日本 *AEM* 学会誌 *Vol. 7, No. 4 (1999)*

学術論文

ティホノフ近似と非対称アーベル変換による火炎中カリウム原子数密度の再構成 —理論および数値モデル分布による検証—

Reconstruction of number density of potassium atom in flame by Tikhonov approximation and asymmetrical Abel inversion - Theory and verification with model distribution -

大山 裕之 (北海道大学) 谷津 茂男 (北海道大学)
粥川 尚之 (北海道大学)

Hiroyuki OYAMA Student Member
Shigeo YATSU Member
Naoyuki KAYUKAWA

As an inverse problem, we take up the problem to estimate the number density distribution of potassium atoms in a flame jet. A new method for the reconstruction of local potassium number density from the observed emission and absorbed light intensity is presented. An approximate integral solution is formulated on the Tikhonov regularization theory and asymmetrical Abel inversion is used to obtain local values of the absorption coefficient integrated in an appropriate frequency band width. The method is verified by reconstructing numerical model distribution. Numerical evaluation of the effect of errors introduced by the nonuniformity of the reference lamp light or the noise included in image data is also performed.

Key Words: Reconstruction of number density, potassium atom in flame, Tikhonov approximation, asymmetrical Abel inversion, regularization, inverse problem.

1 はじめに

従来から，科学的研究や工業目的のため，火炎やアークガスの温度，および構成物質ないし添加物質の原子·分子の数密度を測定することが行われてきている．これらの測定の方法の多くは被測定量の平均値を得るものであるが，レーザー誘起蛍光法やコヒーレント反ストークスラマン分光法 [1] の様に直接局所値を測る方法もあり，また二次元的に観測する光路積分光から内部局所値分布を求める方法も知られている [2][3]．ところで，これまでの積分光情報から局所値情報を復元する (再構成する) 方法においては，測定される光は発光もしくは吸収のどちらか片方のみの光過程に依拠するとの仮定を置くことが多かった．また光学厚さの制約を受けることも多く見受けられた．例えば，Buuron, Otorbaev らは成長曲線法を基に水素–アルゴン混合アークプラズマ中の励起アルゴン原子の数密度分布を求めているが [4]，その際プラズマから放射される光は補正量として取り込んでいる．また彼らは同プラズマ中の励起水素原子に対し，光学的に薄い仮定を置くことで吸収スペクトル形状を仮定することを免れ，吸収効果を線型近似的に扱い数密度分布を求めている [5]．しかし金属原子の線スペクトルの場合に見られるように，吸収が大きいものほど発光も大きく

連絡先：大山裕之，〒060-8628，札幌市北区北 13 条西 8 丁目，北海道大学エネルギー先端工学研究センターエネルギー転換制御分野,email:mhdhiro@hucc.hokudai.ac.jp

なり，片方のみを仮定して取り扱うことは測定精度を悪くするか，或いは測定可能な対象を限定することにつながる場合がある．発光と吸光の両者が共存する対象の測定には，両方の光過程を取り込める新しい方法の開発が必要と考えられる．

本研究では，将来の環境保全性が高くかつ高効率な燃焼の実現に必要と考えられる火炎中特定物質の詳細把握技術の獲得を目指し，特定物質例として添加されたカリウムを考え，観測光の強度分布情報から火炎中のカリウム原子数密度分布を再構成する方法を，発光と吸収の両方の光過程を記述する輻射輸送方程式を基礎式として，逆問題的アプローチにより構築する．観測量は，光路積分されると共に帯域通過フィルターにより特定の周波数帯の光に制限されて検出系に至る光束であり，二次元検出器によって画像データとして記録する．火炎内の周波数積分された吸収係数を再構成することから基底状態にあるカリウム原子の数密度分布を求め得る．本報で取り上げる手法が火炎に有効ならば，プラズマプロセス用の低温低電離プラズマや高速大熱容量の熱プラズマへの発展的適用も可能と考えられる．

本報では，再構成方法の理論を述べると共に一つの具体的方法を提案し，その有効性をファントムデータを用いるモデル分布の再構成結果から検証する．

2　再構成理論

2.1　吸収係数と原子数密度

火炎等の内部において光の放出と吸収が同時に行われている場合，当該光の分光放射輝度は輻射輸送方程式に従う [6]．光の放出と吸収に関わる物理量の空間変化が座標 x のみに依るとき，火炎中の一点における周波数νの光に対する輻射輸送方程式は次の形で記述される．

$$\frac{\mathrm{d}J(\nu,x)}{\mathrm{d}x}=\epsilon(\nu,x)-\kappa(\nu,x)J(\nu,x) \qquad (1)$$

ここで，分光放射輝度を $J(\nu,x)$ で表し，$\epsilon(\nu,x)$ と $\kappa(\nu,x)$ をそれぞれ放出係数と吸収係数としている．吸収係数κを全ての周波数で積分して得られる量 (積分吸収係数 K_∞) は，火炎中の発光と吸収を担う原子の基底状態とエネルギー順位 kにある状態の間の遷移に対し，次の式で表現される [7].

$$K_\infty(x)\equiv\int_0^\infty\kappa(\nu,x)\mathrm{d}\nu\simeq\frac{g_k}{g_0}\frac{\lambda^2}{8\pi}AN_0(x) \qquad (2)$$

ここで，g_kは統計荷重，λは共鳴線中心波長，A は Einstein の自発遷移係数，N_0は基底状態にある原子の数密度である．また，衝突優勢で局所熱平衡が成立すると共に Wien 近似が成立していると仮定している．この (2) 式の右辺において N_0以外は既知の定数であるため，空間各点の K_∞が得られれば，同じ点の局所原子数密度を求めることができる．

ところで我々の観測対象であるカリウム線スペクトル光は二重線を持つことから，2 つの励起準位間の遷移を含む 3 つのエネルギー準位間の遷移過程を考える必要があるが，原子間の衝突が頻繁に起こり，衝突による無放射遷移確率が自然放出の確率を大きく上回り，基本的に遷移が衝突により決定されるとすると，(2) 式の右辺は結果的に二つの波長λ_1(=766.5 [nm]), λ_2(=769.9 [nm]) のそれぞれが与える項の和で近似することができ，最終的な目標である局所原子数密度は次式で表される [8][9].

$$N_0(x)\simeq\frac{1}{A}\left(\frac{g_1\lambda_1^2}{g_0 8\pi}+\frac{g_2\lambda_2^2}{g_0 8\pi}\right)^{-1}K_\infty(x) \qquad (3)$$

帯域通過フィルタを用いて，カリウム共鳴線中心波長に対応する周波数を含む，幅 W_Γの周波数帯Γの光のみを観測する場合を考え，Γにおける吸収係数の周波数積分を

$$K_\Gamma(x)\equiv\int_\Gamma\kappa(\nu,x)\mathrm{d}\nu \qquad (4)$$

とする．有限の観測周波数幅 W_Γを吸収係数のプロファイルの幅より十分広くとることにより，K_Γと (3) 式右辺の積分吸収係数 K_∞の間の有意な差をなくすことができる．実際の再構成過程で求められるのは K_Γであり，K_Γを K_∞と同一視して局所原子数密度を与える．

2.2　火炎からの光の観測

水平に置かれたノズルからの燃焼火炎の噴流方向に z軸をとりそれに垂直でかつ水平な方向に x 軸をとる座標系を設定し，x–y面に平行な観測断面上を x 方向に伝播する光の観測を考える (Fig.1参照)．光路上では，位置による物理量の変化は座標 x のみに依存するので，(1) 式を光路上の x 座標について積分すると周波数νの観測光を与える次式が得られる．

$$J(\nu,x_L)=J(\nu,x_0)\exp[-\int_{x_0}^{x_L}\kappa(\nu,x)\mathrm{d}x]
+\int_{x_0}^{x_L}\epsilon(\nu,x)\exp[-\int_x^{x_L}\kappa(\nu,x')\mathrm{d}x']\mathrm{d}x \qquad (5)$$

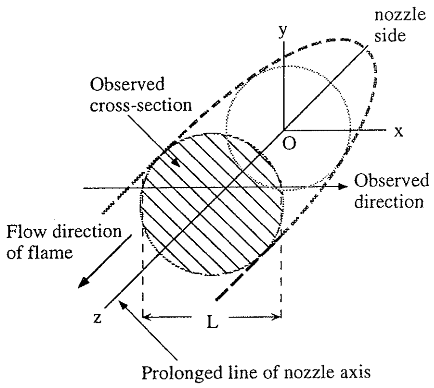

Fig. 1: Coordinate system for time-averaging observation of flame flow.

ここで，x_0，x_Lは火炎中の光路の両端の x 座標であり，$x_L - x_0 = L$ である．x_0と x_Lは (従って L も) 光路の位置則ち座標 y,zに依って変化する．また (5) 式の J,ϵ,κは座標 x と共に座標 y,zを独立変数とする関数でもあるが，一光路上では座標 y,zは一定であるので，簡略化のため空間変数としては x のみを記している．この簡略化は特に y,zへの依存を示す必要がある場合を除き以下の全ての空間変数の表記において行なう．火炎の外の発光体として参照光をもたらすランプ光源のみを許すと，(5) 式の右辺第一項は参照ランプからの火炎透過光を，同じ辺の第二項は火炎中から発せられ火炎外に出てくる光をそれぞれ表す．

(5) 式をΓで周波数積分すると，実際の観測量を表す式が得られる．則ち，左辺の積分は参照ランプからの火炎透過光が存在するときに観測される全周波数積分光の強度を，また参照ランプからの光が無く右辺第一項が零である場合には火炎からの周波数積分光のみの強度を与える．ここでは前者を I_{fl+l}，後者を I_{fl}と表す．また光の強さが周波数帯Γ内で周波数に依存せず一定である参照ランプを用いるとし，Γ内の全ランプ光を I_lと表す．一つの観測断面から I_{fl+l}が座標 y の関数として得られ，更に座標 z毎に観測断面があるので，結局 I_{fl+l}は二次元検出器の置かれる x 軸に直交する面 (観測面) に投影された関数 $I_{fl+l}(y,z)$ として観測され，観測面上の特定領域内にある一点 (観測点) ごとの関数値が集められ二次元画像として記録されることになる．I_{fl}と I_lも同様に記録される．

2.3 積分吸収係数の光路積分表示

吸収係数の観測周波数帯Γにおける積分 K_Γを得ることが当面の目標となるが，本節では観測量と K_Γの関係を調べ，K_Γの光路積分表示を近似的に与える．

(5) 式のΓ内周波数での積分から，光学厚さ$\tau(\nu) \equiv \int_{x_0}^{x_L} \kappa(\nu,x)\mathrm{d}x$ を未知関数とする積分方程式は，

$$\frac{1}{W_\Gamma}\int_\Gamma \mathrm{e}^{-\tau(\nu)}\mathrm{d}\nu = \frac{I_{fl+l} - I_{fl}}{I_l} \quad (6)$$

となる．上式は空間･周波数積分された輻射輸送方程式とみなすことができ，右辺は 3 つの観測量から与えられる．記述の簡略化のため，今後は右辺を記号 i_{obs}で表すことにする．一般に $I_{fl+l} - I_{fl} > 0$ が成り立つから i_{obs}は正値をとり，また i_{obs}を得る光路の光学厚さが厚くなるほど 0 に近づき，逆に薄くなるほど 1 に近づく．

Γ内で光学厚さが小さい ($\tau \ll 1$) 場合 [5][10]，もしくは吸収係数の周波数特性及び空間分布形状を未知係数を含むモデル関数で与える場合 [4] には (6) 式より容易に吸収係数の周波数積分 K_Γを求めることができる．しかしながら，Γ内の発光強度が最大になる周波数において同時に吸収も最大になる火炎の場合には，Γ内全域で光学厚さが小さいことは望めず，この場合には (6) 式から直接に K_Γを求めることはできない．また，火炎に対し特別な拘束を与えたり制御を加えることが無い限り，吸収係数の周波数特性及び空間分布形状を与えるモデルを見出すことは難しい．本報では，光学厚さの仮定や周波数特性･空間分布形状のモデルに依らずに，K_Γを得る別の方法を考える．

(6) 式の左辺を，光学厚さτの周波数平均値を含む次式で置き換える．

$$\exp[-\frac{1}{W_\Gamma}\int_\Gamma \tau(\nu)\mathrm{d}\nu] + \delta \quad (7)$$

ここで，δは置き換えにより生ずる偏差を表す．則ち，

$$\delta \equiv \frac{1}{W_\Gamma}\int_\Gamma \mathrm{e}^{-\tau(\nu)}\mathrm{d}\nu - \exp[-\frac{1}{W_\Gamma}\int_\Gamma \tau(\nu)\mathrm{d}\nu] \quad (8)$$

である．δは一般に正値をとり，光学的に薄い極限でも逆に厚い極限でも 0 に近づくので最大値δ_{max}を与える光路が存在する．その光路は，通常，最大の火炎からの光 I_{fl}をもたらす光路にほぼ一致している．(6) 式の左辺を (7) 式の形で置き換えを行ない，両辺の対数を取ると次式を得る．

$$\int_\Gamma \tau(\nu)\mathrm{d}\nu = -W_\Gamma[\ln(1 - \frac{\delta}{i_{obs}}) + \ln(i_{obs})] \quad (9)$$

ここで，次のような，(6) 式を含む周波数積分に関するより一般的な積分方程式を考える.

$$\int_\Gamma X(\nu,y)\mathrm{d}\nu = W_\Gamma \cdot i(y) \tag{10}$$

(10) 式は，未知関数が $X(\nu,y)$ で積分核が 1 の第 1 種 Fredholm 型積分方程式であって，解を一意に決めることができない [11]. この式に対し Tikhonov の正則化 [12][13] を行なうと一意な解として次式を得る.

$$\tilde{X}(y) = \frac{i(y)}{1+\alpha/(W_\Gamma)^2} \tag{11}$$

この解は所謂 Tikhonov 近似解であり，数学的には (10) 式の特別な一般解である最小ノルムの最小二乗解の近似解であると言える [12]. (11) 式中のαは Tikhonov の正則化パラメータと呼ばれる正値定数である. また i は正値をとるので，周波数依存性のない近似解$\tilde{X}(y)$も正値をとることがわかる.

(10) 式で，$X=\exp(-\tau)$，$i=i_{obs}$とみなすと (6) 式になる. 従って，周波数に依存しない量$\tilde{\tau}$を導入して，$\tilde{X}=\exp(-\tilde{\tau})$ と表すと (11) 式から,

$$\tilde{\tau} = -\ln\left[\frac{i_{obs}}{1+\alpha/(W_\Gamma)^2}\right] \tag{12}$$

$\tilde{\tau}$は$\tau(\nu)$ に関する積分方程式 (6) の近似解とみなせる一方で，次の式から$\tau(\nu)$ の周波数平均値の近似値でもあることがわかる.

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{W_\Gamma}\int_\Gamma \tilde{\tau}\mathrm{d}\nu \simeq \frac{1}{W_\Gamma}\int_\Gamma \tau(\nu)\mathrm{d}\nu \tag{13}$$

以上のことから，$\tau(\nu)$ のΓでの周波数積分は,

$$\int_\Gamma \tau(\nu)\mathrm{d}\nu \simeq -W_\Gamma \ln(f_r i_{obs}) \tag{14}$$

と表せる. ここで $f_r \equiv 1/[1+\alpha/(W_\Gamma)^2]$ と置いた.

$$\int_\Gamma \tau(\nu)\mathrm{d}\nu = \int_{x_0}^{x_L} K_\Gamma(x)\mathrm{d}x \tag{15}$$

なので，K_Γの光路積分は，結局，近似的に次式で与えられる.

$$\int_{x_0}^{x_L} K_\Gamma(x)\mathrm{d}x \simeq -W_\Gamma \ln(f_r i_{obs}) \tag{16}$$

2.4 正則化パラメータの決定

正則化パラメータαの決定 (則ち f_rの決定) は一般に観測量に含まれる誤差や別の拘束条件によって決められる [12]. 観測誤差を含む観測量に対して (6) 式および (6) 式と等価な (9) 式の解を考えると，解があればその解は観測誤差の無い場合の解から幾分か逸脱した解である. (9) 式を改めて次の様に表す.

$$\int_{x_0}^{x_L} K_\Gamma(x)\mathrm{d}x = -W_\Gamma \ln(f_t i_{obs}) \tag{17}$$

ただし,$f_t \equiv 1-\delta/i_{obs}$と置いた.

観測誤差の各項への影響を明示するため，誤差があることにより f_t，i_{obs}および K_Γに生ずる影響をそれぞれΔf_t，Δi_{obs}，ΔK_Γで表し，もともとの誤差がない場合の量を右肩に (s) が付いた量で表すことにする. またこれ以後，観測量でΔも (s) も付かない量は誤差を含むものとする.

ΔK_Γに関しては (17) 式から次式が得られる.

$$\int_{x_0}^{x_L} \Delta K_\Gamma(x)\mathrm{d}x \simeq -W_\Gamma \ln(1+E) \tag{18}$$

$$E \equiv \frac{\Delta f_t}{f_t^{(s)}} + \frac{\Delta i_{obs}}{i_{obs}^{(s)}} \tag{19}$$

ここで $f_t^{(s)} \equiv 1-\delta^{(s)}/i_{obs}^{(s)}$であり，また$\Delta$を付けた量の 2 次の項は小さいとして無視している. (18) 式の左辺は，観測誤差がある場合でもほぼ零であることが望ましい. その条件は右辺の対数部分から $E=0$，則ち (19) 式より,

$$f_t^* \equiv f_t^{(s)} + \Delta f_t = f_t^{(s)} \cdot \left(1 - \frac{\Delta i_{obs}}{i_{obs}^{(s)}}\right) \tag{20}$$

となることである. よって，(17) 式右辺の f_tを (20) 式の f_t^*で置き換えて得られる K_Γの光路積分

$$\int_{x_0}^{x_L} K_\Gamma(x)\mathrm{d}x \simeq -W_\Gamma \ln(f_t^* i_{obs}) \tag{21}$$

は，$W_\Gamma(\Delta i_{obs}/i_{obs}^{(s)})^2$程度の差違で $K_\Gamma^{(s)}$の光路積分を与える式になる. (16) 式を (17) 式の近似式とみなすと，(16) 式の f_rは f_tの近似項であるが，前述のことから，観測誤差がある場合には，f_rを (21) 式の f_t^*の適切な近似項として指定することにより，本来の $K_\Gamma^{(s)}$の光路積分を (16) 式でより良く近似させることができる. 則ちこの様に指定された f_rは，Tikhonov 近似解の採用によって生ずる誤差に加えて観測誤差が存

在する状況下で K_Γ の光路積分を修正する働きをするので，f_r を修正因子と呼ぶことにする．本研究では正則化パラメータを，正則化後の $K_\Gamma^{(s)}$ の光路積分の値をできる限り本来の積分値に近づける様に決定する．

$K_\Gamma^{(s)}$ の再構成においては同一の z 座標にあって y 方向に並ぶ観測点列から得られる一組の情報が重要になる．(21) 式の f_t^* 則ち $(1-\delta^{(s)}/i_{obs}^{(s)})(1-\Delta i_{obs}/i_{obs}^{(s)})$ の値も同観測点列上で変化する．これらを y についての定数である修正因子 f_r で近似するに当たって，f_r に光学的に最も厚い火炎中央部の情報と共に同一観測断面からの平均的な情報を含ませることが妥当であると考えられる．そこで，光学厚さが最大になると予想される火炎からの光 I_{fl} が最大となる観測点での分光測定から δ の最大値 δ_{max} を求め $\delta^{(s)}$ に代えることで前者の要請に応え，後者に対しては i_{obs} を規格化された 2 乗ノルム $\|i_{obs}\|$ で代表させることにする．また観測誤差による i_{obs} の変化分 Δi_{obs} を何らかの一定代表値で表し f_r へ取込むことができれば，観測誤差が $K_\Gamma^{(s)}$ の光路積分に及ぼす影響を相当に減ずることができると予想されるが，予め在り得る誤差要因を全て解析的に取り扱い Δi_{obs} に組み入れることは一般に困難であるので，本報では行なわない．ただし，誤差の影響も減ずるように f_r を決めることは行なわないが，次節に示すように，個別に誤差要因を特定して Δi_{obs} を見積もることができれば，見掛け上の光路積分値から誤差分を差し引くことができる．結局，修正因子 f_r を次式で与えることにする．

$$f_r = 1 - \frac{\delta_{max}}{\|i_{obs}\|} \tag{22}$$

2.5 K_Γ の光路積分誤差

(22) 式で与えられる f_r を導入した (16) 式には左辺の $K_\Gamma(x)$ の光路積分に新たに誤差が付加される．これは定数の f_r が (21) 式の f_t^* を不完全にしか近似し得ないことから生ずる．K_Γ に付加される誤差を $\Delta K_\Gamma{}^{(\mathrm{e})}$ で表す．(16) 式および (21) 式から，δ，δ_{max} および Δ を付けた量の 2 次以上の項を無視すると $\Delta K_\Gamma{}^{(\mathrm{e})}$ の光路積分は，

$$\int_{x_0}^{x_L} \Delta K_\Gamma{}^{(\mathrm{e})}(x)\mathrm{d}x \simeq -W_\Gamma \ln(1+\mathrm{e}) \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\ln(1+\mathrm{e}) &\equiv \ln(f_r/f_t^*) \\
&= \ln[(1-\frac{\delta_{max}}{\|i_{obs}\|})/(1-\frac{\delta^{(s)}}{i_{obs}^{(s)}})] \\
&\quad -\ln(1-\frac{\Delta i_{obs}}{i_{obs}^{(s)}}) \\
&\simeq \frac{\delta^{(s)}}{i_{obs}^{(s)}} - \frac{\delta_{max}}{\|i_{obs}\|} + \frac{\Delta i_{obs}}{i_{obs}^{(s)}}
\end{aligned} \tag{24}$$

となる．ここで，$\ln(1+\mathrm{e})$ を与える上式右辺の最後の式は，火炎が光学的に薄く観測誤差も小さい場合に得られる．(24) 式の右辺が負 (正) になる場合，(23) 式は正 (負) になり，K_Γ の光路積分値が見掛け上増加 (減少) することになる．

2.6 Abel 変換による局所量再構成

(16) 式は，積分光路長 L および i_{obs} が観測断面の座標 y の関数であることから，空間積分に関する第 1 種 Volterra 型積分方程式と見なすことができる．この種の積分方程式を解いて積分値から局所値を再構成すること，則ち空間積分値の集まりから局所値分布を求める場合に，もし局所値がほぼ円筒軸対称に分布していると仮定できるならば，Abel 変換 [14] を用いることができ，(16) 式から K_Γ が求められる．

水平方向に吹き出す噴流火炎では，燃焼ガスに対し周囲空気から働く浮力により火炎の上下で非対称な対流が起き，その結果火炎内の局所値分布にも円筒軸対称な分布から y 方向に偏る非対称性が生じていることが予想される．その場合には，観測投影値は Fig.1 で z 軸に関し y 方向に非対称になるので，Abel 変換に当たっては，非対称 Abel 変換法 [15] を用いる．

3 モデル分布の再構成

本章では，前章で述べた方法によりファントムデータを用いたモデル分布の再構成を行ない，再構成結果の評価から，正則化と f_r の指定に伴って生ずる誤差の見積もりを行なうと共に，他の誤差原因について検討する．

3.1 ファントムデータの作成

観測量 (I_{fl+l}，I_{fl} および I_l) を与えるためにファントムデータとして必要なものは，噴流火炎に添加されたカリウムの原子数密度および火炎中の温度の空間分布と参照ランプ光の周波数スペクトルおよび輝度の空間分布である．火炎中の他の構成物質は考察する周波数帯で発光や吸光に直接関与しないとする．カリウム原子数密度は，主に添加するカリウム化合物の解離

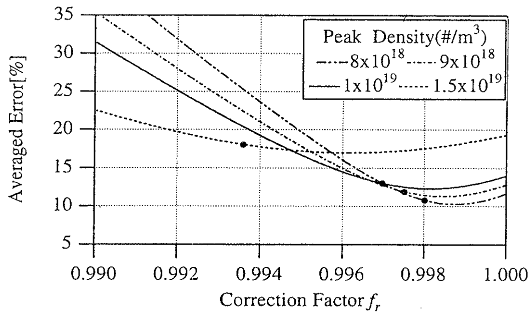

Fig. 2: Each line shows averaged error variance against the correction factor. The solid circle shows averaged error in case of using correction factor given by (22).

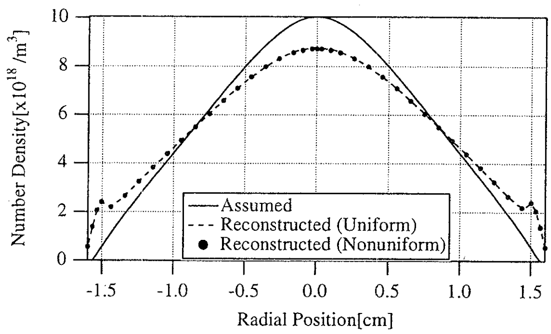

Fig. 3: One example of reconstructed spatial profile of potassium number density. The correction factor given by (22) is used.

と再結合により決まり温度に強く依存していると予想されるので，炎中心部の高温域では温度分布に相似し，外側の低温域では温度より急峻に変化する空間分布形状をもつとする．温度分布は噴流火炎の数値シミュレーション結果を近似して与える．用いる計算コードは，山下らの公開ソースコード [16] をアセチレン·酸素マルチノズル炎を模擬できるように改めたものである．数値シミュレーションから得られる定常的な温度と質量密度の分布はほぼ円筒軸対称になっているので，原子数密度も円筒軸対称に分布すると仮定する．具体的には，温度およびカリウム原子数密度ファントムの径方向分布を，それぞれ半径の 10 次と 4 次の多項式で与える．吸収係数の周波数分布は調和振動モデルから導かれるローレンツ型プロファイル [6] で表現されるとする．その半値幅は温度に依存する関数とするが，光学断面積は詳細が不明であるので定数 [17] の代表値で置き換える．さらに局所熱平衡を仮定し，放出係数ϵは Kirchhoff の法則 [6] からκと黒体輻射関数より与える．観測周波数帯Γに対応する波長域を 750～790 [nm] とする．参照ランプ光のスペクトル強度はこの波長領域内のどの波長においても一定であるとする．またランプ光輝度 (I_l) の空間分布については，一様な場合に加えて，実際の観測状況を想定して空間的に非一様に分布する場合も取り上げる．

3.2 モデル分布の再構成結果

既知のファントム原子数密度分布とその再構成分布との平均相対誤差を，次の式のように仮定値と再構成値の間の偏差のノルムと初めの仮定分布のノルムの比で定義し，評価の指標として用いる．

$$averaged\ error = 100 \cdot \frac{\|n_{asm} - n_{rec}\|}{\|n_{asm}\|} \tag{25}$$

この式において，n_{asm} と n_{rec}はそれぞれ空間各所の仮定値と再構成値の原子数密度を表す．

先ず，定数である修正因子 f_rの値を (22) 式の値とは無関係に連続的に変化させ，再構成結果に現れる平均相対誤差の f_rへの依存性を調べる．また，修正因子 f_rの値を固定した場合に，数密度変化による平均相対誤差の変わり方をみるために，中心部のピーク密度の変化と平均相対誤差の関係も調べた．これらの結果を，Fig.2に示す．ランプ光輝度は空間的に一様としている．同図から f_rには平均相対誤差を最小にする或る最適値が存在し，ピーク密度が高くなり光学的に厚くなる程，平均相対誤差が増すが f_rの最適値はより小さな値となることが読み取れる．

Fig.2中の黒丸 (●) は (22) 式の f_rを用いる再構成の結果から得られる平均相対誤差を示している．同図から，中心部のピーク密度が $1 \times 10^{19}[\#/m^3]$ 以下の場合では，(22) 式の f_rが相当に最適値に近く，最小値に近い平均相対誤差での再構成結果をもたらすこと，またピーク密度が下がり光学的に薄くなる程，平均相対誤差と最小値の差が小さくなる傾向をもつことがわかる．

中心部のピーク密度が 1×10^{19} $[\#/m^3]$ のファントムデータに対し，(22) 式の修正因子を用いて再構成した結果を Fig.3に破線で示す．この場合もランプ光輝度は空間的に一様としている．仮定値と再構成値

の比較から，再構成値が高密度の炎中心部分では仮定値より小さくなり逆に低密度の炎周縁部分では大きくなっていて，再構成誤差も炎中心部と炎周縁部で大きくなることがわかる．仮定した分布と再構成分布の平均相対誤差は 13%である．この様に再構成される理由について次の様に考えることができる．(24) 式の右辺の$\delta^{(s)}/i_{obs}^{(s)} - \delta_{max}/\|i_{obs}\|$ が，$\delta^{(s)}$の小さな炎周縁部では負に，$\delta^{(s)}$の大きな炎中央部では正になるので，その結果，炎周縁部と炎中央部の光路積分値は，真の積分値より (23) 式による増減分だけ，それぞれ増大，減少する．以上の様な K_Γの光路積分の変更を模式図 Fig.4(a) の実線と破線で示す．実線は真の積分値を破線は変更を受けた積分値を示している．同図 (b) は Abel 変換による再構成後の K_Γの分布を模式的に示しており，破線が Fig.3の破線と同様の分布を示すことがわかる．結局，Fig.3の再構成結果に現れる誤差は，修正因子を (22) 式で示される f_rに特定して採用したことに由来し、手法上必然的に現れる誤差と解釈できる．

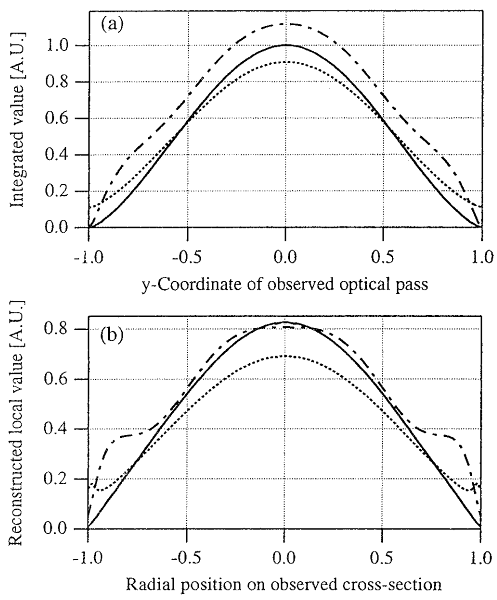

Fig. 4: (a)Distributions of integrated data and (b)their reconstructed results.

3.3 再構成誤差をもたらす諸要因

本報で提案する再構成法では，前節で述べた手法上の誤差が再構成値に現れるが，他に非一様なランプ光や検出器系ノイズなどにより誤差が生ずることがある．

Fig.3の黒丸 (●) は，ランプ光輝度の y方向分布を，$y=0$ でピーク値をとりその値が先の一様な場合の値と同一であって火炎周縁部でピーク値の五分の一以下まで低下する二次関数で与えたときの再構成結果である．この場合と一様なランプ光の場合の平均相対誤差を較べると 1%弱の差しかなく，Abel 変換による再構成はランプ光輝度の空間的非一様性にはあまり影響されないと言える．I_lの非一様性を $I_l/I_l^{(u)} = 1 + G_l$ なる関数 $G_l(y,z)$ で表し，I_lの非一様性により I_{fl+l} にもたらされる影響を $I_{fl+l}/I_{fl+l}^{(u)} = 1 + G_{fl+l}$なる関数 $G_{fl+l}(y,z)$ で表すと，I_lの非一様性が i_{obs}に及ぼす影響は，相対誤差でみると，

$$\frac{\Delta i_{obs}{}^{(nu)}}{i_{obs}^{(u)}} = \frac{G_{fl+l} - G_l}{1+G_l} + \frac{G_{fl+l}}{1+G_l} \cdot \frac{1}{i_{obs}^{(u)}} \cdot \frac{I_{fl}}{I_l^{(u)}} \quad (26)$$

と表し得る．一様なランプ光の場合の量を右肩に (u) の付いた量で表している．またランプ光が一様でないことにより i_{obs}に生ずる誤差を$\Delta i_{obs}{}^{(nu)}$としている．中心が火炎中央部にあり，中心から離れるにつれて輝度を減ずる同心円状の輝度分布のランプ光を考える．この場合，火炎中央部ではランプ光変化が緩やかで G_l，G_{fl+l}が小さく，また光学的に薄い火炎周縁部では $G_{fl+l} \simeq G_l$となると共に $I_{fl}/I_l^{(u)}$ も微小になるので，(26) 式より$\Delta i_{obs}{}^{(nu)}/i_{obs}^{(u)}$はいずれの場所でも小さく，この相対誤差で (24) 式の$\Delta i_{obs}/i_{obs}^{(s)}$ を評価すると，結局ランプ光の非一様性が K_Γの光路積分値を大きく変更することはないことがわかる．

次に，参照ランプ光輝度 I_lが観測面上で一様でない場合に，観測量 I_{fl+l}，I_{fl}および I_lに観測誤差が混入する状況を考える．観測誤差の発生源としてはイメージインテンシファイヤーを用いる場合などに生ずる検出器系ノイズや迷光などが考えられる．模式図 Fig.4(a) の一点鎖線は，I_{fl+l}，I_{fl}および I_lのそれぞれが空間的に一定な正値誤差を含む場合の K_Γの光路積分値を示している．実線はこれらの観測誤差が無い場合の光路積分値になっている．本例では，各正値誤差の大きさは I_lのピーク値の 1.4 %で相等しいとしている．ランプ光は先の例と同様の y方向分布をもつとする．また観測量のそれぞれに含まれる誤差がどこでも光路積分値を見掛け上増加させる場合のみを扱っている．異なる観測誤差によっては光路積分値が逆に部分的或いは全体的に減少することも考えられる．Fig.4(a) の一点鎖線で示される光路積分値から Abel 変換により再構成される K_Γの分布は同図 (b) 中の一点鎖線にな

る．再構成値分布を y 方向に観ると，ランプ光が強く空間変化も緩やかな中央部では観測誤差が無い場合の再構成値 (実線) と同程度の値で再構成されているが，ランプ光がピーク値の五分の一以下まで低下している周縁部では大きな再構成誤差が生じている．Fig.4(a) から，これはランプ光が弱いところでは光路積分値に100%近い誤差がもたらされることによる．

4　結論

本報では，火炎噴流中のカリウム原子数密度分布を逆問題的アプローチにより観測光から再構成する方法に関する考察を行なった．得られた結論をまとめると以下のようになる．

1. 空間･周波数積分された輻射輸送方程式に対して Tikhonov の正則化を適用することにより，吸収係数の観測周波数領域および光路についての積分を同方程式の近似解として得た．また，近似解の正則化定数を含む修正因子を，画像データおよび最大光学厚さの光路を見込む観測点での分光測定から与えることを提案した．以上の手法に立脚して，画像データから，非対称 Abel 変換による再構成法によりカリウム原子の二重共鳴線を含む周波数帯で積分された吸収係数の局所値を与え，更にカリウム原子の局所数密度を導出する方法を示した．

2. ファントムデータによる数値的評価の結果，筆者らが提案する方法による再構成では，高密度部は実際より低く再現され，また低密度部では高く再現される傾向があることがわかった．ピーク数密度が 1×10^{19} [#/m^3] の場合で平均相対誤差は 13%であり，ピーク数密度が高くなるほど平均相対誤差も増加する．

3. 参照ランプ光の空間的非一様性は，単独では再構成に大きな影響を及ぼさない．観測面から観て火炎の中央部から周縁部にかけて輝度を下げる非一様なランプ光が用いられ，更に観測値に誤差が混入する場合には，周波数積分された吸収係数の光路積分値に対し誤差によりもたらされる増減にランプ光の強弱が影響する．特にランプ光の弱い周縁部ではこの影響が大きく現れる．

今後，実際の観測実験データから火炎中のカリウム原子数密度の再構成を行なうと共に，原子吸光法などの従来法による数密度推定の結果と照合し，本研究で提案している方法の有効性を検証する予定である．

最後に，本研究遂行にあたり数値計算に助力いただいた大学院生長谷部滋則氏 (現富士通株式会社)，原子工学科学生丹羽忍氏 (現北海道庁) 並びに有益な助言をいただいた名古屋大学高温エネルギー変換研究センター助教授 (北海道大学エネルギー先端工学研究センター客員助教授併任) 北川邦行氏に感謝申し上げます．

(1999 年 8 月 5 日受付)

参考文献

[1] 村岡克紀, 前田三男, プラズマと気体のレーザー応用計測, (1995), 産業図書.

[2] R. F. G. Meulenbroeks, R. A. H. Engeln, J. A. M. van der Mullen and D. C. Schram, Coherent anti-Stokes Raman scattering performed on expanding thermal arc plasmas, Physical Review E, Vol.53, No.5 (1996), pp.5207-5217.

[3] K. Wakai, K. Kamiya, S. Sakai and S. Shimizu, Instantaneous Measurement of Two Dimensional Temperature and Density Distributions of Flames by a Two-Band-Emission-CT Pyrometer, The International Symposium on Infrared Technoloty XVIII, (1992).

[4] A. J. M. Buuron, D. K. Otorbaev, M. C. M. van de Sanden, D. C. Schram, Absorption spectroscopy on the argon first excited state in an expanding thermal arc plasma, Phys. Rev. E, Vol.50, No.2 (1994), pp.1383-1393.

[5] D. K. Otorbaev, A. J. M. Buuron, N. T. Guerassimov, M. C. M. van de Sanden, D. C. Schram, Spectropcopic measurement of atomic hydrogen level populations and hydrogen dissociation degree in expanding cascaded arc plasmas, J. Appl. Phys., Vol.76, No.8 (1994), pp.4499-4510.

[6] H. R. Griem, Plasma Spectroscopy, (1964), McGraw-Hill.

[7] 山本学, 村山精一, プラズマの分光計測, (1995), 学会出版センター.

[8] Y. Watanabe, T. Ikegami, M. Maeda, K. Muraoka, M. Akazaki, SONRES for Measurement of Relative Spatial Seed Distribution in Channel of MHD Power Generator, Jpn. J. Appl. Phys., Vol.20, No.8 (1981), pp.1597-1598.

[9] H. Oyama, S. Yatsu, S. Hasebe, Y. Aoki, N. Kayukawa, The Estimation of The Seed Atom Distribution in MHD Plasmas from Image Data, Pro. 12th International Conference on MHD Electrical Power Generation, Vol.2 (1996), pp.707-712.

[10] W. Menke, Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory, (1984), Academic Press, Orlando.
[11] 吉田耕作, 積分方程式論, (1950), 岩波書店.
[12] C. W. Groetsch, Inverse Problems in the Mathematical Sciences 1. Auflage, (1993), Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH.
[13] 先端工学における逆問題手法 (I), 日本 AEM 学会誌, Vol.6, No.1 (1993), pp.53-61.
[14] 長山好夫, プラズマ診断における CT(計算機トモグラフィー) の応用, 核融合研究, Vol.62, No.6 (1989), pp.427-445.
[15] Y. Yasutomo, K. Miyata, S. Himeno, T. Enoto, Y. Ozawa, A New Numerical Method for Asymmetrical Abel Inversion, IEEE Trans. Plasma Science, Vol.PS-9, No.1 (1981), pp.18-21.
[16] 河村洋, 土方邦夫 編, 熱と流れのシミュレーション, 9 章, (1995), 丸善株式会社.
[17] N. Kayukawa, On the applicability of optical depth-atomic absorption relationship to measurements of alkali seeded combustion flames, Thermochimica Acta, 267, (1995), pp.107-115.