

特集 **逆問題****ラプラス方程式のコーシー問題と逆向き熱伝導方程式の直接解法****A direct numerical method for the Cauchy problem of the Laplace equation and backward problem of the heat conduction equation**

大西 和榮 (茨城大学)

飯島 健太郎 (茨城大学院)

Kazuei ONISHI Member
Kentarō IIJIMA

An inverse boundary value problem for the Laplace equation is considered for the first topic. The Dirichlet and the Neumann data are prescribed on respective part of the boundary, while there is the second part of the boundary where no boundary data are given. This ill-posed problem of finding unknown values along the whole boundary is reformulated in terms of the variational problem, which is then recast into primary and adjoint boundary value problems of the Laplace equation in conventional forms. A direct method for numerical solution of the boundary value problems using the boundary element method is presented. When a temperature distribution on a boundary of a heat conductor for each time and a temperature distribution in the domain at the present are given, the problem of looking for the temperature distribution on the past in the domain is called a backward heat conduction problem. We construct a high order finite difference method for the second in order to solve this ill-posed backward heat conduction problem. Our method consists of replacing a derivative of a function with a linear combination of the values of the function at arbitrary locations. In numerical experiments we reconstruct a solution of the one-dimensional backward heat conduction problem under the Dirichlet boundary condition.

Key Words: Inverse problem, variational method, direct numerical identification, boundary element method, high order difference method, arbitrarily located quadrature points, mesh free method, isolated essential singularity

1 緒言

偏微分方程式の逆問題として、おそらく最も典型的な話題であるラプラス方程式のコーシー問題と逆向き熱伝導方程式を取り上げる [1]。これら 2 つの逆問題が数学的な意味から非適切であることはどうしようもない事実であるが、解くべき状況を制限すると、数値

解法の立場からは、そのような非適切性はさほど障害とは感じられないばかりではなく [2]、今後の数値解法の分野に新しい観点を開く手法を招来するかも知れないことを示すことが本報の目的である。

逆問題の数値解法では勢い反復法が主流であった。本報においては直接的な解法として、境界要素法を応用した方法と、メッシュフリーの高精度差分法を、ラプラス方程式のコーシー問題と逆向き熱伝導方程式へ適用した事例を示す。

連絡先: 大西和榮, 〒 310-8512 水戸市文京 2-1-1, 茨城大学理学部, e-mail: onishi@mx.ibaraki.ac.jp

2 ラプラス方程式のコーシー問題

2.1 ラプラス方程式のコーシー問題とは

2次元 xy -座標平面 R^2 内の区分的に滑らかな曲線 Γ で囲まれた領域を Ω とする。この領域の内部で未知関数 $u(\mathbf{x})$ についてのラプラス方程式

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \quad (1)$$

を考える。境界曲線 Γ の一部 γ において、 $u(\mathbf{x})$ の値 $\bar{u}$ と、その外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ 方向の微分係数 $\partial u(\mathbf{x})/\partial n$ の値 $\bar{q}$ が与えられているとき、すなわち

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = \bar{q}, \quad \mathbf{x} \in \gamma \subset \Gamma \quad (2)$$

のとき、(1) と (2) を満たす $u(\mathbf{x})$ を Ω 全体において求めることがラプラス方程式 (1) に対する伝統的なコーシー問題 (初期値問題とも言われる) である。

この節では伝統を幾分緩めて、境界曲線 Γ の一部の弧 Γ_u で $\bar{u}$ が与えられ、かつ Γ の一部の弧 Γ_q で $\bar{q}$ が与えられたとき、すなわち

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = \bar{q}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q \quad (4)$$

のとき、(1), (3), (4) を同時に満たす $u(\mathbf{x})$ を Ω 全体において求めることを問題とする。

2つの弧 Γ_u と Γ_q とが一致すれば、この問題は伝統的なコーシー問題となる。 Γ_u と Γ_q に共通部分がなく、かつ Γ_u と Γ_q とを合併すると Γ 全体となるとき、問題 (1), (3), (4) は混合境界値問題と呼ばれ、これも伝統的な問題の1つである。これらの他、過剰決定系や不足決定系も問題 (1), (3), (4) の枠組に入っている。

このようなわけで、 Γ_u と Γ_q 相互の位置関係やデータ $\bar{u}, \bar{q}$ に応じて問題 (1), (3), (4) の解は存在することもあると存在しないこともあり、たとえ存在したとしても、一意に存在するとは限らない。解が存在するためには、与えられたデータ $\bar{u}, \bar{q}$ は次節の境界積分方程式 (9) を満たす必要がある ([3] p. 287 注意 5.3)。このような問題の数値解法に関する最近の研究については [4] の参考文献がある。

2.2 コーシー問題の解法

境界 Γ に対する弧 Γ_u の残りの部分 (補集合) を $\Gamma_u^c = \Gamma \setminus \Gamma_u$, Γ に対する Γ_q の残りの部分を $\Gamma_q^c = \Gamma \setminus \Gamma_q$ で表す。コーシー問題 (1), (3), (4) の解が存在するかしないかに拘らず、汎関数

$$J(\omega) = \int_{\Gamma_q} |q(\mathbf{x}; \omega) - \bar{q}(\mathbf{x})| d\Gamma(\mathbf{x}) + \eta \int_{\Gamma} |q(\mathbf{x}; \omega)|^2 d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (5)$$

を最小とする $\omega(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \Gamma_u^c$) を求める変分問題を考える。ここに、 $q(\mathbf{x}; \omega) = \frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{x}; \omega)$ であり、 $u(\mathbf{x}; \omega)$ は次の第1種境界値問題の解とする。

$$-\Delta u(\mathbf{x}; \omega) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (6)$$

$$u(\mathbf{x}; \omega) = \bar{u}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (7)$$

$$u(\mathbf{x}; \omega) = \omega, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u^c \quad (8)$$

式 (5) の実数 $\eta > 0$ は、正則化項に含まれる正則化パラメータである。境界値 ω を与える毎に解 $u(\mathbf{x})$ が決まることを強調するために、 $u(\mathbf{x}; \omega)$ と書いた。

問題 (6)–(8) の解は、次の境界積分方程式を満足しなければならないことが知られている [5] [6]。

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(\boldsymbol{\xi})}{2\pi} u(\boldsymbol{\xi}; \omega) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{x}; \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ = - \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{x}; \omega) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \Gamma \quad (9) \end{aligned}$$

ここに、 $\Theta(\boldsymbol{\xi})$ は境界 Γ 上の点 $\boldsymbol{\xi}$ から領域 Ω を臨むときの内角の大きさをラジアンで測った値である。また、 $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ は2次元ラプラシアン Δ の基本解であり、2点 $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}$ 間の距離 $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ を用いて $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = (-1/2\pi) \ln \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ で与えられる。

汎関数 $J(\omega)$ の最小値は、 $J(\omega)$ の第1変分 $J'(\omega)\delta\omega$ におけるフレッシュ微分 $J'(\omega)$ がゼロとなるような最小化関数 $\omega(\mathbf{x})$ で与えられる。実際、このような $J'(\omega)$ は

$$J'(\omega) = \frac{\partial}{\partial n} v(\mathbf{x}; \omega), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u^c \quad (10)$$

で与えられることが知られている [7]。ここに、 $v(\mathbf{x}; \omega)$ は次の第1種境界値問題の解とする。

$$-\Delta v(\mathbf{x}; \omega) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (11)$$

$$v(\mathbf{x}; \omega) = 2[(1 + \eta)q(\mathbf{x}; \omega) - \bar{q}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q \quad (12)$$

$$v(\mathbf{x}; \omega) = 2\eta q(\mathbf{x}; \omega), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q^c \quad (13)$$

問題 (6)–(8) は、汎関数 (5) に対する元問題と呼ばれ、(11)–(13) はこの元問題に対する随伴問題と呼ばれている。

随伴問題 (11)–(13) の解もまた、次の境界積分方程式を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(\xi)}{2\pi} v(\xi; \omega) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}; \xi) v(\mathbf{x}; \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ = - \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \xi) r(\mathbf{x}; \omega) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad \xi \in \Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

ここに、 $r(\mathbf{x}; \omega) = \frac{\partial}{\partial n} v(\mathbf{x}; \omega)$ である。

2つの境界積分方程式 (9) と (14) を境界要素法 [6] によって離散化した結果を、それぞれ

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} = -[\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\} \quad (15)$$

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{v}\} = -[\mathbf{G}]\{\mathbf{r}\} \quad (16)$$

と表す。境界 Γ 上に取られた節点の個数を n とするとき、 $[\mathbf{H}]$ と $[\mathbf{G}]$ は $n \times n$ の行列となり、 $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{q}\}$, $\{\mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{r}\}$ は u , q , v , r それぞれの節点近似値の n 次元列ベクトルである。

弧 Γ_u に属する節点の個数を n_1 とし、 Γ_q に属する節点の個数を n_2 とする。 $n_1^c = n - n_1$, $n_2^c = n - n_2$ とおく。列ベクトル $\{\mathbf{u}\}$ の成分のうちで Γ_u 上の節点値を集めて n_1 次の列ベクトル $\{\mathbf{u}_1\}$ を作り、残りを n_1^c 次の列ベクトル $\{\mathbf{u}_2\}$ とする。列ベクトル $\{\mathbf{q}\}$ の成分のうちで Γ_q 上の節点値を集めて n_2 次の列ベクトル $\{\mathbf{q}_2\}$ を作り、残りを n_2^c 次の列ベクトル $\{\mathbf{q}_1\}$ とする。すなわち、

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 & \text{on } \Gamma_u \\ \mathbf{u}_2 & \text{on } \Gamma_u^c \end{Bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_1^c \end{matrix} \quad (17)$$

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 & \text{on } \Gamma_q^c \\ \mathbf{q}_2 & \text{on } \Gamma_q \end{Bmatrix} \begin{matrix} n_2^c \\ n_2 \end{matrix} \quad (18)$$

列ベクトル $\{\mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{r}\}$ についても同様の分割を行い、

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 & \text{on } \Gamma_q^c \\ \mathbf{v}_2 & \text{on } \Gamma_q \end{Bmatrix} \begin{matrix} n_2^c \\ n_2 \end{matrix} \quad (19)$$

$$\{\mathbf{r}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 & \text{on } \Gamma_u \\ \mathbf{r}_2 & \text{on } \Gamma_u^c \end{Bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_1^c \end{matrix} \quad (20)$$

とする。これらの分割 (17)–(20) に応じて、(15) と

(16) を次のように分割する。

$$\begin{aligned} n \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{(1)} & \mathbf{H}_2^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} \\ = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^{(1)} & \mathbf{G}_2^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} n \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{(2)} & \mathbf{H}_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{Bmatrix} \\ = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^{(2)} & \mathbf{G}_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

元問題 (6)–(8) と随伴問題 (11)–(13) における境界条件を境界節点値ベクトルに書きなおした条件 $\{\mathbf{u}_1\} = \{\bar{\mathbf{u}}_1\}$, $\{\mathbf{u}_2\} = \{\omega\}$, $\{\mathbf{v}_1\} = 2\eta\{\mathbf{q}_1\}$, $\{\mathbf{v}_2\} = 2((1+\eta)\{\mathbf{q}_2\} - \{\bar{\mathbf{q}}_2\})$ と、(10) から得られる最小性の必要条件 $\{\mathbf{r}_2\} = \{\mathbf{0}\}$ を用いて、2つの方程式 (21) と (22) とを連立させる。その結果得られる $2n$ 元の連立1次方程式を未知節点値ベクトル $\{\omega\}$, $\{\mathbf{q}_1\}$, $\{\mathbf{q}_2\}$, $\{\mathbf{r}_1\}$ について解く。

正則化パラメータ η の値は、データ $\bar{u}$, $\bar{q}$ に含まれる観測誤差の大きさと、境界要素による離散化の精度に応じて適当に決めることが望まれるが、実際は、離散化された汎関数 (5) に基づく L-カーブ法 [8] によって決定する。

2.3 コーシー問題の数値例

コーシー問題の例を Fig. 1 に示す。内半径 1, 外半径 3 の厚肉円筒固体内の定常熱伝導問題となっており、問題の対称性を考慮して、図には半径 0.5 の冷却ダクトとともに円筒断面の 1/12 が示されている。円筒外表面 EF において表面温度 $\bar{u}$ と伝達熱流束 $\bar{q}$ がデータとして与えられており、さらに、冷却ダクト表面 CD 上ではニュートン冷却 $\bar{q} = \sigma(u - u_a)$ に従うものとする。ここに、 $\sigma = 0.4$ は熱伝達係数、 $u_a = 20$ は冷却水の温度を表す。境界 BC, DE, FA は対称面であるので $\bar{q} = 0$ となっている。外表面 EF での温度と熱流束を測定して、内表面 AB 上での温度を求めることが、ここでの問題となる。

全境界 ABCDEFA に沿う温度分布と熱流束分布を Fig. 2 に示す。この図において Forward のマーク

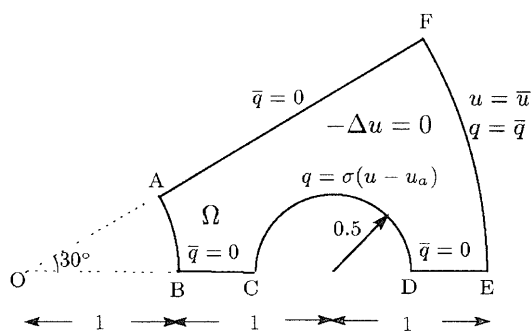


Fig. 1 Steady state heat conduction problem

は $\hat{A}\hat{B}$ 上で $\bar{u} = 200$, $\hat{E}\hat{F}$ 上で $\bar{u} = 15$ を与えた混合境界値問題の境界要素解である。Over-determined のマークは $\hat{A}\hat{B}$ 上での未知温度を, $\hat{E}\hat{F}$ 上で与えた $\bar{u} = 15$ と Forward での計算結果 $\bar{q}$ を用いて求めた境界要素解である。順問題と逆問題の計算結果を比較すると, 表面温度で 5%, 表面熱流束で 20% の誤差がみられた。さらに, 入力データに人工的に誤差を 5% ないし 10% ランダムに加えて正則化の効果を調べたが, L-カーブ法では明瞭な L 字型が得られず, $\eta = 0$ と取ってもよいと判断された [4]。

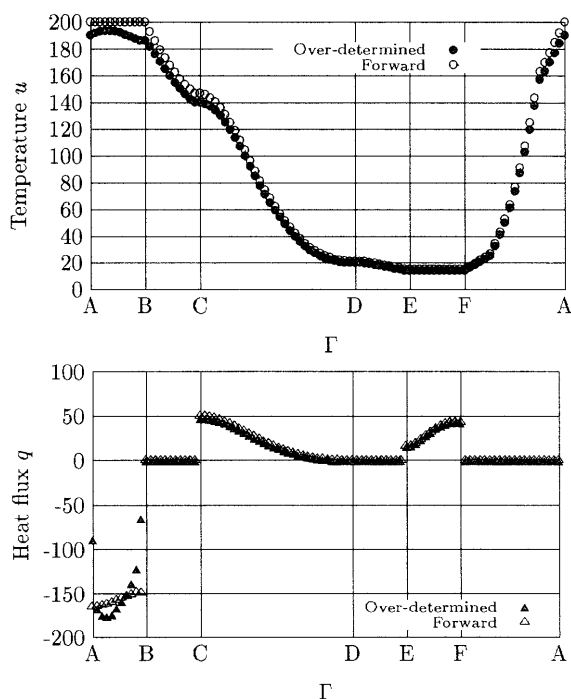


Fig. 2 Identified temperatures and heat fluxes

3 逆向き熱伝導問題

本節では, 任意の位置に求積点を配置できる高次の差分法を構成する。解が不安定となる逆向き熱伝導問題に対して本手法を適用する。

3.1 逆向き熱伝導問題とは

1次元逆向き熱伝導問題を考える。开区間 $(0, 1)$ によって表される熱伝導体内の点 $x_1 \in (0, 1)$ における時刻 $x_2 \in [0, T]$ での温度を $u(x_1, x_2)$ と表すことにする。ここで, $T > 0$ は最終時刻を表す。各時刻 $x_2 \in [0, T]$ における表面温度 $u_0(x_2)$, $u_1(x_2)$ と, 最終時刻 $x_2 = T$ における熱伝導体の温度分布 $u_F(x_1)$ が与えられたとき,

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2), \quad (23)$$

$$(x_1, x_2) \in (0, 1) \times [0, T],$$

$$\begin{cases} u(0, x_2) = u_0(x_2), \\ u(1, x_2) = u_1(x_2), \end{cases} \quad x_2 \in [0, T], \quad (24)$$

$$u(x_1, T) = u_F(x_1), \quad x_1 \in (0, 1) \quad (25)$$

を満たす $(0, 1) \times [0, T)$ 上の関数 u を求める問題を逆向き熱伝導問題という。

逆向き熱伝導問題は解が不安定であるという意味において非適切問題である [9]。さらに, 勝手な温度分布 $u_F(x_1)$ に対して解が存在するわけではなく, 然るべき実解析的な関数 $u_F(x_1)$ に対してのみ解は存在する ([1] p. 69)。逆向き熱伝導問題の数値解法に関する研究において, 多倍長計算とスペクトル選点法を用いることで, それぞれ丸め誤差と離散化誤差を任意に小さくする手法が既に提案されている [10]。

3.2 高次差分近似法

次項以降の表記法を簡略化するために多重指数を導入する。非負整数の集合 $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ の直積集合を $\mathbf{Z}_+^m = \overbrace{\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+ \times \dots \times \mathbf{Z}_+}^m$ と表す。元 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbf{Z}_+^m$ を多重指数という。多重指数 α の長さを $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ によって定める。ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ の長さとして $|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$ を用いる。ベクトル $\mathbf{x}$ のべき乗を $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ によって定める。多重指数 α の階乗を $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!$ に

よって定める。微分作用素 $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$ を $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$ と表す。

3.2.1 高次差分近似

求積点を任意の位置に配置できる高次の差分近似を導入する。 N 個の求積点 $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\mathbf{x}^{(j)} = {}^t(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}) \in \mathbf{R}^m$ およびベクトル $\mathbf{h} = {}^t(h_1, h_2, \dots, h_m)$, $\mathbf{h}^{(j)} = {}^t(h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, \dots, h_m^{(j)}) \in \mathbf{R}^m$ は $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x} + \mathbf{h}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ を満たすとする。ただし $\mathbf{x}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ は相異なるものとする。

実定数係数 a_α をもつ μ 階の線形微分作用素

$$P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha \partial^\alpha \quad (26)$$

に対し、導関数の値 $P(\partial)u(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ を $u(\mathbf{x}^{(j)})$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ の一次結合によって近似することを考える。すなわち、重み $w_j(\mathbf{h}) \in \mathbf{R}$ によって

$$P(\partial)u(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \sum_{j=0}^{N-1} w_j(\mathbf{h}) u(\mathbf{x}^{(j)}) \quad (27)$$

の形で表現する。近似 (27) を $P(\partial)$ の $\mathbf{h}$ と $\mathbf{h}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ に関する高次差分近似と呼ぶ。

近似式 (27) の各辺を $\mathbf{x}$ に関してフーリエ変換した式を等置することによって、重み $w_j(\mathbf{h})$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ を決定する。そのために、関数 u は $|\alpha| \leq \mu$ となるすべての α に対して $\partial^\alpha u \in L^1(\mathbf{R}^m) \cap L^2(\mathbf{R}^m)$ であるとする。このとき、関数 u のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[u](\xi) := \int_{\mathbf{R}^m} u(\mathbf{x}) e^{-\sqrt{-1}\xi \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \xi \in \mathbf{R}^m$$

によって定義される。このフーリエ変換において、

$$\mathcal{F}[P(\partial)u](\xi) = P(\sqrt{-1}\xi) \mathcal{F}[u](\xi), \quad (28)$$

$$\mathcal{F}[u(\cdot + \mathbf{h})](\xi) = e^{\sqrt{-1}\xi \cdot \mathbf{h}} \mathcal{F}[u](\xi) \quad (29)$$

が成り立つ。

近似式 (27) の各辺をフーリエ変換すると、フーリエ変換の性質 (28), (29) より、左辺と右辺はそれぞれ

$$\mathcal{F}[P(\partial)u(\cdot + \mathbf{h})](\xi) = P(\sqrt{-1}\xi) e^{\sqrt{-1}\xi \cdot \mathbf{h}} \mathcal{F}[u](\xi),$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} \left[\sum_{j=0}^{N-1} w_j(\mathbf{h}) u(\cdot + \mathbf{h}^{(j)}) \right](\xi) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} w_j(\mathbf{h}) e^{\sqrt{-1}\xi \cdot \mathbf{h}^{(j)}} \mathcal{F}[u](\xi) \end{aligned}$$

となる。この2式が等しいとすることで等式

$$\left\{ P(\sqrt{-1}\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} w_j(\mathbf{h}) e^{\sqrt{-1}\xi \cdot (\mathbf{h}^{(j)} - \mathbf{h})} \right\} \mathcal{F}[u](\xi) = 0$$

が得られる。

実数パラメータ $\rho > 0$ をとる。形式的に $\sqrt{-1}\xi$ を $\rho(\mathbf{h}^{(i)} - \mathbf{h})$ で置き換えた式が、すべての $i = 0, 1, \dots, N-1$ と、あらゆる $\mathcal{F}[u]$ に対して成り立つためには

$$P(\rho(\mathbf{h}^{(i)} - \mathbf{h})) = \sum_{j=0}^{N-1} w_j(\mathbf{h}) e^{\rho(\mathbf{h}^{(i)} - \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{h}^{(j)} - \mathbf{h})} \quad (30)$$

となることが必要十分である。ここで $l_{ij}(\mathbf{h}) := e^{\rho(\mathbf{h}^{(i)} - \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{h}^{(j)} - \mathbf{h})}$, $q_i(\mathbf{h}) := P(\rho(\mathbf{h}^{(i)} - \mathbf{h}))$ と置くとき、 $N \times N$ の行列 $L_{\mathbf{h}} = (l_{ij}(\mathbf{h}))$ と N 次の列ベクトル $\mathbf{w}_{\mathbf{h}} = (w_j(\mathbf{h}))$, $\mathbf{q}_{\mathbf{h}} = (q_i(\mathbf{h}))$ を用いて、式 (30) は連立一次方程式

$$\mathbf{q}_{\mathbf{h}} = L_{\mathbf{h}} \mathbf{w}_{\mathbf{h}} \quad (31)$$

で表される。これより重み $w_j(\mathbf{h})$ は $\mathbf{w}_{\mathbf{h}} = L_{\mathbf{h}}^{-1} \mathbf{q}_{\mathbf{h}}$ で定められる。ただし、 $L_{\mathbf{h}}$ が正則である場合のみを考える。

3.2.2 熱方程式の離散化

高次差分近似 (27) を用いて逆向き熱伝導問題を離散化する。

時空領域 $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$ に対して $\Omega_+ = \Omega \cup ((0, 1) \times \{0\})$, $\Gamma_- = \partial\Omega \setminus ((0, 1) \times \{0\})$ とおく。境界 Γ_- 上でディリクレデータ

$$\bar{u}(\mathbf{x}) := \begin{cases} u_0(x_2), & \mathbf{x} \in \{0\} \times [0, T] \\ u_1(x_2), & \mathbf{x} \in \{1\} \times [0, T] \\ u_F(x_1), & \mathbf{x} \in (0, 1) \times \{T\} \end{cases}$$

が与えられているとする。このとき、微分作用素 $P(\partial) = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \partial^{(0,1)} - \partial^{(2,0)}$ に対して

$$P(\partial)u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_+ \quad (32)$$

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_- \quad (33)$$

を満たす関数 u を求める境界値問題は、逆向き熱伝導問題 (23)–(25) を多重指数を用いて書き直したものである。

領域 Ω_+ 内に求積点 $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ をとる。恒等作用素を I とするとき、微分作用素とデータを

$$P_k(\partial) := \begin{cases} P(\partial), & \mathbf{x}^{(k)} \in \Omega_+ \\ I, & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_- \end{cases}$$

$$f_k := \begin{cases} 0, & \mathbf{x}^{(k)} \in \Omega_+ \\ \bar{u}(\mathbf{x}^{(k)}), & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_- \end{cases}$$

と置くことで、境界値問題 (32)–(33) を

$$P_k(\partial)u(\mathbf{x}^{(k)}) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (34)$$

として離散化を始める。

任意に $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ をとり固定する。高次差分近似 (27) から

$$P_k(\partial)u(\mathbf{x}^{(k)}) \approx \sum_{j=0}^{N-1} w_{kj}u(\mathbf{x}^{(j)}) \quad (35)$$

と近似し、重み w_{kj} , $j = 0, 1, \dots, N-1$ を計算する。高次差分近似 (27) の重みが連立一次方程式 (30) の解として与えられることから、重み w_{kj} , $j = 0, 1, \dots, N-1$ を連立一次方程式

$$P_k(\rho(\mathbf{h}^{(i)} - \mathbf{h}^{(k)})) = \sum_{j=0}^{N-1} w_{kj}e^{\rho(\mathbf{h}^{(i)} - \mathbf{h}^{(k)}) (\mathbf{h}^{(j)} - \mathbf{h}^{(k)})},$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (36)$$

の解として与えることができる。ここで、列ベクトル $\mathbf{q}^{(k)} = (q_i^{(k)})$ と行列 $L_k = (l_{ij}^{(k)})$ を

$$q_i^{(k)} := P_k(\rho(\mathbf{h}^{(i)} - \mathbf{h}^{(k)})),$$

$$l_{ij}^{(k)} := e^{\rho(\mathbf{h}^{(i)} - \mathbf{h}^{(k)}) (\mathbf{h}^{(j)} - \mathbf{h}^{(k)})}$$

と置くことによって、未知の重み w_{kj} からなる列ベクトル $\mathbf{w}^{(k)} = (w_{kj})$ は、連立一次方程式 (36) より $\mathbf{q}^{(k)} = L_k \mathbf{w}^{(k)}$ によって定まる。すなわち

$$\mathbf{w}^{(k)} = L_k^{-1} \mathbf{q}^{(k)} \quad (37)$$

を得る。

方程式 (34) と高次差分近似 (35) から、真値 $u(\mathbf{x}^{(j)})$ に対する近似値 u_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$ は連立一次方程式

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_{kj}u_j = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (38)$$

の解として定められる。行列 $W := {}^t(\mathbf{w}^{(0)} \mathbf{w}^{(1)} \dots \mathbf{w}^{(N-1)})$ と列ベクトル $\mathbf{u} = (u_j)$, $\mathbf{f} = (f_k)$, $j, k = 0, 1, \dots, N-1$ を用いることで、連立一次方程式 (38) は $W\mathbf{u} = \mathbf{f}$ と表される。よって近似値 u_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$ は

$$\mathbf{u} = W^{-1}\mathbf{f} \quad (39)$$

で与えられる。

3.3 数値計算例

数値結果を示す。正定数 a に対して境界データを $u_0(x_2) = e^{-a^2x_2}$, $u_1(x_2) = e^{-a^2x_2} \cos a$ によって、最終データを $u_F(x_1) = e^{-a^2T} \cos ax_1$ によって与える。このとき、逆向き熱伝導問題 (23)–(25) の解は $u(x_1, x_2) = e^{-a^2x_2} \cos ax_1$ である。定数 $a = 2$, 最終時刻を $T = 1$, パラメータを $\rho = 0.1$, 求積点数を $N = 60$ と置く。

Fig. 3 に求積点 $\mathbf{x}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, 59$ の配置を示す。求積点は Ω_+ , Γ_- のそれぞれに 30 点ずつランダムに配置されている。正方形 ■ は Γ_- 上の求積点を表し、菱形 ◆ は Ω_+ 内の求積点を表す。

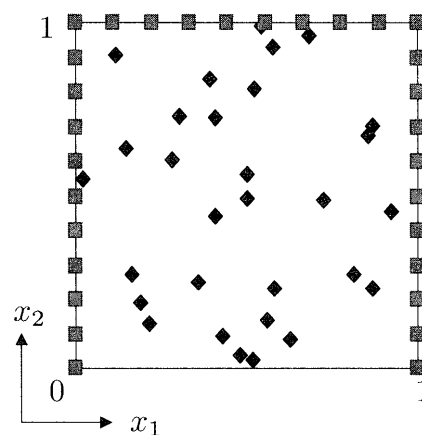


Fig. 3 Quadrature points

Fig. 4 に数値解の等高線と真の解の等高線を重ねて示した。数値解において振動現象は見られないことか

ら、逆向き熱伝導問題に対する本手法の安定性が期待できる。さらに、数値解は真の解に近いことが分かる。実際、数値解の絶対誤差は

$$E := \max_{j=0, 1, \dots, N-1} |u_j - u(\mathbf{x}^{(j)})| = 1.7 \times 10^{-2}$$

であり、不安定な問題に対する数値計算としては良い結果である。

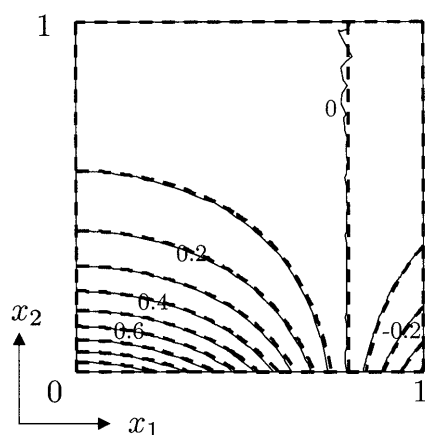


Fig. 4 Numerical (—) and true (---) solutions

パラメータ $\rho = 1$, 求積点数 $N = 100$ のとき、最終データ u_F における余弦関数の周波数 a と誤差の関係を Table 1 に示す。周波数 a が大きくなるほど誤差 E が増加することが分かる。

Table 1 Frequency a and error E

a	1	3	5
E	1.3×10^{-6}	5.7×10^{-1}	1.1×10^1

4 ラプラス方程式のコーシー問題再訪

逆向き熱伝導問題 (23)–(25) に対する数値解法として有効性が示唆された 3.2 項の高次差分近似法を、ラプラス方程式のコーシー問題へ再び適用して、この近似法の有効性を確認する。

コーシー問題 (1), (2) において、 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $\gamma = [0, 1] \times \{0\}$ とする。初期曲線 γ 上でコーシーデータ $\bar{u} = 0$, $\bar{q} = -\frac{1}{n} \sin(nx_1)$ を与える。ここ

に、 $n = 1, 2, 3, \dots$ とする。領域 Ω 内および初期曲線 γ 上に N 個の求積点 $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ をとる。このとき、自然数 $N_0 \leq N_1 \leq N$ に対して、番号 $k \in I_\Omega := \{0, 1, \dots, N_0-1\}$ の求積点を Ω 内にとり、番号 $k \in I_{\gamma_0} := \{N_0, N_0+1, \dots, N_1-1\}$ および $k \in I_{\gamma_1} := \{N_1, N_1+1, \dots, N-1\}$ の求積点は γ 上にとる。微分作用素 $P(\partial) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \Delta = \nabla^2$ と $\mathbf{n} \cdot \nabla = n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial n}$ に対し、

$$P_k(\partial) := \begin{cases} P(\partial), & k \in I_\Omega \\ I, & k \in I_{\gamma_0} \\ \mathbf{n} \cdot \nabla, & k \in I_{\gamma_1} \end{cases}$$

$$f_k := \begin{cases} 0, & k \in I_\Omega \\ \bar{u}(\mathbf{x}^{(k)}), & k \in I_{\gamma_0} \\ \bar{q}(\mathbf{x}^{(k)}), & k \in I_{\gamma_1} \end{cases}$$

と置くことで、コーシー問題を (34) として離散化を始める。

Fig. 5 に $N = 100$, $N_0 = 50$, $N_1 = 75$ としたときの求積点の配置を示す。求積点は Ω , γ のそれぞれにランダムに配置されている。正方形 ■ は番号 $k \in I_{\gamma_0}$ に対する求積点、三角形 ▲ は番号 $k \in I_{\gamma_1}$ に対する求積点を表し、菱形 ◆ は Ω 内の求積点を表す。

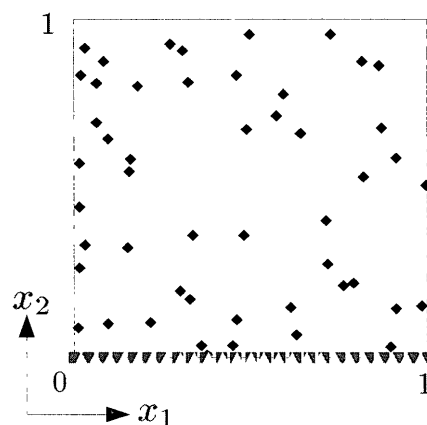


Fig. 5 Quadrature points ($N = 100$)

パラメータ $n = 2$ に対して数値解を真の解に重ねた等高線を Fig. 6 に示す。数値解の等高線は真の解に良く一致している。実際、数値解の絶対誤差は $E = 9.2 \times 10^{-4}$ である。

パラメータ $n = 10$ のとき、真の解のグラフを Fig. 7 に、求積点数 $N = 300$ に取ったときの数値解のグラ

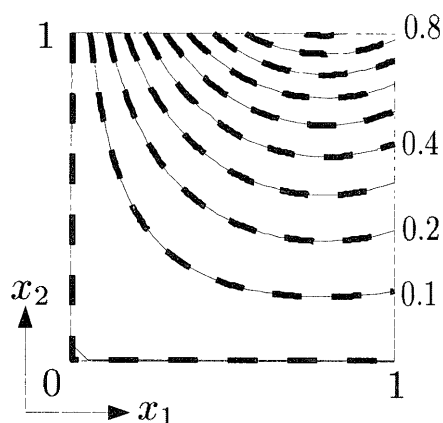


Fig. 6 Numerical (—) and true (---) solutions ($n = 2, N = 100$)

Fig. 8 に示す。数値解曲面上の白抜きの菱形 $\diamond$ のマークは、近似値 $u_j, j = 0, 1, \dots, N-1$ を表す。 $n = 10$ としても数値解には数値的な振動現象は見られず、 $N = 300$ と大きく取ることによって解の起伏の傾向がおおよそとらえられている。

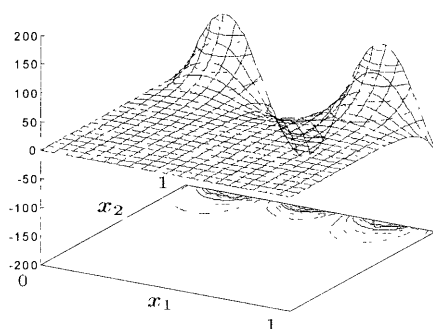


Fig. 7 True solution ($n = 10$)

次にコーシー問題 (1), (3), (4) を考える。 $\Omega = (-2, 2) \times (0, 2)$ とし、データ

$$\begin{aligned} u(x_1, 0) &= \frac{1}{1+x_1^2} & (-2 \leq x_1 \leq 2), \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) &= 0 & (-2 \leq x_1 \leq 2), \\ u(-2, x_2) &= u(2, x_2) \\ &= \frac{5-x_2^2}{(5-x_2^2)^2 + 16x_2^2} & (0 \leq x_2 \leq 2) \end{aligned}$$

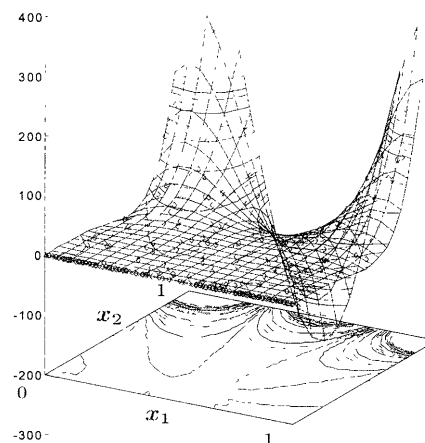


Fig. 8 Numerical solution ($n = 10, N = 300$)

を与える。真の解

$$u(x_1, x_2) = \frac{1+x_1^2-x_2^2}{(1+x_1^2-x_2^2)^2 + 4x_1^2x_2^2}$$

を Fig. 9 に示す。点 $(0, 1)$ を真性孤立特異点にもつ [11]。

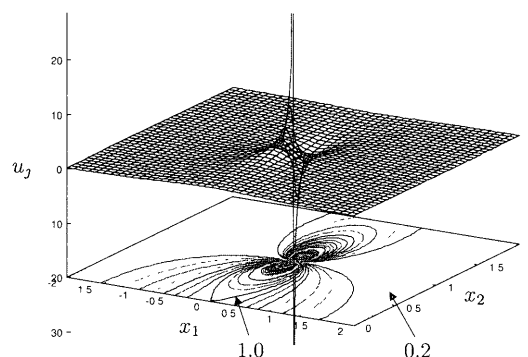
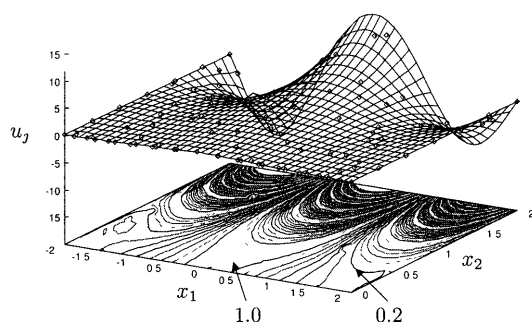
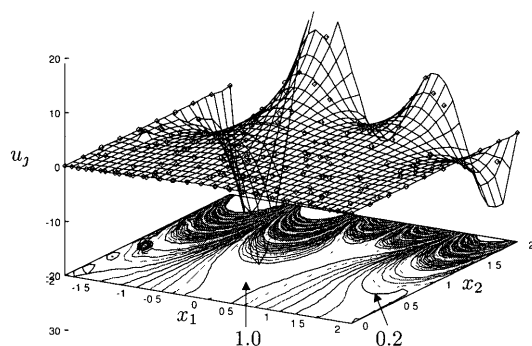


Fig. 9 True solution

求積点数を $N = 100, 200$ と取ったときの数値解を、それぞれ Fig. 10 と Fig. 11 に示す。 N の値を変えることにより数値解の結果は大きく異なり、 N を増やしても数値解は収束性を示さないことが観察される。調和関数は真性孤立特異点を超えては調和接続できないので、これらの数値解は本来、無意味である [12]。解析的な解が存在しないとき、ラプラス方程式のコーシー問題に対して無限精度の数値解法を適用した際、数値解が収束しないことを今井 et al. [13] も指摘し、解析解が存在するかどうかを数値的に判断する可能性に言及している。

Fig. 10 Numerical solution ($N = 100$)Fig. 11 Numerical solution ($N = 200$)

5 結言

与えられたデータに対して解が不安定となる逆問題である、ラプラス方程式のコーシー問題と逆向き熱伝導問題の数値解法を示した。

境界上の、ディリクレデータが与えられる部分と、ノイマンデータが与えられる部分が一致しない場合を含む枠組において、ラプラス方程式のコーシー問題を扱った。ラプラス方程式のコーシー問題を、正則化項を含む汎関数の最小化問題に帰着した。汎関数を最小化するために、汎関数のフレッシュ微分による勾配法を用いた。汎関数と汎関数のフレッシュ微分を計算するために導入した、ラプラス方程式の第1種境界値問題を境界要素法によって離散化した。さらに、真性孤立特異点をもつ問題に対する数値解法についても言及した。

逆向き熱伝導問題を離散化するために、高次の差分近似を導入した。求積点を任意の位置に配置できることが本手法の特徴である。各求積点における関数値の一次結合によって導関数の値を近似した。一次結合の

重みを決定するためにフーリエ変換を用いた。数値例において、最終データとして余弦関数を与えたときの数値解を示した。余弦関数の周波数が小さいとき精度の高い数値解が得られたが、周波数が大きいとき数値解は真の解と大きく異なっていた。この原因として、逆向き熱伝導問題の解が不安定であることから、数値計算における丸め誤差程度のわずかな誤差が増幅したと考えられる。今後の課題として、丸め誤差を縮小するために、多倍長計算環境における本手法の有効性を確認したい。

参考文献

- [1] 山本昌宏, 逆問題入門, 岩波講座 物理の世界, 制御する 2 (2002).
- [2] 登坂宣好, 大西和榮, 山本昌宏, 逆問題の数理と解法, 偏微分方程式の逆解析, 東京大学出版会 (1999).
- [3] 谷島賢二, 物理数学入門, 基礎数学 11, 東京大学出版会 (1994).
- [4] K. Hayashi, Y. Ohura, K. Onishi, *Direct method of solution for general boundary value problem of the Laplace equation*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.26 (2002) pp.763-771.
- [5] 神谷紀生, 大西和榮, 境界要素法による計算力学, 森北出版 (1985).
- [6] 登坂宣好, 中山 司, 境界要素法の基礎, 日科技連出版社 (1987).
- [7] K. Hayashi, K. Onishi, Y. Ohura, *Direct numerical identification of boundary values in the Laplace equation*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.152 (2003) pp.161-174.
- [8] 名取 亮 (編); 長谷川秀彦, 櫻井鉄也, 桧山澄子, 周 偉東, 花田孝郎, 北川高嗣, 数値計算法, オーム社 (1998).
- [9] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Second Edition, Applied Mathematical Sciences, Vol.82, Springer-Verlag, New York (1999).
- [10] 竹内敏己, 今井仁司, 磯 祐介, 熱伝導方程式に関する逆問題の無限精度並列数値シミュレーション, 第 52 回理論応用力学講演会予稿集 (2003) pp.197-198.
- [11] D. ヴィーデンスキー, Mathematica 偏微分方程式, (小林英恒 訳) アジソン ウェスレイ・トッパン, 情報科学シリーズ 60 (1994).
- [12] 大浦洋子, 大西和榮, 調和関数のディリクレデータとノイマンデータを用いた特異点の位置の同定, 日本機械学会年次大会講演予稿集, No.1340 (2003).
- [13] 今井仁司, 竹内敏己, 坂口秀雄, 楢田型作用素のコーシー問題に対する無限精度数値シミュレーション, 第 52 回理論応用力学講演会予稿集 (2003) pp.195-196.