

解説

辺要素開発秘話

羽野 光夫 (山口大学)

現在、有限要素法による電磁界解析において至極当たり前のように使われている辺要素について、“辺要素とは何か”とか、“辺要素にはこのような特徴がある”とかいう論文は多々目にしますが、“何故辺要素なのか”について記述されたものは少ないように思います。そこで、筆者の拙い経験をもとに辺要素に至った経緯をここに書かせて頂きます。

1970年代有限要素法による導波路解析では、伝搬(z)方向の電磁界2成分(E_z, H_z)による汎関数がよく用いられていました。これは、従来の変分法による解析で多く用いられていた方法です。しかし、スプリアス解が多数発生し[4][5]、これが真解のスペクトルを汚すことから、煩わしい判別の手間を必要としました。そこで、汎関数自体が見直され、電界あるいは磁界の3成分を用いる方法が提案されました[6][7][8]。しかし、この汎関数に有限要素法を適用しても、形態こそ異なれ、相変わらずスプリアス解が多数発生する結果となりました[9][10]。この間、スプリアス解を除去するための努力もいくつか試みられました[11]が、決定的なものは現れなかったようです。そのため、1970年代後半には有限要素法による導波路解析は不可能ではないかという定説さえ出かねない状況になっていました。

この頃、私は光導波路の解析を研究テーマにしていたので、有限要素法に触れる機会がありました。そこで、関連する論文を読んでいると、前述のような状況にあることを知りました。人が駄目だと言うと、ムラムラとくる悪い癖が出てしまいました。しかし、有限要素法に関する指導者がおらず、どこから手を着けてよいのか途方に暮れてしまいました。そこで、図書館に行くと著書[1][2]がありました。しかし、これらはいずれも構造力学を扱っているため理解は今ひとつでした。そのうち訳書[3]があることに気づき、早速購入してみました。この本は数学的立場から有限要素法を見直しており、以後の研究に大いに役に立ちました。しかし、これらはどれもスカラ量に関するもの

でした。改めて読み直してみると、“有限要素法の基礎にある考えはきわめて単純なものである。”という書き出しには感慨深いものを感じました。

辺要素に至った道程は、次のように簡単に述べることができます。まず、スカラ問題の有限要素法解析における本質は何であるかを明確にすることです。次に、この本質を損なわないように類似性を考慮してベクトル問題に拡張することです。最後に、拡張することによって課せられた条件を満たす要素を実現します。何れも、物理的な直感よりも数学的要請を優先させることに尽きると思います。この方が、合理的だからです。以下、これに沿って順次説明していきます。

まず、スカラポテンシャル問題の有限要素法解析において、よく知られている節点要素が何故使われているかについて考えてみましょう。解析領域 Ω が、 M 個の異なる媒質定数からなる小領域から構成されているものとします。各小領域 Ω_m とその境界 Γ_m において、次の条件を満たすPoisson問題を考えます。

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) + \rho = 0 \quad \text{in } \Omega_m \quad (1)$$

$$\mathbf{n} \times \nabla \phi = 0 \quad \text{or} \quad \phi = 0 \quad \text{on } \Gamma_{m,1} \quad (2)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = 0 \quad \text{on } \Gamma_{m,2} \quad (3)$$

$$\mathbf{n} \times \nabla \phi = \text{連続} \quad \text{or} \quad \phi = \text{連続} \quad \text{on } \Gamma_{m,3} \quad (4)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = \text{連続} \quad \text{on } \Gamma_{m,3} \quad (5)$$

ここで、 $\Gamma_{m,1}$ は電気壁(Dirichlet境界)、 $\Gamma_{m,2}$ は磁気壁(Neumann境界)、また $\Gamma_{m,3}$ は内部境界とします。

この問題に対して、汎関数 χ は次のように与えられます。

$$\chi = \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \nabla \phi \cdot \varepsilon \nabla \phi d\Omega - \int_{\Omega_m} \phi \rho d\Omega \right\} \quad (6)$$

ここで、 χ を最小化する試行関数をどのようにして選ぶかを決めなければなりません。そこで、 χ の第一変

分を計算すると、次のようになります。

$$\delta\chi = \sum_{m=1}^M \left\{ \int_{\Omega_m} \nabla(\delta\phi) \cdot \varepsilon \nabla\phi d\Omega - \int_{\Omega_m} \delta\phi \rho d\Omega \right\} \quad (7)$$

右辺に部分積分を適用し、ガウスの定理を用いると、次のように変形できます。

$$\delta\chi = - \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} \delta\phi (\nabla \cdot \varepsilon \nabla\phi + \rho) d\Omega + \sum_{m=1}^M \sum_i \int_{\Gamma_{m,i}} \delta\phi (\varepsilon \nabla\phi) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (8)$$

任意の $\delta\phi$ に対して、 $\delta\chi = 0$ となるのは (1)~(5) 式が同時に満たされる場合だけです。しかし、これらがすべて満たされていれば、これは厳密解に他なりません。実際上“任意”を扱うことはできません。それは、無限次元問題になるからです。

そこで、近似解を求めるための指導原理が必要になってきます。ある関数空間に属する関数列の極限において、 χ が最小値に収束する場合、その関数空間の部分空間の中から近似解を探すことにします [3]。この関数空間は、(2), (4) 式のみを満たせばよいこととなります。残りの (1), (3), (5) 式は近似的に評価されることとなります。

有限要素法では、さらに Ω_m を小さな領域、いわゆる要素に分割します。(6)~(8) 式で使用した Ω_m と Γ_m は、そのまま要素、及びその境界に置き換えることとなります。したがって、 M は要素数を表すこととなります。有限要素法でも、(8) 式の部分積分が要素境界 $\Gamma_{m,3}$ を越えられないということを銘記すべきです。要素の境界において ε は連続ですが、有限要素法では各要素で定義された多項式を用いるために、要素境界で $\nabla\phi$ の連続性が保証されていないからです。汎関数と離散化 (要素分割) が遊離した論文をよく見かけますが、これは誤りです。最初に、要素分割ありきです。次に、(数学的に) 必要な境界条件を満たす試行関数を探すべきです。もし、このような手順を踏んでいけば、スカラー要素をそのままベクトル化した有限要素法 [9][10] は開発されなかったであろうと思います。ガレルキン法を用いた定式化でも、この傾向はよく見受けられます。

スカラー要素の形状関数に課せられる条件は、次の 2 点です。

s-i) 要素内において、恒等的に $\nabla\phi = 0$ でないこと。

s-ii) 要素境界において、(2) または (4) 式を満たすこと。

条件 s-i) より、形状関数は定数 (自由度 1) であるとはならないことがわかります。次に、条件 s-ii) より、例えば三角形要素の場合、各辺において一次式を仮定すると、6 つの自由度が存在します。しかし、三角形の頂点において連続でなければならないことを考慮すると、自由度は 3 に減少します。これだけの条件では、未知節点をあえて頂点に置く必要はありません。慣例的に未知節点が頂点に置かれているのは、後の計算が楽になるからです。また、3 辺で恒等的に零な関数を付け加えても、条件 s-ii) を満たしています。すなわち、境界条件だけからでは形状関数は一意に決まりません。これらに関しては、精度などから検討されるべきでしょう。

次に、ベクトル場の固有値有限要素法解析について検討してみましょう。各要素 Ω_m とその境界 Γ_m において、次の条件を満たす固有値問題を考えます。

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad \text{in } \Omega_m \quad (9)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{m,1} \quad (10)$$

$$\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = 0 \quad \text{on } \Gamma_{m,2} \quad (11)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \text{連続} \quad \text{on } \Gamma_{m,3} \quad (12)$$

$$\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = \text{連続} \quad \text{on } \Gamma_{m,3} \quad (13)$$

この問題に対して、汎関数 χ は次のように与えられます。

$$\chi = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} (\nabla \times \mathbf{E}^* \cdot \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{E}^* \cdot \varepsilon \mathbf{E}) d\Omega \quad (14)$$

ここで、 χ を停留化する試行関数をどのようにして選ぶか決めなければなりません。そこで、 χ の第一変分を計算すると、次のようになります。

$$\delta\chi = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} (\nabla \times \delta\mathbf{E}^* \cdot \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2 \delta\mathbf{E}^* \cdot \varepsilon \mathbf{E}) d\Omega \quad (15)$$

右辺に部分積分を適用し、ガウスの定理を用いると、次のように変形できます。

$$\delta\chi = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} \delta\mathbf{E}^* \cdot (\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E}) d\Omega + \sum_{m=1}^M \sum_i \int_{\Gamma_{m,i}} \{\delta\mathbf{E}^* \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E})\} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (16)$$

敢えて同じ形式で書きましたが、これはスカラ場とベクトル場の問題の類似性を示すためです。繰り返しますが、部分積分は要素境界を越えることはできないのです。ベクトル場では、(10), (12) 式のみを満たす関数空間の部分空間の中から近似解を探すことになります。残りの (9), (11), (13) 式は近似的に評価されることになります。

以上のことから、ベクトル要素の形状関数に課せられる条件は次の 2 点です。

v-i) 要素内において、恒等的に $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ でないこと。

v-ii) 要素境界において、(10) または (12) 式を満たすこと。

これらの条件をもとに、導波路の固有値解析において辺要素がどのような経緯をたどって完成されたのか見てみましょう。導波路は 2 次元問題ですから、電磁波の伝搬方向を z 軸とすると、 \mathbf{E} は次のように表されます。

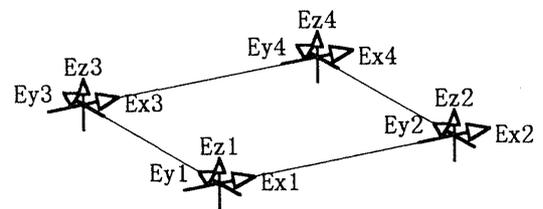
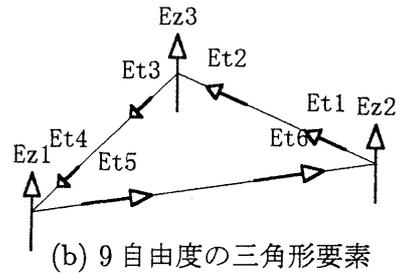
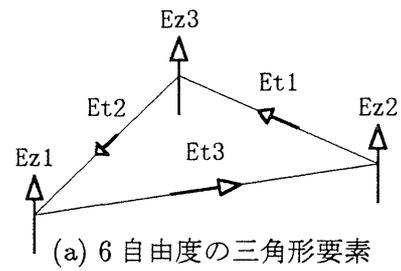
$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_t + j\mathbf{k}E_z)e^{-j\beta z} \quad (17)$$

ここで、 \mathbf{E}_t は \mathbf{E} の断面内成分、 E_z は伝搬方向成分、また β は伝搬定数です。

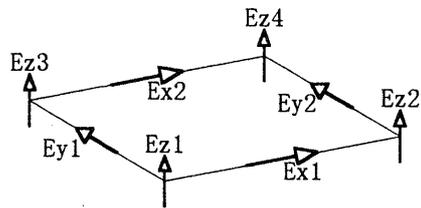
(17) 式より E_z はスカラ量となり、(12) 式の境界条件から従来のスカラ要素で対応できます。一方、 \mathbf{E}_t は要素の辺上において接線成分のみが隣接する要素と連続であればよいので、接線成分を未知パラメータに選べば後の計算が楽になります。要素内において、 \mathbf{E}_t , E_z はそれぞれ次のように近似できます。

$$\mathbf{E}_t = \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{E}_t\}, \quad E_z = \{\mathbf{N}\}^T \{E_z\} \quad (18)$$

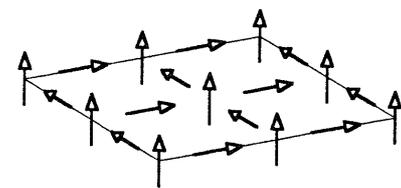
ベクトル要素においては、形状関数 $\{\mathbf{N}\}$ がベクトル関数になります。しかし、このような要素は見たことがなく、ハンドブック [2] を捲っていると Herrmann[12] の要素が目にとまりました。この論文は薄板曲げに関する問題を曲げモーメントと変位によってハイブリッド的に扱っていました。ちょうど、これらはそれぞれ \mathbf{E}_t と E_z に対応していました。そこで、まず Fig.1(a) のような 6 自由度の三角形要素を考えてみました。しかし、 \mathbf{E}_t は E_x , E_y の 2 成分しかないにもかかわらず、辺上の未知パラメータは 3 つあり、この時点では多項式表現がうまくいきませんでした。そこで、次に Fig.1(b) のような 9 自由度の三角形要素を考えてみました。 E_x , E_y をそれぞれ x , y の完全 1 次多項式で補間すれば、各辺上にそれ



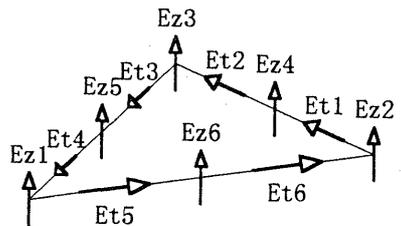
(c) 12 自由度の長方形要素



(d) 8 自由度の長方形要素



(e) 2 次長方形要素



(f) 12 自由度の三角形要素

Fig. 1: 要素構成の変遷

ぞれ 2 つの未知パラメータを設ければ、過不足なく補間できました。この時点では、 E_z も同じ多項式で補間しました。しかし、この要素を用いても依然多数のスプリアス解が発生しました。そこで、三角形要素は諦め、Fig.1(c) の 12 自由度の長方形要素を考えました。 E_x , E_y , E_z は、共に x , y の双 1 次式で近似することにしました。そのためには、各成分とも 4 つの未知パラメータが必要になり、従来のスカラ要素と同様に各頂点に未知パラメータを配置することにしました。しかし、従来の要素 [9] と異なるのは E_x , E_y のための未知パラメータが 2 重節点になっていることです。すなわち、 \mathbf{E}_t の法線方向成分は連続性が要求されていないので、Fig.1(c) の E_x , E_y の矢印方向の隣接要素とは不連続になっています。しかし、この要素を用いた解析でも依然多数のスプリアス解が発生しました。そこで、固有ベクトルを詳しく調べてみると、その直交性より辺上の接線成分が対称 (一定) になる解と反対称になる解が対で現れることが分かりました。固有値と固有ベクトルとを対応つけて見ると、反対称な解のみがスプリアス解になっていることが明らかになりました。したがって、辺上では接線成分が一定値でよいことがわかり、Fig.1(d) のような 8 自由度の長方形要素が完成しました [13]。この要素の適用によってスプリアス解はすべて消え、その代わりに E_z の未知数に等しいだけの零固有値が新たに現れました。これは、 \mathbf{E} の試行関数のうち E_z の未知数に等しい自由度ほど条件 (v-i) を満たしているからです。さらに、Fig.1(e) のような高次要素の作成において、 $\partial E_z / \partial x$ と E_x 、及び $\partial E_z / \partial y$ と E_y が同一の多項式であればよいことがわかり、Fig.1(f) のような 12 自由度の三角形要素を構成するに至りました [14]。 E_x , E_y のための多項式は Fig.1(b) と同一ですが、 E_z には完全 2 次多項式を使用しました。同様な考え方で高次の三角形要素を作成することが可能になりました。この考え方は容易に 3 次元空間に拡張でき、直方体要素 [15]、四面体要素 [16]、及び三角柱要素 [17] などが簡単に構成できました。2 次元解析の場合と同様、予め数の明確な零固有値以外の不要な解はまったく発生しませんでした。ベクトル要素には、それに付随するスカラ要素があることが明らかになり、これは静磁界解析や渦電流解析におけるゲージの問題に一石を投じました [20][21]。

ところで、辺要素といえば Nedelec の論文 [18] を思い出される読者も多いと思いますが、私が始めて

目にしたのは第 5 回 COMPUMAG の Proceedings に掲載された論文 [19] の索引でした。直方体要素の自由度は同じでしたが、三角形要素や四面体要素の自由度は異なっていました。汎関数の停留条件からだけでは、辺要素に課せられる条件は (v-i), (v-ii) のみであり、すべての辺 (あるいは面) 上で $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ を満たす関数を付け加えることの制限はありません [22]。これらも、スカラ要素の場合と同様に精度、あるいはスプリアス解から検討されるべきでしょう [23]。

最後に、有限要素解析された 2 : 1 中空矩形導波管の TE_{11} モード ($\beta = 0.0$) の電磁界分布を Fig.2 に示します。例えば、Fig.2(a) の E_x が短冊状になっていますが、これが“気持ち悪い”という評価を受けたことがありました。これは、物理的直感による評価であり、汎関数 (あるいはガレルキン法) を用いた有限要素法による電磁界解析では数学的要請が優先されるべきでしょう。

多少過激な表現になったところもありましたが、ご笑読頂ければ幸いです。世間に流布している辺要素は、ほんの一部だと思います。辺要素の本質を極め、まだまだ新しい要素が提案されることを期待しています。また、方程式系が異なればそれに適合した要素が必要不可欠です。今後ますます、有限要素法が電磁界の数値解析において重要な位置を占めることを期待して筆を置かせていただきます。

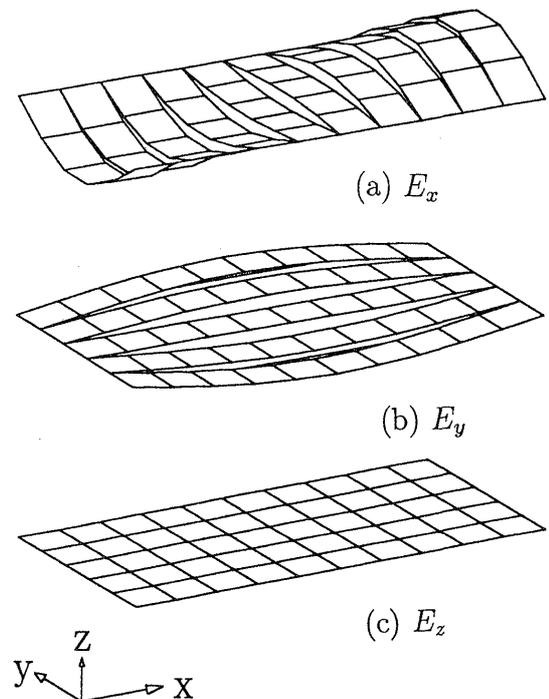


Fig. 2: TE_{11} モードの電磁界分布

参考文献

- [1] O.C. Zeinkiewicz, “マトリックス有限要素法,” (吉識, 山田訳) 培風館, (1970).
- [2] 鷺津, 宮本, 山田, 山本, 川井共編, “有限要素法ハンドブック I 基礎編,” 培風館, (1981).
- [3] G. Strang and G. J. Fix, “有限要素法の理論,” (三好, 藤井訳) 培風館, (1976).
- [4] P. Daly, “Hybrid-Mode Analysis of Microstrip by Finite-Element Methods,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.MTT-19, No.1 (1971), pp.19-25.
- [5] 池内, 井上, 沢見, 仁木, “マイクロストリップ線路の有限要素法解析におけるスプリアス・モード,” 電気学会論文誌 A, Vol.98, No.8 (1978), pp.415-422.
- [6] W.J. English and F.J. Young, “An E Vector Variational Formulation of the Maxwell Equations for Cylindrical Waveguide Problems,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.MTT-19, No.1 (1971), pp.40-46.
- [7] 森下, 熊谷, “電磁界解析における変分表現式の統一的な導出について,” 信学論 (B), Vol.J59-B, No.3 (1976), pp.165-172.
- [8] A. Konrad, “Vector Variational Formulation of Electro-magnetic Fields in Anisotropic Media,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.MTT-24 (1976), pp.553-559.
- [9] A. Konrad, “High-order Triangular Finite Elements for Electromagnetic Waves in Anisotropic Media,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.MTT-25, No.5 (1977), pp.353-360.
- [10] 小柴, 片野, 鈴木, “3次元電磁界固有値問題の有限要素法解析,” 信学論 (A), Vol.J68-A, No.6 (1985), pp.533-540.
- [11] B.M.A. Rahman and J.B. Davies, “Penalty Function Improvement of Waveguide Solution by Finite Elements,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.MTT-32, No.8 (1984), pp.922-928.
- [12] L.R. Herrmann, “Finite Element Bending Analysis for Plates,” *Journal of Engineering Mechanics Division, Proceeding of the American Society of Civil Engineers*, Vol.EM5 (1967), pp.13-26.
- [13] M. Hano, “Finite-element analysis of dielectric-loaded waveguides,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.MTT-32, No.10 (1984), pp.1275-1279.
- [14] 羽野光夫, “新しい三角形要素を用いたベクトル有限要素法による異方性導波路の解析,” 信学論 (C), Vol.J70-C, No.10 (1987), pp.1329-1337.
- [15] 羽野光夫, “3次元共振器問題の有限要素法解析—立方体要素の場合—,” 信学論 (C), Vol.J70-C, No.6 (1987), pp.791-796.
- [16] 羽野光夫, “3次元共振器問題の有限要素法解析—四面体要素の場合—,” 信学論 (C), Vol.J71-C, No.3 (1988), pp.333-338.
- [17] 羽野光夫, “ベクトル要素による3次元電磁界の有限要素法解析,” 電気学会, 電磁界研究会資料, EMT-88-99 (1988), pp.95-104.
- [18] J. C. Nedelec, “Mixed Finite Elements in R^3 ,” *Numer. Math.*, Vol.35 (1980), pp.315-341.
- [19] 例えば, T. S. Welij, “Calculation of Eddy Current in Terms of H on Hexahedra,” *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol.MAG-21, No.6 (1985), pp.2239-2241.
- [20] 羽野光夫, “全周波数領域に適用可能な線形三次元電磁界の有限要素法解析—理論編—,” 電学論 A, Vol.110-A, No.9 (1990), pp.570-576.
- [21] 羽野光夫, “全周波数領域に適用可能な線形三次元電磁界の有限要素法解析—計算編—,” 電学論 A, Vol.110-A, No.9 (1990), pp.577-580.
- [22] 羽野, 小山, “2次元高次ベクトル要素の体系的な構成法とその導波路解析への応用,” 信学論 (C), Vol.J82-C-I, No.4 (1999), pp.212-218.
- [23] A. Ahagon, K. Fujiwara and T. Nakata, “Comparison of Various Kinds of Edge Elements for Electromagnetic Field Analysis,” *IEEE Trans. Magn.*, Vol.32, No.3 (1996), pp.898-901.