

特集

第 11 回電磁力関連のダイナミックスシンポジウム

電磁力に関わる非線形力学の基礎研究の一方向性

A trend of fundamental study on nonlinear dynamics
related to electro-magnetic force

引原隆士 (京都大学)

Takashi HIKIHARA

In this paper, a trend of fundamental study in electro-magnetic dynamical fields is discussed based on the original results of nonlinear dynamics. In this decade, the concepts of controlling chaos, chaos synchronization, and complexity have been widely discussed for the application of chaotic phenomena. These studies were strongly based on the insights of the real nonlinear phenomena and its characteristics obtained in the early works of the nonlinear dynamics and chaos. It seems that the new and interesting researches are still beside us.

Key Words : nonlinear phenomenon, modeling, spatio-temporal dynamics, chaos, spatio-temporal expansion.

1 まえがき

非線形力学の研究の歴史的変化を踏まえずに、非線形に関わる基礎研究の方向性を論じることはできない。それらの数学に置ける経緯は力学系の書籍 [1] に詳しい。また世界の研究と日本の研究の関係は近々 Abraham らによりまとめられることになっている [2]。工学の分野において非線形力学の研究はどのように位置づけられるのであろうか。もちろん工学系でも物理や数学を研究テーマとしている場合もある。ここでは純粋に (?) 明治以後に官製で枠組みされた工学分野のことを言う*。工学を代表する機械系、土木系、電気系などで重要な Duffing 方程式, van der Pol 方程式, Mathieu 方程式などの低次元常微分方程式が、工学

装置、構造物の力学モデルから生まれてきたものであることは周知の所である。それらを原典に遡って、そのモデルで見ようとしたものを再度認識するところから非線形力学の今後の方向性が生まれる。そしてモデルありきの議論ではなく、自らモデルを創出していくことで非線形力学の今後の基礎研究の展開があり得るのではないかと考えられる。

まず、1950 年代以後の非線形力学の分野の動きを乱暴ではあるが簡単に眺める。それは、1960 年代のカオス発見とその再発見の時期を大きな転換点としている。これらの研究は 1970 年代のカオスの認知とその物理的普遍性の発見によるブームを経て、1980 年代のカオス研究の成熟期 (飽和期) を迎える。このブームが一段落し、改めてカオスを含めた非線形現象が非線形力学全般の中で改めて問い直し始められたのもこの時期である [3]。そして、結合系に見られる高次元系、無限次元系の解析に興味を持たれ始め、複雑系のブーム、脳や心臓などの生態系を研究対象としたプロジェクトが国内外で立ち上がった。そして 80 年代末には、非線形現象のシンボリックに (ペットネームとして [4]) もてはやされたカオス現象、フラクタル性等の存在が広く一般に認知された [5]。その結果多くの研究者が新たな研究 (成果) 対象を探して分野を変えた。同時にこれまで非線形力学と縁の薄かった分野でシステムの動力学に関する興味生まれ、カオスなどの非線形現象が再発見されるに至った。その動きが経済学などの分野などでの複雑系ブームを創出し、現在に至っている [3][6]。

次に、工学、特に電磁力関連の非線形の研究の基礎研究のあり方がどうであったかを眺めてみる。工学特に力学に関わる分野の研究者が低次元の振動子の研究を始めた際に必ず目にするのが Duffing 方程式である。その多くがバネの単振動子の復原力が非線形特性を有した際のモデルとして説明されている。ところが、

*日本の工学は江戸時代の和算でなく算版に始まる計算学に由来するとする数学者もいる。明治政府が奨励したのは富国強兵に関連する計算学であり、合目的に工学にその使命を与えられたのであろうか。その結果か、未だに日本では関連分野でありながら工学と理学は越すに越されない大きなギャップを有している。

Duffing 方程式のモデルの正しい起源を知る人は意外に少ない。Duffing の著作 [7] に自らが述べているようにこのモデルは、三相同期電動機の力学モデルとして導出されたもので、その考え方のベースは Rayleigh [8] の振動の数学的表現に基づくものである。まさに、工学機械である同期電動機のモデルとして導出されたものなのである。だからどうしたのだとせばそれまでであるが、このモデルを導出する過程で彼が切り捨てたもの、残したものは何だったかと言う点が重要だと考えられる。特に、現在そのモデルの原典を間違えて伝えられるほどその方程式が力学系に普遍的な特徴を備えていることは、驚きに値する。また、弛張振動子として知られる van der Pol の方程式は良く知られているように、真空管発振器のモデルから生まれたものである [9]。工学的な装置、機器の力学的な動作は詳細に記述すればほとんどは非線形システムであるが、それらをここまで簡約した形に表現したことが彼らの成果の最も重要な点であろう。特に、計算機が無かった時代に定性的に状態を把握する手段を持つという考え方が現在の科学にもたらしている恩恵を感じずにはいられない。逆に計算に頼りすぎる今、現象のモデルを作り新たな分野を開拓していく雰囲気 (環境) は失われつつある。

さて、このような状況において、電磁力関連の分野において非線形力学に関わる基礎研究の方向性を見つめ直し、非線形現象をてなづけて利用するにはどうするかを改めて問い直すことが重要ではないであろうか？

以下、現実の物理現象とモデルの構築、結合系の研究に関して、さらに非線形現象の工学的利用に関する視点から著者の成果に基づいて述べる。

2 物理現象とモデルの構築

非線形システムの数式モデルとは何であろうか？それは物理系で着目する現象の特徴を近似の精度内で記述するための数学的表現であることは言うまでもない。従って、現実の系を離れて議論することは数学的に意味を持って、工学的には意味をなさない。ところが、物理現象をモデル化することに昨今あまり重点が置かれていないように思われる。地道な研究の汗の結晶であるモデルを引用するだけで拝借し、その 2 次近似を数値精度を上げて求め、あらゆる状態に対して物理現象の本質を外れて、解集合を求めていくといった研究が多すぎないであろうか？

一般に常微分方程式の解析として平均法などの近似的方法により基本振動の振幅変化を追いかける常套手段は、定常振動の解析法として非常に有力である。しかしながら、この方法により分岐を追いかけても分岐点近傍における検知成分の変化しか見ることができず、応答の詳細は Runge-Kutta 法などのアルゴリズムにより時間を適当な幅に分割する近似的数値解法に頼らざるを得ない。従って、計算精度を上げていく方法論は重要であり、精度を確保しながら近似解を求めていくことも、解の存在性を保証する解法として重要である。

この意味では、非線形システムに関わる研究はモデルが提示されさえすれば、精度を保証して現象の求解が可能になりつつある。求解可能なシステムの非線形の族を明確にできれば、その意味での研究は終了する。しかしながら、これでも物理システムについては完全な理解はできていない。つまり、還元主義の科学的手法の限界がある。線形近似が成立するという区間をいくら継ぎ接ぎしても解析できない非線形系が厳然と存在する。たとえば、スイッチ特性などは数学的な記述法自体が未解決で、摩擦特性 [10] やバックラッシュ等の記述はこの方法では無理がある。このような系におけるダイナミクスを数学的枠組みまで含めて立ち上げていくことは、今なお野心的なテーマと考えられる。電磁機械系では磁気ヒステリシスなどのモデルが重要であるが、プライザッハモデルや伝達関数モデルなど、その特性を表すモデルは多々ある。しかし、現象から言えば初期値に対して一意に存在しない厳密解を数値的に求めることは困難であり、何らかの記述方法自体を採る必要がある。これもまた、今後の発展を待つのみである。さらには、静的な現象モデルは容易に得られるが、動的モデルは未だ不十分で、その様な特性のある系のダイナミクスを解析することは大きなテーマである。この意味では、高温超電導体の磁化特性や力のヒステリシスは、静的な記述ができて、組み込まれたシステムのダイナミクスの数理的な理解には限界があり、現象の把握無しに解析することに意味はない。

一方、電磁機械系には分布構造を持つシステムが有る。特に梁や鉄板などの機械的構造をモデル化する際には、微小領域の応力に基づく偏微分方程式モデルをガレルキン法などにより空間的な基本モードで近似する。これは時間領域における平均化法と同じで、ある基本振動以下の波長のモードについては平均的に無視する。一般にこの時点で、元の系に考慮する空間的

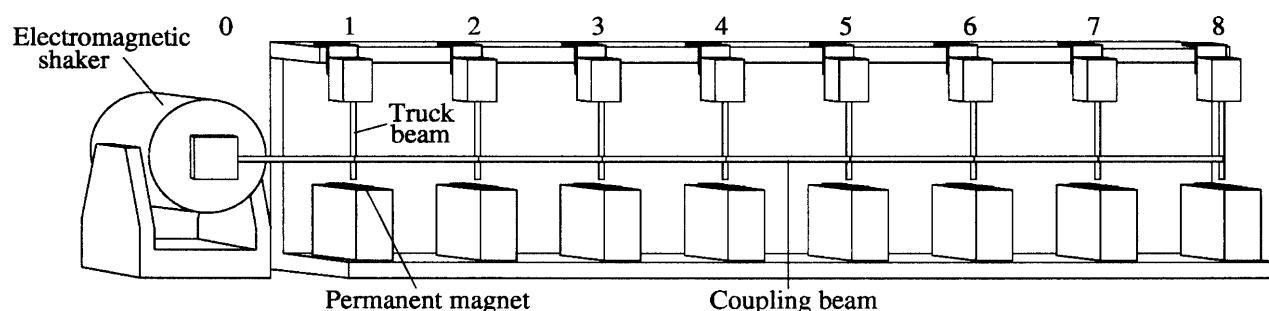


Fig. 1: Coupled magneto-elastic beam system.

Table 1: Classification of dynamical system.

	space	time	state
Partial Differential Eq.	C	C	C
Iterated Functional System	C	D	C
Oscillator Chain	D	C	C
Coupled Map Lattice.	D	D	C
Cellular Automata	D	D	D

(C : continuous and D : discrete)

な運動を仮定したことになる。現実の物理システムの多くには多様な非線形性があり、上述の方法で扱える非線形のクラスには限界がある。

一般に、時間・空間離散モデルは着目する現象毎にその近似を変えて議論せざるを得ない。このような解析による結果が妥当なものであるか否かが問題になる。結合系の研究には、時間空間に関して次の Table 1 が示されている [12]。

この表の偏微分系とセルラーオートマトンの間の力学系を詰めていくことで、これまで単振動子の研究で蓄積された非線形に関する理解を偏微分方程式で表される現象にまでつないでいくことが可能となる。可積分系のように評価の指標のある場合を除くと、現象にリファレンスを取らずにその目標を達成することは不可能である。

3 磁気弾性連鎖系の物理現象

ここで Fig.1 のような電磁機械系を考える。このシステムは鋼板の磁気浮上システムの振動に着目した実験モデルである。一つ一つの振動子は Duffing 方程式であらわされる振動子で、それが空間的に連続な梁で結合された“おもちゃ”である。工学的なシステムとのアナロジーを言うことはできるが、それよりもここに現れる物理現象を如何に記述するかを考えることが意義深い。

通常、梁や鉄板などの機械的構造をモデル化する際には、上述した様に偏微分方程式モデルをガレルキン法などにより解析的に議論できる。一方、分子構造模型などでは、検討する波動の波長に対して空間格子の格子幅が十分に小さければ、連続体近似（長波長近似）がなされ、格子の常微分系から偏微分系にモデルが変換され、偏微分方程式の解析法が適用される。これらの方法の適用限界は言うまでもなくその仮定にある。

上記磁気弾性系は、機械的な梁としては連続体であるが、磁気的な作用力は空間的に離散的に存在している。従って長波長近似はできない。その意味で、空間離散時間連続な結合系である。しかしその機械的な連続性から弾性波の連続性があり、ちょうど偏微分系と結合振動子系の中間に位置づけられる。

弾性的に連続で磁気的に不連続な物理系は、電磁機械系に多々見られる構造である。この解析を偏微分方程式で扱うか、結合形常微分方程式で扱うかは、その着目する現象により異なる。これらの系で振動の節が空間的に移動する現象が実験的に見られる。すなわち波動の伝搬である。この節の移動を力学的に理解するにはどのような観点から解析を行えば良いかという根元的問題が未だに明確にはされていない [21][22]。

4 時間遅れを含む系の物理的理解

磁気弾性梁の振動において、その低次モードに見られるカオス現象を状態フィードバックにより不安定平衡点に安定化させることができる。磁気弾性系に生じるカオス振動が、時間遅れフィードバックにより微小入力で不安定平衡点状に安定化できることが著者により実験的に示された [13][14] (Fig.2 参照)。カオス制御の方法として、良く知られた OGY 制御 [15] と Pyragas [16] による時間遅れを用いた連続時間制御則がある。OGY 法については早くから線形制御理

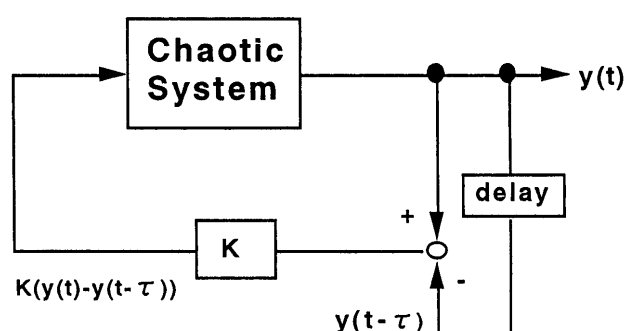


Fig. 2: Delayed feedback controlled magneto-elastic beam system.

論で理解されており、また適用されてきた。その限界が位相空間において不安定不動点が求まっていなければならない点にある。一方、Pyragas の方法については、フロケ解の安定性より漸近安定性が検証されているが [17][18][19]、大域的な安定化のメカニズムは明確でない。

この遅れ時間フィードバック制御による安定性を議論する方法について様々な試みがなされている。これまでのアプローチは少し見方を変えると、なぜその解に収束するのかを明確に説明はしていない。単に初期値と言うことで片づけられないのがこの遅れ系である。なぜならその状態は遅れ期間の状態関数とその後の解を決定するので、単純に変数の初期値の安定解への引き込み領域で議論ができないからである。

このようなシステムの解析の手法として、著者らはシステムの時間応答を時間空間状態空間へ展開法を提案した [21]。これは、時間遅れ系をその遅れを連続状態空間とし、離散時間毎に発展する系として考えることに相当する。その結果、遅れフィードバック制御による解の安定化の過程が、この時間離散、空間連続な状態空間における解の変化として現れ、それが波動の伝搬と同様に定在波に漸近収束する場合が時間遅れフィードバックにより安定化できう場合と解釈できる。この様な手法は時系列を離散関数列に置き換えたことになるため、制御の分野ではリフティングとして知られる解析手法に共通点を持つ [20]。

Fig.3 に、時間遅れ系の時空状態空間への展開の意味を模式的に示す [21]。Fig.4 に実験的に磁気弾性梁のカオス振動が遅れフィードバック制御により安定化する場合について示す。この様に、制御の結果状態が安定化することで遅れフィードバック量は無くなる。

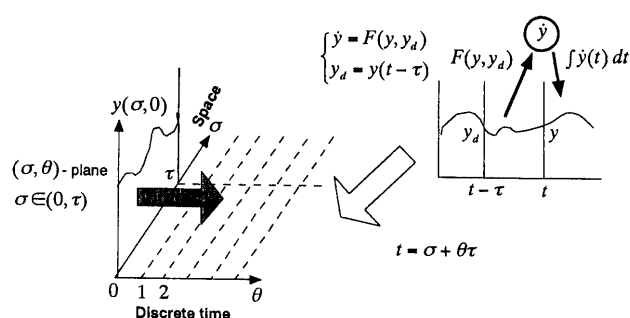


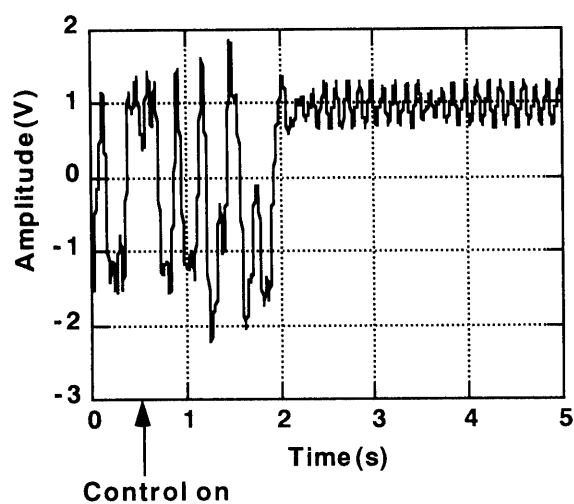
Fig. 3: Explanation of spatio-temporal expansion.

しかし、その過程で、遅れに展開した空間において生じる変化が離散時間と共に移動、すなわち伝搬していることがわかる。一方、同じ系で安定化が失敗した場合には、一見落ち着いたかに見える遅れに展開した状態が実は節のある波で、これが安定ではなく時間と共に崩れて再び伝搬を始める結果が得られた (Fig.5 参照)。

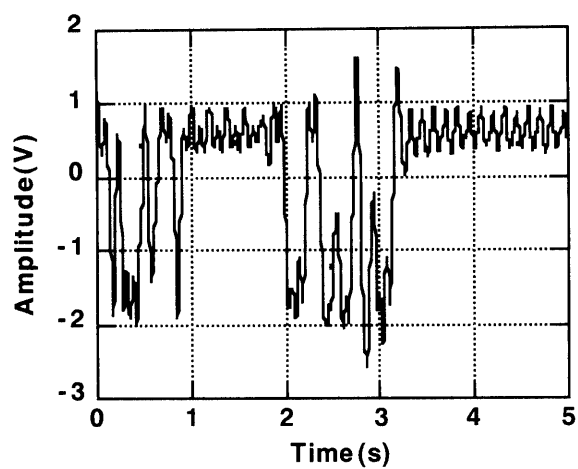
ここに得られた結果は、逆に他の系における安定な波とは何かについての洞察を喚起することになる。これまで著者らは、前節で述べた磁気弾性連鎖系に関して、物理的実態としての波の伝搬と安定性について、結合振動子系の解析に従って議論してきた [22]。その考え方はここでは、関数空間の力学系に適用できることになる。Table 1 にある、時間離散・空間連続・状態連続な系はまさにここに示したような系を扱うことに相当する。この様なシステムにおける解の安定性の議論はまだまだ始まったばかりである。

5 おわりに

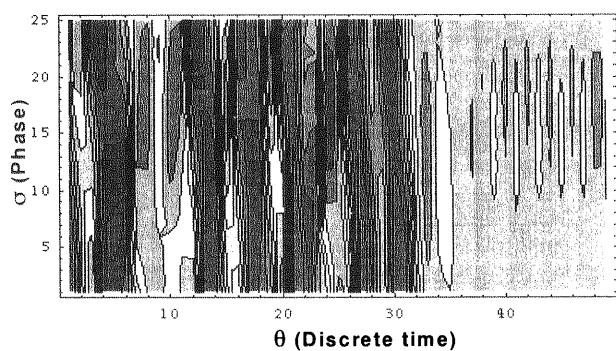
Duffing 方程式, van der Pol の方程式といえどもその原点は本文に述べたように同期電動機、真空管発振器の動作の記述方程式である。新しいシステムの物理現象を扱うならば、現象を熟知した上でモデルを構築することが重要であり、またその様な新しいシステム、現象のモデル化の中でしか新しい概念形成は生まれないのではないかと考えられる。モデルを数値計算する前になすべき事が多々在るのではないだろうか。確かに数値シミュレーションに従って数々の新しい解析がなされ、現象からは見えない本質的な理解が進んでいる。この様な現象の理解の程度が、数値計算の方法の選択にそのまま現れ、それが研究の程度を決め



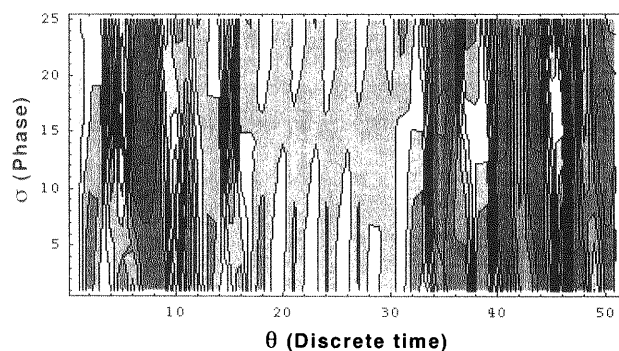
(a)



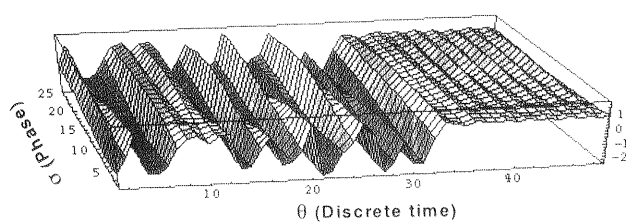
(a)



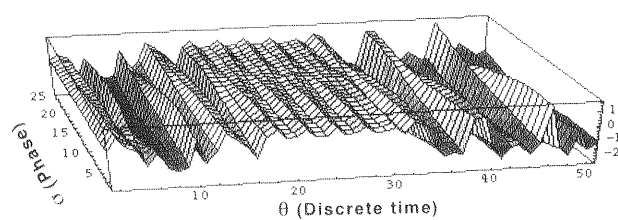
(b)



(b)



(c)



(c)

Fig. 4: Stabilizing process of delayed feedback control.

Fig. 5: Unstable state by delayed feedback control.

ているといっても過言ではない。

師の言葉に、「非線形現象をてなずけるには、四六時中非線形現象を眺め続けければ良い。そのうちに非線形現象にてなずけられる。その時を待てばよい」がある[23]。それが真理であり、本質的な研究テーマに挑むために不可欠な態度であると思う。自ら熟知しない現象に安易な手法や洞察で結論を下し公表することは罪惡に近い。その意味でも研究の規範を現象にとり、そのスタンスを明確にすることは重要である。

電磁力関連のダイナミクスの分野で非線形現象をてなづけることができる時、それは現象の正確な理解の上にモデルが形成され新たな問題がクリアにされたときと言える。その様な方向性を持った研究が今後益々重要となるであろう。

本解説では、著者の成果を例に取り、電磁力関連の基礎研究の一方方向性について述べた。安易な研究への苦言と共に、未開拓な分野への入口を示した。これらの分野への読者の果敢な挑戦を期待したい。

本内容は、第 11 回電磁力ダイナミクスシンポジウムにおける講演“電磁力ダイナミクスの基礎研究の方向性”に、第 13 回回路とシステム（軽井沢）ワークショップ（2000.4.25）における招待講演“非線形問題へのアプローチとは”の内容を加えて新たに原稿を起こしたものである。

謝辞： Duffing の文献の調査にご協力いただきました、東京大学 大崎博之先生に御礼申し上げます。

参考文献

- [1] 青木統夫, 白岩謙一, 力学系とエントロピー 第 1 章, 共立出版, (1985).
- [2] R. Abraham, The Chaos Revolution, a Personal View, Lecture in Kyoto University, (1998).
- [3] C. Grebogi and J.A. Yorke (Eds.), The Impact of Chaos on Science and Society, United Nations University Press, (1997), (訳) カオス・インパクト, 森北出版, (1999).
- [4] Y. Ueda, Private communication.
- [5] J. Gleick, Chaos, Viking, (1987), (訳) カオス, 新潮社, (1991).
- [6] 西村和雄編著, 複雑系経済学とその周辺, サイエンス社, (2000).
- [7] G. Duffing, Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung (Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig).
- [8] J.W.S. Rayleigh, The Theory of Sound, 2nd. Ed., (Dover, New York, 1945, (Original 1894)).
- [9] B. van der Pol, On relaxation oscillations, *Pil. Mag.*, (1926), p.978.
- [10] T. Hikiyara, Y. Kondo and Y. Ueda, Stress wave propagation in one-dimensionally coupled stick-slip pendulums, *IEICE Trans. on Fundamentals*, Vol.E82-A, No.9 (1998), (in press).
- [11] K. Yamamura and M. Ochiai, An efficient algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits, *IEEE Trans. CAS-I*, Vol.39(3), (1992), pp.213-221.
- [12] J.P. Crutchfield and K. Kaneko, Phenomenology of Spatio-Temporal Chaos, Hao Bai-lin (Ed.) Directions in Chaos, World Scientific, (1987).
- [13] T. Hikiyara and T. Kawagoshi, An experimental study on stabilization of unstable periodic motion in magneto-elastic chaos, *Physics Letters A*, 211, (1996), pp.29-36.
- [14] T. Hikiyara, M. Touno and T. Kawagoshi, Stabilization of unstable periodic orbit in magneto-elastic chaos by delayed feedback control, *Int. J. of Bif. and Chaos*, Vol.7, No.12 (1997), pp.2837-2846.
- [15] Ott, E., Grebogi, C. and Yorke, J.A., Controlling chaos, *Physical Review Letters*, 64(11), (1990), pp.1196-1199.
- [16] Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters*, 170, (1992), pp.421-428.
- [17] K. Konishi, M. Ishii and H. Kokame, Stabilizing unstable periodic points of one-dimensional nonlinear systems using delayed feedback signals, *Phys. Rev.*, E54 (1996), pp.3455-3460.
- [18] T. Ushio, Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems, *IEEE Trans. Circuit Syst. I*, Vol. 43, No. 9 (1996), pp.815-816.
- [19] H. Nakajima and Y. Ueda, Limitation of generalized delayed feedback, *Physica D*, Vol.111 (1998), pp.143-150.
- [20] 藤岡, サンプル値制御って? リフティングって? システム/制御/情報, Vol.42, No.9 (1998), pp.409-510.
- [21] T. Hikiyara and Y. Ueda, An expansion of system with time delay into spatio-temporal state space, *Chaos*, 9(4) (1998), pp.887-892.
- [22] T. Hikiyara, K. Torii and Y. Ueda, Wave and Basin Structure in Spatially Coupled Magneto-Elastic Beam System - Transition between Coexisting Wave Solutions -, *Int. J. of Bif. and Chaos*, (to appear).
- [23] Y. Ueda, Private communication.