5) は関数 $f(x,y)$ の全微分になっているのは云うまでもない．(5) 式はまた

$$df(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(dx,dy)=\nabla f\cdot \boldsymbol{dr} \tag{6}$$

ともかけて，ベクトル ∇f と $\boldsymbol{dr}=(dx,dy)$ の内積になっていることもよく知られている．それならば，$df(x,y)$ の線形写像あるいは外微分がどうなるかが次の関心である．スカラー関数 $f(x,y)$ を **0 次の微分形式**，全微分 $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ は**一次の微分形式**と呼ばれているが，それでは二次の微分形式とはいかなるものであろうか．今一次の微分形式を $f(x,y)$ で表示するのではなく一般性をもたせて $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ で表わすことにすれば，**二次の微分形式**は次のようになる．

$$d\{P(x,y)dx+Q(x,y)dy\}$$

$$=dP(x,y)\wedge dx+dQ(x,y)\wedge dy \tag{7}$$

$\wedge$ は通常 $dx\wedge dy$ などを意味し，**外積**と呼ばれるものである．この外積が次のような性質を与えられているのも我々がよく承知していることである．

$$\alpha dx\wedge dy=x\wedge\alpha dy=\alpha(dx\wedge dy)$$

$$dx\wedge(dy+dz)=dx\wedge dy+dx\wedge dz$$

$$dx\wedge dy=-dy\wedge dx$$

$$dx\wedge dx=0 \tag{8}$$

ここで $dP(x,y)=\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy$ と書けることを利用し，(8) の関係を適用すれば，

$$\begin{aligned}d\left(Pdx+Qdy\right)&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx\\&+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy\\&=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy\end{aligned} \tag{9}$$

これが具体的な二次の微分形式である．

ここで微分形式の積分を

$$\int_S P(x,y)dx\wedge dy=\int_S P(x,y)dxdy \tag{10}$$

で定義すれば，式 (9) を積分すれば

$$\int_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C Pdx+Qdy \tag{11}$$

となり，Green の公式が形式的に導出できたことになる．

三次の微分形式は面と体に関係するから二次の微分形式の線形写像となるから，d を作用させて

$$\begin{aligned}&d\left(Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy\right)\\&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz\\&\quad+dQdz\wedge dx+dRdx\wedge dy\\&=\frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx+\frac{\partial R}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy\\&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz\end{aligned} \tag{12}$$

ここで式 (10) と同様に積分を

$$\int_V Pdx\wedge dy\wedge dz=\int_V Pdxdydz \tag{13}$$

と定義すれば，式 (12) は次のように Gauss の発散定理を与える．

$$\begin{aligned}&\int_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\\&=\int_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\end{aligned} \tag{14}$$

以上の式変形で d という作用素を作用させることを外微分形式と云っている．

そしてこれは ω を二次の微分形式と理解すれば，

$$\int_V d\omega=\oint_S\omega \tag{15}$$

と表わせる．Green の公式はωを一次の微分形式と理解して

$$\int_S d\omega = \oint_C \omega \tag{16}$$

と表わせる．式 (15) と (16) では形式は同じでも積分領域が異なっている．Vは体積領域，Sは面積領域，Cは閉曲線である．

ここでの解説は Table 2 で云えば，指標性を説明したことになっている．これらが実現性の展開度に関係していることは理解して頂けるであろうか．以上の表現では Green の公式や発散定理がデカルト座標系で与えられていてこれだけでも十分に役に立っているのは我々がよく承知していることである．しかしこれだけでは分割量化マトリックスは完成しない．更に普遍性を求めていかなければならない．それは座標変換によって外微分がどのように変換されるかを見てみなければならない．物理的特性を普遍的に理解するためには，現象が座標変換によってどのように変化するかを見ることが必要である．テンソルはそのためにあるとしてよいくらいである．微分形式が座標変換で不変なように構築されていることは次にみることになる．

6　外微分の不変性

x-y座標系にあるベクトルは dx と dyをそれぞれ x 軸と y軸上の基底 (単位ベクトルではない) と考えれば $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$と表わすことが出来る．これを (u,v) 座標系で表わせば，$P(u,v)du+Q(u,v)dv$ のように表わせることが予想される．(P,Q) と云うベクトルとは異なった座標系で見ても同じ形式で表わせそうだということは推測できる．それを簡単に示す．

x-y座標系と u-v座標系の座標変換は

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y) \tag{17}$$

または，

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v) \tag{18}$$

で表わせる．関数については

$$P(x,y)=\bar{P}(u(x,y),v(x,y))$$

$$Q(x,y)=\bar{Q}(u(x,y),v(x,y)) \tag{19}$$

のように計算できる．du, dvと dx, dyの関係は次のようになる．

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy \tag{20}$$

これは基底の変換ととれる．そうすると関数の全微分を考えて

$$dP(x,y)=\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy$$

$$=\left(\frac{\partial\bar{P}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\bar{P}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial\bar{P}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\bar{P}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

$$\frac{\partial\bar{P}}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial\bar{P}}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$$=\frac{\partial\bar{P}}{\partial u}du+\frac{\partial\bar{P}}{\partial v}dv=d\bar{P}(u,v) \tag{21}$$

これはあるベクトル$\boldsymbol{A}$は xy座標系と uv座標系の基底 $\{dx,dy\}$, $\{du,dv\}$を用いて

$$Pdx+Qdy=\bar{P}du+\bar{Q}dv \tag{22}$$

と表わせることを意味している．式 (20) を式 (22) の右辺に代入して

$$\begin{aligned}P(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}\bar{P}(u,v)+\frac{\partial v}{\partial x}\bar{Q}(u,v)\\ Q(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial y}\bar{P}(u,v)+\frac{\partial v}{\partial y}\bar{Q}(u,v)\end{aligned} \tag{23}$$

が得られる．

また du, dvは関数 $u(x,y), v(x,y)$ の外微分と考えてよい．従って

$$\begin{aligned}d(du) &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right\}\wedge dx\\ &+ \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right\}\wedge dy\\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)dx\wedge dy=0\end{aligned} \tag{24}$$

同様に　$d(dv)=0$

式 (22) の外微分をとって二次の微分形式を作れば，右辺を x, yのみの関数と考えて

$$dP\wedge dx+dQ\wedge dy=d(\bar{P}du)+d(\bar{Q}dv)$$

$$=d\bar{P}\wedge du+\bar{P}d(du)+d\bar{Q}\wedge dv+\bar{Q}d(dv)$$

$$=d\bar{P}\wedge du+d\bar{Q}\wedge dv \tag{25}$$

Table 2: 微分形式の分割量化マトリックス

	一次性 (点から線へ) (0 次の微分形式)	二次性 (線から面へ) (1 次の微分形式)	三次性 (面から体へ) (2 次の微分形式)
類像性 (定義のレベル) (可能性)	スカラー関数：$f(x)$	$\omega(w,y) =$ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$	$\omega(x,y) =$ $Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$
指標性 (定理のレベル) (実現性)	全微分： $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ 積分公式： $\int_a^x g(x)dx = G(x) - G(a)$	二次の微分形式： $d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy$ $= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$ Green の公式： $\int_S d\omega = \oint_C \omega$	三次の微分形式： $d\omega = dPdy \wedge dz + dQdz \wedge dx + dRdx \wedge dy$ $= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$ 発散定理： $\int_D d\omega = \oint_S \omega$
象徴性 (統合のレベル) (必然性)		$\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) dudv$ $= \oint_Q Qdu + Qdv$	$\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{R}{\partial w}\right) dudvdw$ $= \int_S Pdvdw + Qdwdu + Rdudv$

従って二次の微分形式は式 (25) より座標変換により変わらないことが証明できた．具体的に書き直すと，

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial v}\right) du \wedge dv \tag{26}$$

このことから Green の公式は座標変換によらず同じ形式，式 (16) で表現出来ることがわかる．

Gauss の発散公式についても同じで座標変換によらないことが示せる．文献 [2] を参考にすればよい．その結果は Table 2 の象徴性に簡単に示されている．

7 微分形式の引き戻し

ここに一つの重要な関心事がある．Green の公式の積分領域 D は平面であった．これが曲面であったらこの公式はどのような形になるのであろうか．これの詳しい説明は文献 [2] に譲ることにしてここでは本質的に重要な結果のみ紹介することにしたい．

平面上 (x-y座標) の領域 D を三次元内の曲面 $\bar{D}$ に変換する関係式は，

$$u = u(x,y),\ v = v(x,y),\ w = w(x,y) \tag{27}$$

である．曲面上 ($\bar{D}$) で，Green の公式は

$$\int_{\bar{D}} \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) dudv + \left(\frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial w}\right) dvdw + \left(\frac{\partial P}{\partial w} - \frac{\partial R}{\partial u}\right) dwdu \right\} = \oint_{\bar{C}} Pdu + Qdv + Rdw \tag{28}$$

左辺の被積分項は次のように書ける．ω を一次の微分形式として

$$d\omega = d(Pdu + Qdv + Rdw)$$

従って式 (28) は簡単に

$$\int_{\bar{D}} d\omega = \oint_{\bar{C}} \omega \tag{29}$$

すなわち任意の曲面上で Green の公式と同じ形式が成立する．これは Stokes の定理と呼ばれるものである．これを証明する方法として，直接的な普通の方法では非常に複雑になると云われている．A が成立すると B が成立する，ことを証明する時には，通常知らず知らずのうちに人は補助線的な思考を実行しているが，ここでもそれが必要である．**補助線的思考**を C とすれば，A だと C が成立し従って B が成立することになる．いわゆる三段論法である．この場合，以下に説明する**「微分形式の引き戻し」**がそれに相当していることが判る．

記号 ϕ^* を次のように定義する．

$$(\phi^* f)(x,y) = f(u(x,y),\ v(x,y),\ w(x,y)) \tag{30}$$

引き戻し，ϕ^* は u-v座標系で成立していたものを x-y 座標系に引き戻すことを意味している．例えば，

$$\phi^*(df) = d(\phi^* f) \tag{31}$$

は，u-v座標系での一次の微分形式 df は x-y座標系では $\phi^*(df)$ となることを意味している．$d(\phi^* f)$ は，u-v

座標系での関数 $f(u,v)$ は x-y座標系では$\phi^* f(x,y)$ となり，$d(\phi^* f)$ はそれの x-y座標系における一次の微分形式であることを表わしている．

二次の微分形式の引き戻しは，$\eta = P(u,v,w)du \wedge dv$に対して，

$$\phi^*\eta = \phi^* P \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$$= \phi^* P \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \wedge dy \qquad (32)$$

と定義される．ここで$\phi^* P(u,v,w) = P(u(x,y,z),\cdots)$ である．

ωを 0 次，1 次の微分形式としたとき，ωに対して

$$\phi^*(d\omega) = d(\phi^*\omega) \qquad (33)$$

が成立することが証明できる．

さらに，変換式 (27) によって Dは$\bar{D}$に，周辺∂Dは$\partial\bar{D}$に写像されるとして

$$\int_{\bar{D}} d\omega = \int_D \phi^*(d\omega) \qquad (34)$$

$$\int_{\partial\bar{D}} \omega = \int_{\partial D} \phi^*\omega \qquad (35)$$

が証明できる．

これらの結果を使えば，曲面上の積分に関する **Stokes の定理** [式 (28)] が一般に証明できることになる．

以上の説明だけでは数学的証明が紙面の関係で充分に述べられていないので，はっきりとは納得がいかないと思うが詳細は文献 [2] に譲るとして，ここで主張したいことは，これで Table 2 が完結することである．何故完結するとするのかは，以下の説明による．

1. 同マトリックスを横に見て，類像性から，総合判断を経てすなわち定理の数学的証明を経て指標性が導かれている．自然の法則に基づいている．
2. 指標性から象徴性に至るプロセスは，座標変換による表現の違いに起因するが一般化が行われているので，これは分析判断といえよう．
3. 平面上の Green の公式より，任意の曲面に対して成立する Stokes の定理の方が普遍性が高いのでこれらは象徴性の所に分類される．

これらによって微分形式に関する主要部は 3 × 3 分割量化マトリックスとして自然に分類されることになる．

8 まとめ

ところで，本稿では数学のある分野を説明することを目的としてはいない．何度も云うように，数式で表現された意味のかたまりを 3 × 3 の分割量化マトリックスに分類できるかどうかを検証しようとしているのである．

Table 2 をじっと眺めていると，いくつかの重要な点が明らかになってくる．それを以下に整理してみよう．

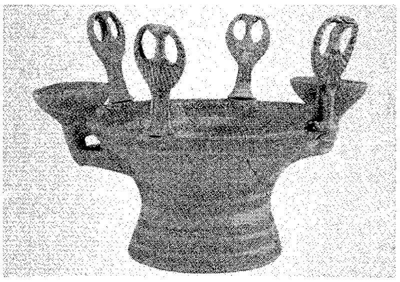
1. 微分形式は，線上のことは 2 つの端点の情報から予測できること，面上のことはそれを囲む閉曲線の情報から予測できること，三次元の全域内のことは表面の情報から予測できることと基本的に関係している．
2. そして得られた微分形式は，座標系に依存しないことが示されている．むしろ座標系に依存しないような形式を求めるとそれが微分形式であった，ということが出来る．
3. 点から線へ，線から面へ，面から体へという発展は部分から全体へという人間の認識の**「拡張性の法則」**と深く結びついている．ここで拡張性の法則が適用できるのは関数の微分と積分の関係に基づく．従って，この事に教訓を得て，これを他に適用したらと思うが，そうするには関数の微分と積分に相当するような関係を発明して応用しなければならない．才能豊かな若い研究者に是非こういうことを考えてもらいたいものである．
4. Table 1 と 2 を見比べてみると，本質的な違いがあることに気がつく．それは Table 1 は 設計－製作－鑑賞 の形式をとりながら創造の 1 形式となっていることである．自由な創造の源は設計にあるが，このマトリックスはどのように設計するのがよいかの情報は与えていない．その踏むべきプロセス (類像性－指標性－象徴性) を云っているだけである．優れた設計をするのによい方法があるのだろうか．今これに答えることはできない．要するにこのような形式は人工的に創造されるものに適用できるのであって Table 2 にあるような自然的なものの形式とは異なっている．自然的なものの本質は発展的な形式をとることが次第にはっきりしてきたと云える．

5. Table 1 には，少年騎手や競走馬のことなどどこにも出ていない．Table 1 はそれを創造することを考えながら作成されたにも拘わらずである．A(2,3) のマス目に「生き生きしている」という表現がある．これは勿論 Table 2 には見られないし，入る余地もない．従って Table 1 に普遍性があるとすれば，A(2,3) に書かれているキーワードなどから抽象されるものが普遍性を持たなければなるまい．キーワードは作成者によって変化してもよいが，抽象されるものあるいは表象されるものがひとによって異なってはなるまい．
6. Table 1 と 2 から云えることは，芸術作品も数学のある広さをもた意味のかたまりは，無理なく 3×3 のマトリックスに分割できそうであることである．

当初，本稿では非定常電磁気と相対論的電磁気について分割量マトリックスを示してみるつもりであったが，アテネでの体験もあったのでこのような話題になってしまった．

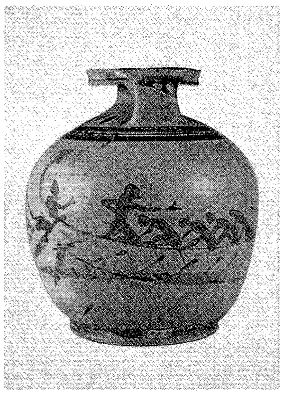
参考文献

[1] 今西錦司：生物の世界，講談社文庫 (1972)
[2] 志賀浩二：ベクトル解析 30 講，朝倉書店 (1991)



(A) 12th c. B.C.

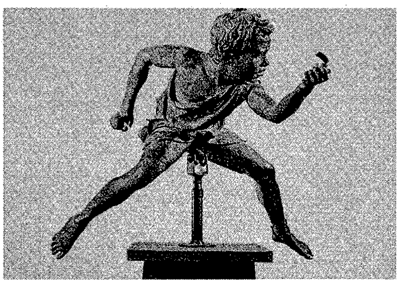
(B) 625-600 B.C.



(C) 575-550 B.C.

(D) about 330 B.C.

写真 1: 壷の変化



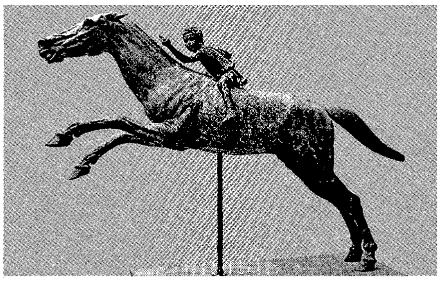


写真 2: 少年騎手と競走馬