

書評

Computational Electromagnetism : Variational Formulations,
Complementarity, Edge Elements

By Alain Bossavit, Academic Press, 1998

菊地 文雄 (東京大学)

本書は、電磁場の様々な問題について、モデル化と有限要素法向きの変分法的定式化を与え、さらに具体的な有限要素の選び方についても詳しく述べた学術書である。なかでも著者の Bossavit 氏が得意とする辺要素や電磁場問題の数学的性質についての記述は、論文を除けば具体的に触れたものはまだ少なく、この方面を学習したい方には貴重である。

ところで Bossavit 氏と言えば、電磁場問題に現れる各種のベクトル関数や方程式を表示するのに微分形式を使用し、さらに微分幾何学的な概念も活用していることで有名である。このあたりの事情については、著者自身の連載記事が著者の紹介とともに、本誌の 6 巻 1 号以降に与えられているので、参照されると有益であろう。電磁気学の深い研究のためにこの種の知識の使用は不可欠になってきているが、本書ではこの点についてはむしろ控えめである。事実、目的と範囲を限定すれば、古典的なベクトル解析の知識 (にテンソル解析を少し) で足りる場合も多い。それよりも、本書では弱形式とか関数解析の知識が多用されており、その理解が要求されている。そのような数学的事項については、付録で解説されており、著者の配慮が感じられる。いずれにせよ、最近の大学ではベクトル解析の授業の機会さえも減少しており、本書のような高いレベルの記述を読むと、外国と比較して日本の将来はどのようなのか、心配にもなる。

偏微分方程式でモデル化できるような実用上きわ

めて重要な問題に対して、有限要素法による数値計算法が実用化されて久しい。有限要素法の特色の一つは、解析領域を単体形状などをした多数の有限要素 (要素) 集合体として表すことにあり、それにより複雑な形状の境界とそこで課される境界条件を処理できることが大きな長所である。しかしその実現には、元の偏微分方程式に対する適切な変分法的定式化を与えるとともに、優れた有限要素モデルを見出すことが必要である。すなわち、適切な要素形状を選択し、さらに要素内での補間関数形や節点 (補間標本点) を定めなければならない。このような手順は、歴史の古い固体力学などでは基本は確立しており (課題はなお多いが)、流体力学などでも次第に完成の域に近づいている。

他方、有限要素法を電磁場問題に適用することは、上記の有限要素法の特色から、当然ながら期待を持って試みられたが、残念ながら特に 3 次元問題では多くの困難に突き当たることとなった。そのような難点としては、スペクトル汚染 (偽モードの発生) や、凹な角を有する領域での特異性を有する解に対する近似精度の極端な悪さなどが挙げられる。

実は評者もそのような困難に出会い、それを解決すべく著者とは独立に各種の変分法的定式化と辺要素に到達したものである。その体験から見ると、最初に本書で興味を引かれたのは序文 (Preface) であった。そこには辺要素の提案者 Nedelec 氏との出会いや各種の苦労話が述べられており、電磁場問題の計算法と

プログラムの開発の内幕がうかがわれて興味は尽きない。特に Nedelec 氏からの直接のアドバイスが大きな役割を果たしたようで、私のように論文を通して間接的に学んだものは、うらやましく感じた。

後は、章を追って電磁場問題の表示、解法、変分法的定式化、有限要素モデル、具体的な問題例、数学的性質などが解説されている。

以下に、各章の概要を紹介しておこう。

第 1 章は、Maxwell の基礎方程式や電磁気学の基本的な概念の紹介である。電磁気学の専門家にはおそらく周知の内容で、本書での記法の確認をすれば十分だろうが、評者など素人には参考になることも多い。

第 2 章は静磁場問題の章で、とくに領域内部に電流が存在しない場合についてスカラー・ポテンシャルを用いた定式化を取り上げている(これを div-side と称している)。なかでも、弱定式化の意味がていねいに解説されており、微分方程式や境界条件、さらに内部のインターフェイスでの条件がどのように処理されるかを理解するのに役立つ。そして、このような弱定式化の方が、古典的な定式化よりも物理的実体をより良く表現できると主張しているように見うける。

第 3 章は、第 2 章で導かれた定式化をうけて、その問題の解の存在と一意性を論じ、それに伴って必要になる関数空間の完備化の概念が導入されている。さらにそれを数値的、近似的に解くための有限要素法の紹介が続く。ここで導入される要素は、古典的な節点要素 (nodal elements) であるが、とくに四面体要素については詳しい説明があり、後に導入される四面体辺要素の理解に必要な基礎知識にもなっている。

続く第 4 章では、この様にして得られた有限要素法による近似解がどのような性質を有するかを説明している。とくに元の問題で要求されている性質を、近似解でも成立する性質とそうでない性質とに分類し、

後者については要素分割を細かくするにつれ近似解が厳密解に収束することやその誤差の挙動と関連させて述べている。他書にはあまり見られない興味深い記述として、離散最大値原理が 1 次三角形要素では特殊な分割に対して成立することが示されており、メッシュ分割法でよく知られている Voronoi-Delaunay メッシュが有効であることを注意している。

第 5 章は著者が Whitney 要素と呼んでいるものの解説であり、本書の山場の一つである。微分幾何学、トポロジーなども動員して、微分作用素の勾配、回転、発散の関係を論じ、四面体要素分割上の有限次元の世界でそれらの関係をうまく保持する有限要素族として、Whitney 要素 (複数) を導入している。それらは、勾配に対する古典的な Courant の四面体 1 次 (節点) 要素、回転に対する Nedelec の辺要素、発散に対する Raviart-Thomas の面要素の総称である。著者がわざわざこの名称を用いているのは、複体を構成する各単体 (この場合は主に四面体で、2 次元では三角形) 上でスカラー関数やベクトル関数を独特の 1 次多項式で近似するというアイデアは Whitney 先生に負うところが多いという理由でのようである。とくに 2 章以来の静磁場問題に対する div-side の解法に対し、回転を主に扱う curl-side での要素として、辺要素の性質がくわしく述べられている。四面体分割については、Euler-Poincare の公式をはじめグラフ理論的な概念も要求されるが、それは立体回路の基本的な性質とも関連付けられよう。

第 6 章では、静磁場問題の curl-side での定式化と、辺要素を用いた解法などが述べられている。具体的には、磁場を未知関数にする方法とベクトル・ポテンシャルを未知関数にする方法が挙げられる。先の div-side の定式化との相補 (complementary) 性が注意されており、さらに有限要素法での連立 1 次方程式

の形にも触れている。なお、場合によっては、ラグランジュの未定乗数を用いた混合法が現れるので注意が必要である。章の最後の方では、なぜ curl-side の定式化では普通の節点型の要素がだめなのかを解説している。これは、辺要素がなぜ有効なのかとともに、読者が最も知りたい事柄であろう。その説明はなかなかおもしろいが、本書が書かれた段階では、辺要素の有効性の理由付けについてはまだ不十分だったように感じる。この点については、評者も含め世界的に数学者が興味を持って研究しており、最近イタリアの Boffi 氏が数学的な理由付けを完成したようである（現時点ではプレプリント）。

以下の 3 章は、トピックスを扱っている。

第 7 章は無限（非有界）領域の取り扱いについて述べたもので、具体的には、仮想境界法、無限要素法、有限要素と積分方程式法を組み合わせる手法の 3 つを挙げている。とくに最後の手法では Dirichlet-Neumann 写像の扱いが微妙であるので、その離散化法を解説している。

第 8 章は渦電流の章で、有界領域と非有界領域の場合に分けて、各種の定式化が紹介されている。

第 9 章は、電子レンジ等の解析を想定して、周波数領域での Maxwell 方程式を扱っており、解の存在と一意性についても論じている。とくに空洞共振器の問題での偽モード（スペクトル汚染）を避けるのに、辺要素が有効であることを述べている。この説明については、先に述べた Boffi 氏の結果が不足の部分を強力に補ってくれると思う。

巻末には、最初にも述べたように、数学的事項が解説されている。相補性を利用した精度評価の解説などはなかなか面白い。

以上のように、本書はさまざまな数学的概念や記法を活用しているせいもあって、読み通すのはなかなか大変であり、評者自身の理解も未だ不十分である。しかしすでに触れたほかにも、各種の定式化や、スカラー・ポテンシャルとベクトル・ポテンシャルの存在を理論的かつ数値的に保証する技法など、重要な記述が多く、できるだけ多くの方に読んでいただきたい。なお、本書には随所に練習問題がヒントや解答とともに与えられており、手強いものも多いが、内容の理解や補足に役立つと思う。