

特集	超電導体の電磁現象
----	-----------

第 II 種超電導体の磁束量子動力学

出町 和之

(東京大学)

宮 健三

(東京大学)

1 はじめに

近年、超電導体の応用化のための研究が様々な分野で行われている。第 II 種超電導体における混合状態の巨視的構成則としては臨界状態モデルやフラックスフロー・クリープモデルなど、いくつかの物理モデルがあり、通常これらのモデルは巨視的な電場と電流密度との構成関係で表される [1]-[3]。このような巨視的モデルは第 II 種超電導体中における遮蔽電流分布の数値解析に適用され、大きな成果を挙げている。しかし、超電導体の異方性のような非線形電磁現象を記述するためには巨視的モデルのみではもはや不十分であり、中間視的な視点から見た磁束量子挙動の解析が不可欠である。

混合状態にある第 II 種超電導体中では、磁場は磁束量子の形で存在している。第 II 種超電導体における巨視的電磁現象は、磁束量子挙動に起因した中間視的な電磁現象の巨視的平均に他ならない。磁束量子の分布と運動は、超電導体中の不純物や他の磁束量子などとの相互作用によって決定される。これらの多数の磁束量子の複雑な挙動を直接模擬することは、従来は非常に大きな計算時間と計算メモリ容量を必要とするため不可能であったが、最近のコンピュータ性能の向上により、これらが実行可能となった。

ここで紹介する磁束量子動力学 (FD : Fluxoid Dynamics) 法は、Ginzburg-Landau 理論 [4] を組み込んだ分子動力学法に基いた磁束量子挙動シミュレーション手法である。これは、3次元 FD 法 [5] や高温超電導体用 FD 法 [6] に先立ち、筆者らがプロトタイプとして 2次元体系において開発したものである。ここではまた、その理論の概要と NbTi を対象とした数値解析結果について述べる。また理論に関しては文献 [7] にも詳解されているので参照されたい。

2 2次元磁束量子動力学法の開発

2.1 磁束の量子化

Fig.1 のように、常電導状態にある第 II 種超電導体を臨界温度 T_c 以下に冷却し超電導状態にすると、超電導体に侵入していた磁場は量子化されて磁束量子となる。この「量子」という命名の由来は

- これ以上小さい単位に分けられない
- 各々の磁束量子を区別できない

ということから来ている。磁束量子はそのまわりを流れる渦状の電流 (このため磁束渦糸とも呼ばれる) によって形成されており、その磁束の大きさは $\Phi_0 = h/2e$ (h :プランク定数, e :素電荷) と一定である。

第 II 種超電導体中に存在する電流は、超電導体の結晶表面を流れるマイスナー電流、結晶粒界を流れるジョセフソン電流、および結晶を流れる磁束量子を形成する電流、の 3 つのみである。このうち 3 番目の電流による寄与が大きく、ほとんどの超電導電磁現象は磁束量子の分布・運動より決定される (Fig.2)。

この背景に基づき、複雑で困難とされているマクロスコピック (巨視的) な非線形超電導電磁現象 (臨界電流密度, 不可逆磁場, 磁束融解) の予測・評価を、メゾスコピック (中間視的) なスケールにおいて第 1 原理に基づく単純なモデルを用いた個々の磁束量子挙動シミュレーションによって可能とすることが本手法の目的である。

2.2 磁束量子が受ける 5 種類の力

第 II 種超電導体中で磁束量子は Fig.3 に示した 5 種類の力を受ける。

- 1) F_p : 格子欠陥や不純物などによるピンング力 (ポテンシャル力)。これら格子欠陥や不純物はピンングセンタと呼ばれ、磁束量子に対して引力として働く。

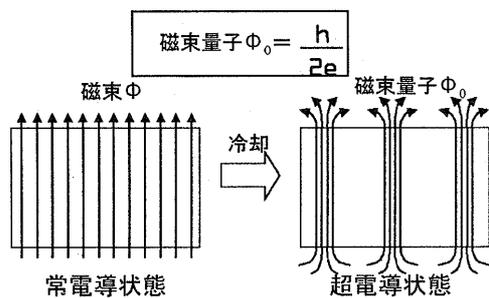


Fig. 1: 磁束の量子化

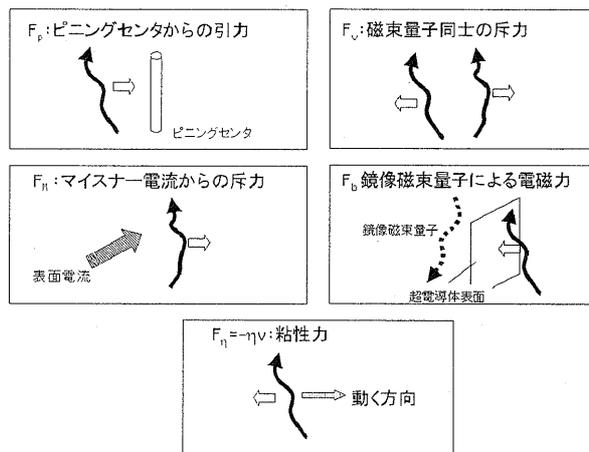


Fig. 3: 磁束量子に働く 5 種類の力

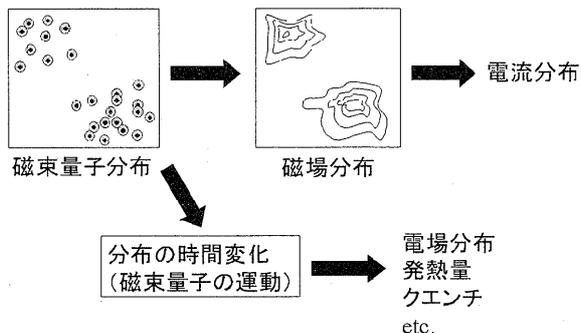


Fig. 2: 磁束量子挙動から求まる巨視的超電導電磁現象

- 2) F_v : 磁束量子同士の電磁力. 2つの磁束量子が同方向を向く場合は斥力, 逆方向の場合は引力となる.
- 3) F_M : マイスナー磁場による電磁力.
- 4) F_s : 超電導体 (結晶) 表面における鏡像磁束量子による電磁力. 表面への引力として作用する.
- 5) F_η : 磁束量子中の常電導核のジュール損失に基づく粘性力. 磁束量子が動くとき, その逆方向に速度に比例する抵抗力として作用する.

これらの 5 種類の力の導出については参考文献 [8]-[12] を参照されたい.

2.3 磁束量子の運動方程式

磁束量子力学では, これらの 5 種類の力を受ける個々の磁束量子の運動を, 第 1 原理に基づく次の運動方程式によって記述する [8]-[9].

$$\eta \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \sum_j \mathbf{F}_p(\mathbf{r}_{ij}^p) + \sum_k \mathbf{F}_v(\mathbf{r}_{ik}) + \mathbf{F}_M(\mathbf{r}_i) + \mathbf{F}_s(\mathbf{r}_i) \quad (i = 1, N) \quad (1)$$

ここで η は磁束量子の粘性係数であり, $\eta \partial \mathbf{r}_i / \partial t$ が粘性力の逆符号 $-\mathbf{F}_\eta$ に相当している. また \mathbf{r}_i は i 番目磁束量子の位置ベクトルであり $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$. \mathbf{r}_j^p を j 番目ピンニングセンタの中心の位置とすると, $\mathbf{r}_{ij}^p = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j^p$ となる. なお磁束量子の質量は十分に小さいとして慣性項は無視している.

(1) 式右辺の 4 種類の力を, 現在のタイムステップにおける磁束量子分布から計算し代入することにより, 各磁束量子の速度 $\partial \mathbf{r}_i / \partial t$ および次のステップにおける磁束量子分布を計算する.

2.4 セル化による CPU 時間の短縮

2.2 節で紹介したピンニング力 \mathbf{F}_p はその有効距離が数 nm と非常に短く, (1式)の計算には磁束量子からごく近傍の距離にあるピンニングセンタのみを考慮に入れればよい. 一方, 磁束量子同士の電磁力 \mathbf{F}_v の有効距離は μm と非常に長く, 1つの磁束量子に対して多数の磁束量子との相互作用を考慮しなければならない

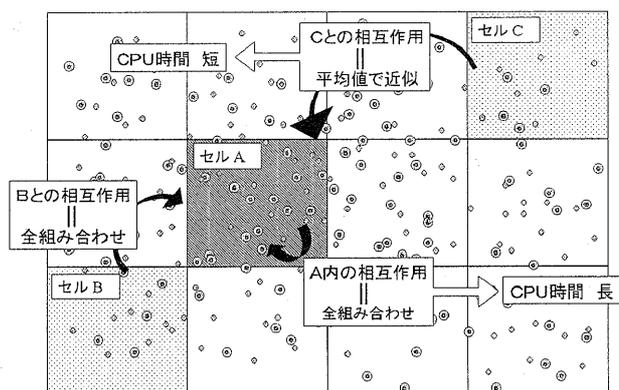


Fig. 4: セル化手法の導入による CPU 時間の短縮化

い。このため、通常は F_v の計算には非常に多くの演算回数と CPU 時間を必要とする。

ここでは CPU 時間の短縮のために採用したセル化モデルについて説明する。まず、超電導体中の解析領域を、Fig.4 に示すような多数のセルに分割する。1 つのセルの辺の長さは F_v の有効距離の 1/3 程度とする。次に、同一セル内の磁束量子および隣接するセル内の磁束量子による F_v に関しては、誤差を除くためにすべての磁束量子の組み合わせを逐一計算する。一方、有効距離以内でそれ以外のセル内の磁束量子に関しては誤差の影響が小さいと考えられるため、セル内の磁束量子の重心位置にその全個数が存在していると近似して相互作用力を計算している。これにより CPU 時間を数十分の 1 に短縮することができる。

2.5 磁束量子の生成・消滅

超電導体表面では、外部磁場の変化に伴い磁束量子の侵入・排出が起きている (Fig.5)。磁束量子動力学法では、(1) 式を解いて求められる運動により超電導体表面から外に出た磁束量子を排出された磁束量子とみなしており、また外部磁場 H_{ex} に対応した単位長さあたり

$$n_v = \sqrt{\frac{\sqrt{3}\mu_0|H_{ex}|}{2\Phi_0}} \quad (2)$$

個の磁束量子を超電導体の表面上に均等間隔に置くことにより、磁束量子の侵入を模擬している。また磁場の向きは $+z$ 方向を正とし、 $H_{ex} > 0$ の場合には n_v 個の新しい磁束量子の向きを $+z$ 方向、 $H_{ex} < 0$ の場合はの $-z$ 方向としている。

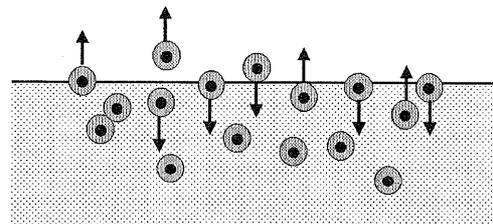


Fig. 5: 超電導体表面における磁束量子の侵入と排出

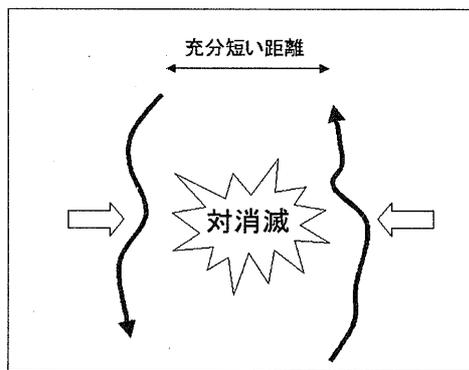


Fig. 6: 超電導体内部における磁束量子の対消滅

一方、超電導体中では、互いに逆向ききの 2 つの磁束量子が充分近い距離まで接近すると対消滅を起こすと考えられる (Fig.6)。本手法では、2 つの磁束量子の中心間距離が常電導核の半径であるコヒーレンス長 ξ 以下まで近付いた場合にその 2 つの磁束量子を消去することで磁束量子の対消滅を模擬している。

2.6 巨視的磁場と電流密度の計算

ここでは磁束量子とそのまわりの電流は磁束量子の中心に対する軸対称性を有するものと近似している。1 つの磁束量子の作る磁場の大きさとそのまわりを流れる電流は、London 方程式より

$$B(r) = \frac{\gamma\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) e_z \quad (3)$$

のように求まる [5]。ここで K_0 は第 2 種変形ベッセル関数 ($n=0$)、 r は磁束量子中心からの距離、 λ はロンドンの磁場侵入深さである。また γ は磁束量子の向きが $+z$ 方向の場合に 1、 $-z$ 方向の場合に -1 となる関数である。

任意の位置における磁場と電流密度は多数の磁束量子による磁場と電流密度のそれぞれの重ね合わせによって求めることができる。超電導体表面近傍においては、さらにマイスナー磁場・マイスナー電流を重ね合わせることで磁場と電流密度が求まる。

3 NbTi 表面近傍の数値計算結果

次に、磁束量子動力学法を用いたシミュレーション結果について紹介する。ここでは第 II 種超電導体として低温超電導体である NbTi のバルク体を用いている。NbTi の臨界温度は $T_c \approx 9$ (K) と低いために液体ヘリウム (4.2 K) により冷却を行っており、磁束量子の熱振動は充分小さいと仮定して考慮に入れない。

3.1 NbTi バルクの数値計算モデル

Fig.7 は NbTi バルクの表面近傍を模擬した数値計算モデルである。解析領域は Cell 1 (□ $abcd$, $L_x=0.333 \mu\text{m}$, $L_y=10.4 \mu\text{m}$) である。境界条件としては、 x 方向に周期境界条件を適用している。すなわち、境界 \overline{ab} から Cell 1 に侵入する磁束量子は境界 \overline{cd} から Cell 1 の外に出る磁束量子に等しく、また境界 \overline{cd} から侵入する磁束量子は境界 \overline{ab} から外に出る磁束量子に等しいとしている。

ピンニングセンタは α -Ti 相とした。通常、NbTi は圧延加工をするため、内部の α -Ti 相も圧延され一方方向に配向したリボン形状で分布している。ここでは簡単のため、定サイズのリボン状 α -Ti 相を正三角格子に配置し、その大きさを $L_{px}=41.6 \text{ nm}$, $L_{py}=10.4 \text{ nm}$, 間隔を $d_{px}=124.8 \text{ nm}$, $d_{py}=10.4 \text{ nm}$ とした。

3.2 磁束量子分布の時間変化

外部磁場 B_{ex} を Fig.8 のように $t < 0$ で $B_{ex}=0 \text{ T}$, $t > 0$ で $B_{ex}=0.96 \sin(t/t_0) \text{ T}$ ($t_0=60 \text{ nsec}$) のように時間変化させた場合の磁束量子挙動のシミュレーション結果を Fig.9 に示す。但し、 $t < 0$ で超電導体中の磁束量子の数をゼロとし、また時間刻み幅 Δt は磁束量子が 1 回のステップでピン止めセンタを飛び越さない程度の十分に小さい値としている。ここでは $\Delta t=5.0 \text{ psec}$ を用いた。Fig.9(a) ~ (d) はそれぞれ $t=15, 30, 45, 60 \text{ nsec}$ における磁束量子分布の数値

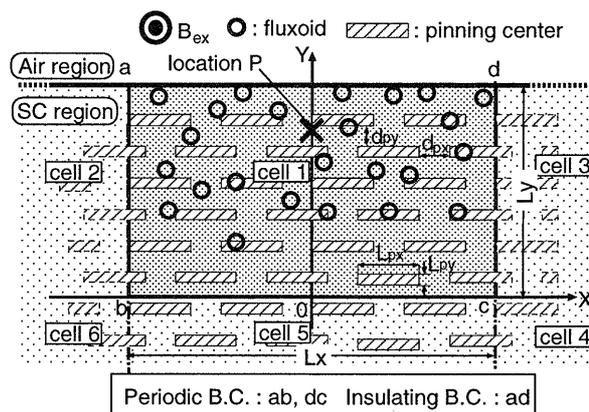


Fig. 7: NbTi バルクの計算モデル図

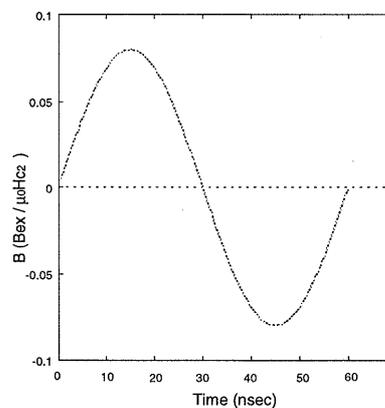


Fig. 8: 超電導体内部における磁束量子の対消滅

計算結果であり、図中の \diamond と \square はそれぞれ $+z$, $-z$ 方向の磁束量子を表す。

Fig.9(a) 左図より、 $t=15 \text{ nsec}$ のときに磁束量子は表面から $y \approx 6.5 \mu\text{m}$ 付近まで NbTi 内部に侵入しており、また侵入した磁束量子の数は表面でもっとも多く、内部にいくほど減少していることが分かる。Fig.9(a) の右図は左図の一部を拡大したものであり、長方形はリボン状のピンニングセンタを表す。ほとんどの磁束量子はピンニングセンタに捕獲されており、磁束量子がピンニングセンタによる捕獲と離脱を繰り返しながら NbTi 中にいた磁束量子は元の位置に留まっている。

$t=30 \text{ nsec}$ のとき印加磁場は $B_{ex}=0 \text{ T}$ となり、Fig.9 (b) に示すように $t=15 \text{ nsec}$ で $y \geq 8.4 \mu\text{m}$ にいた磁束量子は NbTi の外部に排出されている一方、

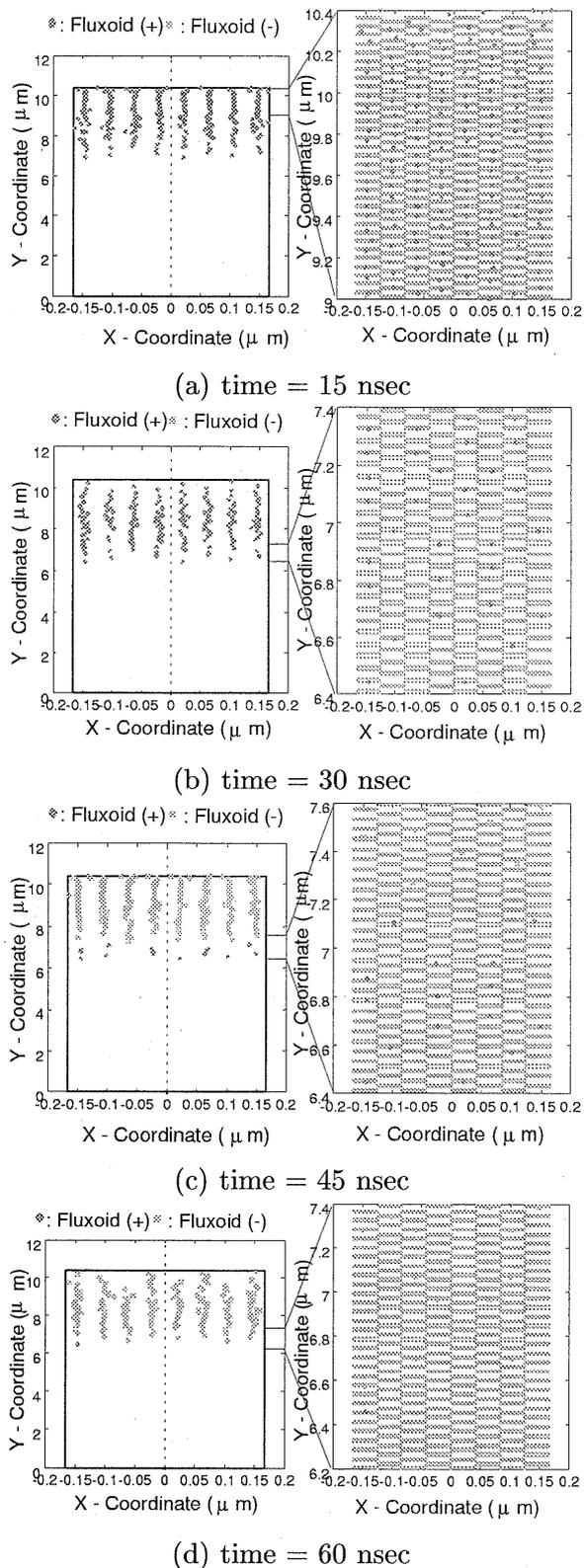


Fig. 9: 外部磁場を時間変化させたときの超電導体中における磁束量子分布の変化

$6.5 \mu\text{m} \leq y \leq 8.4 \mu\text{m}$ にいた磁束量子は元の位置に留まっている。また $t=45, 60$ nsec のとき印加磁場は $B_{ex} \leq 0$ T であり, Fig.9(c),(d) に示されたように $-z$ 方向の磁束量子が侵入しているのが分かる。

3.3 臨界状態モデルとの比較

この磁束量子分布の計算結果をもとに, y 軸上における磁束密度 B と遮蔽電流密度 J_s の分布の時間変化を表したものが Fig.10 の上段である。外部磁場 B_{ex} が極大となる $t=15$ nsec と $t=45$ nsec では, B の分布は表面から直線状に変化しており, また J_s もそれぞれ $\pm 2 \times 10^{11}$ A/m² とほぼ一定値となっている。一方 $B_{ex}=0$ T となる $t=30$ nsec と $t=60$ nsec では $y=8.4 \mu\text{m}$ で B はピークとなり, J_s に関しては絶対値はほぼ 2×10^{11} A/m² であるが $y=8.4 \mu\text{m}$ を境に符号が逆転している。これは, Fig.10 の下段に示した, 同じ条件下における B, J_s 分布の変化の, 代表的な臨界状態モデルの 1 つである Bean モデルに基づく模式図と良く一致している [13]。このことより, 求められた電流密度 J_s が臨界電流密度 J_c に等しいと考えることができる。

3.4 臨界電流 J_c -磁場 B 関係の数値計算結果

次にこの計算モデルを用い, Fig.11 のように直線的に増加する外部磁場を印加した場合の, 磁束量子挙動のシミュレーションを行った。Fig.12 の多数の点は, Fig.7 中の点 P における磁束密度 B の数値計算結果を横軸に, 臨界電流密度 J_c を縦軸にプロットしたものである。また他の 3 本の線はこの計算結果を Kim モデル [14], Yasukochi モデル [15], および指数関数によってフィッティングしたものである。

J_c の値は低磁場領域では B の増加とともに急峻に低下し, 高磁場領域では B の増加とともに緩やかに減少している。これは実験的に得られている J_c - B 関係と一致している。またこれは, 本手法の巨視的超電導電磁現象の予測手法としての可能性を示唆している。

4 おわりに

- 2次元体系における磁束量子動力学 (FD) 法を Ginzburg-Landau 理論と組み合わせた分子動力学法に基づいた開発を行い, またその計算コードを作成した。

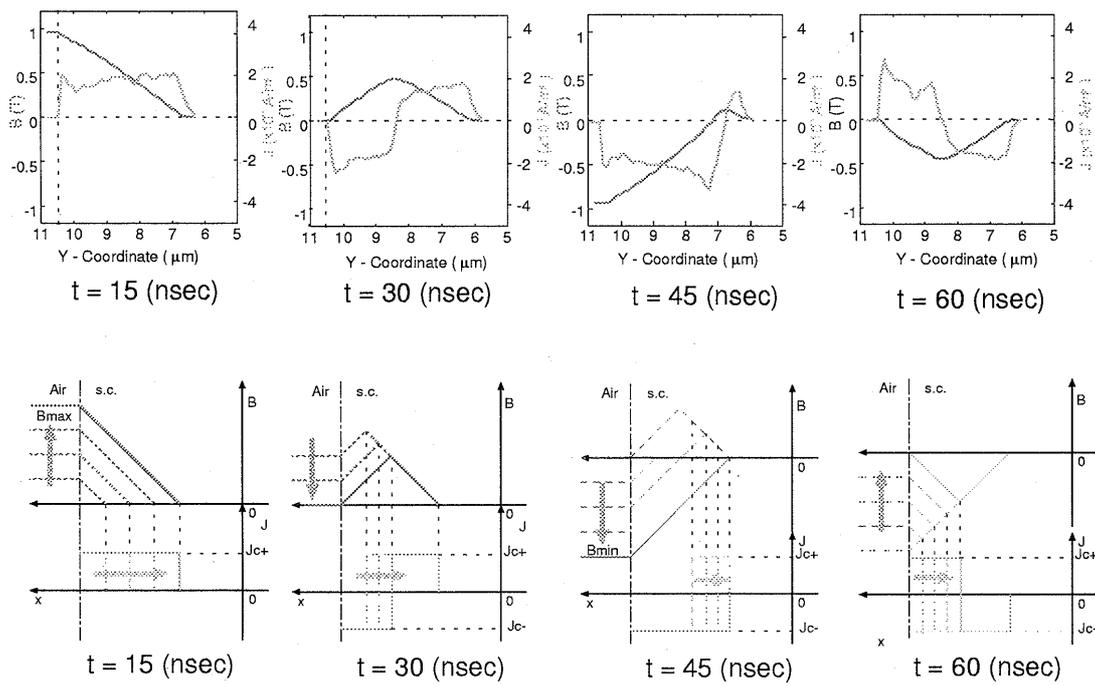


Fig. 10: 巨視的磁場・電流分布の計算結果と BEAN モデルとの比較

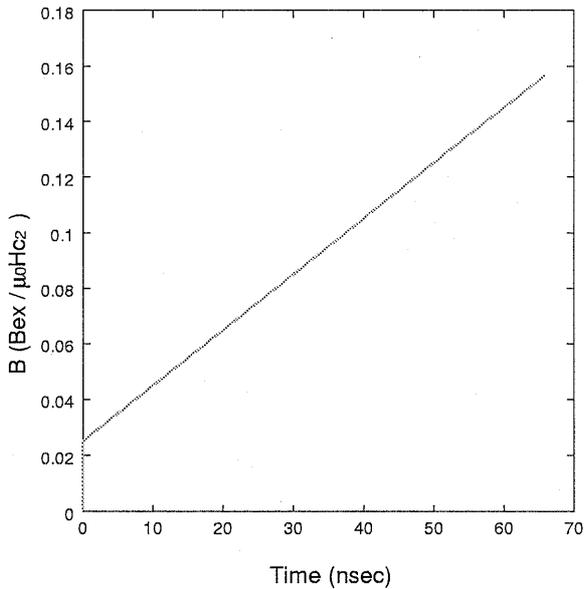


Fig. 11: 直線的に時間変化する外部磁場

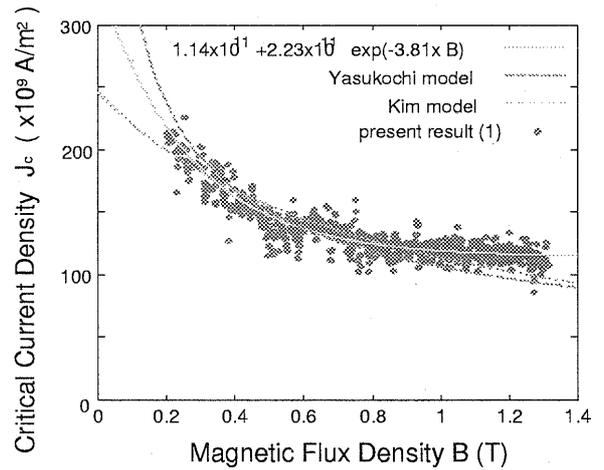


Fig. 12: 外部磁場-臨界電流密度の関数の計算結果とフィッティングカーブ

- 2次元 FD 法を用いて第 2 種超電導体である NbTi バルクの表面付近における磁束量子挙動のシミュレーションを行った。この結果、臨界状態モデルと一致する磁場と遮蔽電流分布を再現することが出来た。
- さらに J_c - B 関係の数値計算結果が実験的に得られる関係と定性的な一致を示したことから、本手法の巨視的超電導電磁現象の予測手法としての妥当性が示された。

参考文献

- [1] T. Sugiura, H. Hashizume and K. Miya, "Numerical Electromagnetic Field Analysis of Type-II Superconductors", *Int. J. Appl. Electromagn. Mater.*, Vol.2 (1991), pp.183-196.
- [2] H. Hashizume, T. Sugiura, K. Miya and S. Toda, "Numerical Analysis of Electromagnetic Phenomena in Superconductors", *IEEE Trans. Magn.*, Vol.28 (1992), pp.1332-1335.
- [3] N. Takeda, M. Uesaka and K. Miya, "Influence of an applied magnetic field on shielding current paths in a high T_c superconductor", *Cryogenics*, Vol.35 (1995), pp.893-899.
- [4] V.L. Ginzburg, "Some Remarks on Phase Transitions of the Second Kind and the Microscopic theory of Ferroelectric Materials", *Soviet Phys. Solid State*, Vol.2 (1961), pp.1824-1834.
- [5] K. Demachi and K. Miya, "Development of 3-dimensional simulation code for fluxoid dynamics of type II superconductor, Superconductor Based on the Fluxoid Dynamics Method Combined with the Ginzburg-Landau Theory", *IEEE Trans. Magn.*, Vol.34, No.5 (1998), pp.3218-3221.
- [6] K. Takase, K. Demachi and K. Miya, "Numerical Simulation of Fluxoid Dynamics in Low T_c and High T_c Superconductors", *Cryogenics*, Vol.38 (1998), pp.197-203.
- [7] 宮 健三, 吉田義勝 編著: 超電導の数理と応用, 養賢堂, (1997).
- [8] H. Hashizume, T. Sugiura, K. Miya and S. Toda, "Numerical Analysis of Electromagnetic Phenomena in Superconductors", *IEEE Trans. Magn.*, Vol.28 (1992), pp.1332-1335.
- [9] H. Hashizume, S. Toda, T. Kurusu and K. Maeda, "Numerical Simulation of Fluxoid Dynamics by MD Method", *Proc. of 4-th Jap.-Pol. Joint. Semi.*, (1995), pp.176-179.
- [10] C.P. Bean and J.D. Livingston, "Surface Barrier in Type-II Superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, Vol.12 (1964), pp.14-16.
- [11] K. Demachi, Y. Yoshida, H. Asakura and K. Miya, "Numerical analysis of magnetization processes in type II superconductors based on Ginzburg-Landau theory", *IEEE Trans. Magn.*, Vol.32, No.3 (1996), pp.1156-1159.
- [12] K. Demachi, H. Asakura, Y. Yoshida, K. Miya, "Numerical analysis of type II superconductor based on Ginzburg-Landau theory", *Proc. 3rd Japanese-Czech-Slovak Joint Semin. Appl. Electromagn.*, (1995), pp.77-82.
- [13] C.P. Bean, "Magnetization of High-Field Superconductors", *Rev. Modern Phys.*, Vol.36 (Jan. 1964), pp.31-39.
- [14] Y.B. Kim, C.F. Hempstead and A.R. Strand, "Flux-Flow Resistance in Type-II Superconductors", *Phys. Rev.*, Vol.139 (1965), pp.A1163-A1172.
- [15] K. Yasukochi, T. Ogasawara and N. Usui, "Magnetic Behavior and Effect of Transport Current on I_t in Superconducting Nb-Zr Wire", *J. Phys. Soc. Jap.*, Vol.19 (1964), pp.1649-1661.