学術論文

GSMAC 有限要素法による磁性流体-弾性膜連成系の数値解析

Numerical Analysis of a Coupled System of Magnetic Fluid and Elastic Membrane Using the GSMAC Finite Element Method

井門 康司[*1]（正員），後藤 喜明[*2]，棚橋 隆彦[*3]（正員），橋本 学[*3]

Yasushi IDO (Mem.), Yoshiaki GOTOH, Takahiko TANAHASHI (Mem.), Gaku HASHIMOTO

A coupled system of magnetic fluid and elastic membrane is forced to move by applying magnetic field. In this paper, basic behavior of the coupled system against the pulse magnetic field is numerically analyzed using the GSMAC finite element method. The results of the simulation agree qualitatively with the previous experimental results (the authors, 1998). It is shown that the maximum displacement of the membrane depends on the depth of magnetic fluid layer. The depth that gives the maximum displacement is independent of the length of the magnetic fluid layer and the input conditions of applied magnetic field.

Keywords: Magnetic Fluid, Coupled System, Elastic Membrane, GSMAC Finite Element Method, Dispersive Wave.

1 緒言

磁性流体は，通常のニュートン流体とは異なる磁気的特性およびレオロジー特性を持ち，その物理的特性を利用した様々な応用が考えられている[1,2]。その一つとして，磁場を与えることによる磁性流体の液面形状変化を利用した応用が考えられる。しかしながら，磁性流体のみでは他の物質との混合や，飛散して他の物質に付着する恐れがあるため，その液面を弾性膜で被覆した磁性流体－弾性膜連成系の利用が提案され研究されている[3-7]。磁性流体－弾性膜連成系の磁場に対する応答や弾性膜面上を伝播する波動は，弾性体のみあるいは磁性流体のみの場合とは異なる複雑な挙動を示す連成波動となる。磁性流体－弾性膜連成系にパルス磁場を与えた場合に生じる連成波動は，分散性の波動であることが実験的に明らかになっており，磁性流体層深さ，弾性膜厚さなどのパラメータに依存することが磁性流体を非粘性流体として取り扱った理論によって示されている[6,7]。このような連成系を利用した低速推進機，ポンプやシートフィーダーへの応用も検討されている[3-5]。しかし，磁性流体表面を弾性膜で被覆して弾性膜を固定しなければならない実験装置の性質上，磁性流体層深さや磁性流体層長さなどを変更して実験的に調べることは困難であり，磁性流体内部の流動状態や圧力分布などを知ることも非常に難しい。そこで本研究では，磁性流体－弾性膜連成系について数値シミュレーションを行い，パルス磁場を与えた場合における連成系の応答を解析する。膜面形状変化に対する磁性流体層深さや容器長さなどの実験では容易に変更して調べることの出来ない条件に対する連成系の応答特性について明らかにする。ここでは数値解法としてALE型GSMAC有限要素法[8,9]を採用する。磁性流体は粘性流体として取り扱い，磁場によって生じる磁気体積力は外力項として導入する。また，弾性膜はMooney-Rivlin 超弾性体としてモデル化する。

連絡先： 井門 康司，〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町，
名古屋工業大学ものづくりテクノセンター，
e-mail: ido.yasushi@nitech.ac.jp
*1 名古屋工業大学　*2 豊田合成㈱　*3 慶應義塾大学

2 基礎方程式

2.1 流体の基礎方程式

本計算で用いる基礎方程式を以下に示す。連続の式，粘性応力－速度こう配関係式，運動方程式である。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mu_F \left(\nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \overleftarrow{\nabla} \right) \tag{2}$$

$$\rho_F \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} = -\rho_F (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_F \boldsymbol{b} \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{v}$ は速度ベクトル，$\boldsymbol{\tau}$ は Cauchy 応力の粘性部分，μ_F は流体の粘性係数，ρ_F は流体の密度，$\boldsymbol{w}$ はメッシュ各節点の移動速度ベクトル，p は圧力，$\boldsymbol{b}$ は単位質量あたりの体積力である。本研究では ALE 法を用いるため，$\boldsymbol{w}$ は任意に与える事ができる。また，流体は磁性流体を想定しているため，体積力 $\boldsymbol{b}$ は重力と次

に示す磁気力 $\boldsymbol{f}_m$ との和で与えられる。

$$\boldsymbol{f}_m = \boldsymbol{M} \cdot \nabla \boldsymbol{H} = \chi_m \boldsymbol{H} \cdot \nabla \boldsymbol{H} \tag{4}$$

ただし，$\boldsymbol{M}$ は磁化，$\boldsymbol{H}$ は磁場強度，χ_m は磁性流体の磁化率，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度であり，μ_0 を真空の透磁率として $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}$ である。

2.2 弾性膜の基礎方程式

弾性膜は非圧縮 Mooney-Rivlin 超弾性体として取り扱う。超弾性体の基礎方程式として，密度の式，運動方程式，弾性応力－変形こう配関係式，弾性ポテンシャル関係式，変形こう配－変位こう配関係式を用いる。

$$III_B = 1 \tag{5}$$

$$\rho_S \frac{d^2 \boldsymbol{u}}{dt^2} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_S \boldsymbol{b} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} = 2\left\{\frac{\partial W}{\partial I_B} + \frac{\partial W}{\partial II_B}(\boldsymbol{F} : \boldsymbol{F})\right\}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^T \\ -2\frac{\partial W}{\partial II_B}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^T\end{aligned} \tag{7}$$

$$W = c_1(I_B - 3) + c_2(II_B - 3) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{u}\overleftarrow{\nabla}_X \tag{9}$$

ここで，I_B，II_B，III_B はそれぞれ左 Cauchy-Green 変形の第 1 不変量，第 2 不変量，第 3 不変量，ρ_S は超弾性体の密度，$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル，$\boldsymbol{\tau}$ は Cauchy 応力の弾性部分，W は弾性ポテンシャル関数，$\boldsymbol{F}$ は変形こう配テンソル，c_1，c_2 はMooney-Rivlin 定数であり，∇_X は Lagrange 表示のナブラ演算子である。固体解析では，非圧縮拘束条件として $\det \boldsymbol{F} = 1$ もしくは $III_B = 1$ の条件が用いられるが，本研究においては GSMAC 有限要素法により非圧縮 Mooney-Rivlin 超弾性体の基礎方程式を離散化するため，式(5)に替えて流体解析で用いられる $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を採用する。

3 計算モデルおよび計算条件

3.1 計算モデル

磁性流体－弾性膜連成系の計算モデルを Fig. 1 に示す。Fig. 1 において，h_F は磁性流体層深さ，h_S は弾性膜厚さ，L は磁性流体層長さの1/2 である。コイル中心線を基準として x 軸方向に軸対称とし，コイル中心線上では対称条件を課す。また，y 軸方向に重力加速度 $-g$ が加わっているものとし，容器壁面では no-slip 条件を適用する。

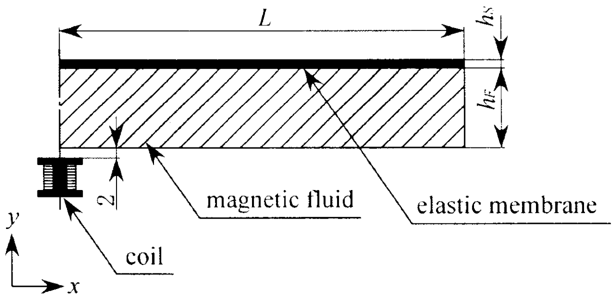


Fig. 1 Analytical model.

3.2 計算条件

磁性流体および弾性膜の物性値を Table 1 に示す。過去の実験[6]では弾性膜としてりん青銅板やステンレス鋼板を用いていたが，本研究では弾性膜としてシリコンゴムを，磁性流体として水ベース磁性流体（タイホー工業(株):フェリコロイド W40）を想定した。印加磁場分布は，実際にコイルに電流を流して測定したものを用いた。計算に用いた磁束密度分布を Fig. 2 に示す。磁場強度は，コイルに流す電流と比例関係にあるものとする。また，計算時間間隔を 1.0×10^{-2} ms，初期における格子間隔は x 軸方向，y 軸方向ともに 0.5 mm とし，初期条件として $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$，および圧力は重力によるものを与えた。ただし，弾性膜部分には重力による圧力に $2c_1 + 4c_2$ を加えている[9]。収束判定には，$\left|v^{(m+1)} - v^{(m)}\right| < \varepsilon$ を用い，$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-10} U_r$ とした。U_r は代表速度であり，$U_r = \sqrt{(c_1 + c_2)/\rho_s}$ である。本研究で行った計算モデルの容器寸法や入力磁場などの条件を Table 2 に示す。ここで，i はコイルに流す電流，t_m は磁場の印加時間である。パラメータとして，長さ L は 10 mm 毎，深さ h_F は 1 mm 毎に変化させて計算を行った。本研究では，弾性膜厚さを 5 mm で一定とし，基準となる計算条件として L=100 mm，h_F=5 mm，i = 0.5 A，t_m=20 ms を設定し，L や h_F などのパラメータを

Table 1 Physical properties.

ρ_F	1.402×10^3 kg/m^3	ρ_S	1.230×10^3 kg/m^3
μ_F	2.00×10^{-2} Pa·s	c_1	0.35 MPa
χ_m	6.575×10^{-7} Wb/A·m	c_2	0.25 MPa

Table 2 Numerical conditions.

Model	L (mm)	h_F (mm)	i (A)	t_m (ms)
A	80~150	5	0.5	20
B	100	3~15	0.5	20
C	100	3~15	0.8	20
D	100	3~15	0.5	40

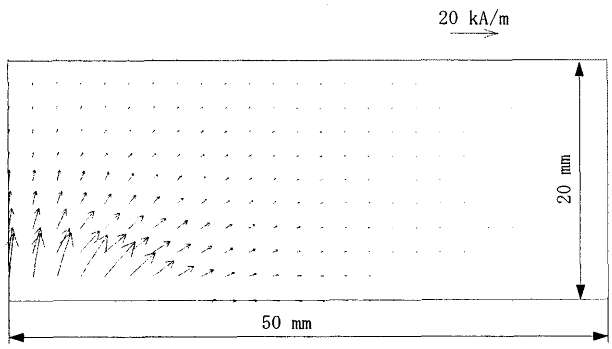


Fig.2 Distribution of the magnetic flux density.

変更することによりその影響を明らかにする。

4 計算結果と考察

まず，L=100 mm，h_F= 5 mm，i = 0.5 A とし，磁場を印加し続けた場合における膜上面中心の y 軸方向変位 ζ の時間変化を Fig.3 に示す。Fig.3 から，膜上面中心の変位は時間がたつと 0.54 mm に収束していることがわかる。本研究では，この静的な変位 ζ_{st}= 0.54 mm を変位の基準とし y 軸方向の変位の規格化を行う。

4.1 基準条件での計算結果

過去の実験[6]から，磁性流体－弾性膜連成系の連成波動が分散性の波動であること，およびパルス磁場の印加時間に対し膜面の最大変位には時間遅れが生じることが明らかになっている。この 2 点について，本研究で行った計算の結果を定性的に検証する。L=100 mm, h_F= 5 mm，i = 0.5 A，t_m= 20 ms における計算結果の膜上面中心における変位の時間変化と膜面形状の時間変化を Fig.4 と Fig.5 にそれぞれ示す。Fig.4 から，磁場の印加時間 20 ms に対し，変位が最大となるのは 40 ms 付近であり時間遅れが生じていることがわかる。Fig.5 から，伝播する波は複数の波にわかれながら伝播しており，分散性の波動であることを示している。また，後で示すように膜面中央の振動波形や磁性流体層深さに対する膜面変形状態の変化なども実験結果と同じ傾向を示している。したがって，計算結果は実験結果と定性的によく一致している。次に速度分布と圧力分布をそれぞれ Fig.6 と Fig.7 に示す。Fig.6 および Fig.7 から，波の発生と移動の様子がわかる。Fig.6(a)および Fig.7(a)より磁場印加時，磁性流体は磁気体積力により中央に引き寄せられるが，このため磁石近傍の容器底面付近において圧力が高くなり，圧力勾配が発生する。この圧力勾配により磁性流体が上昇することにより，

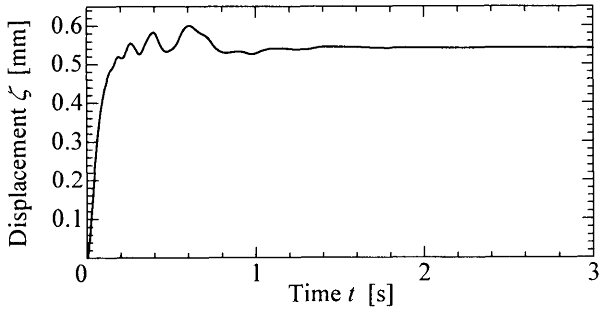


Fig.3 Displacement of the center of the membrane under steady magnetic field (L=100 mm, h_F= 5 mm, i = 0.5 A).

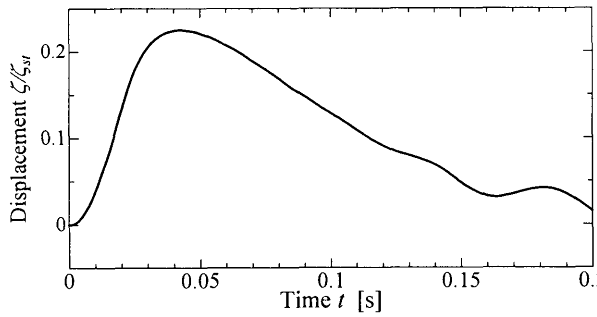


Fig.4 Displacement of the central position of the membrane (L=100 mm, h_F= 5 mm, i = 0.5 A).

膜が押し上げられている。中央部以外においても x 軸方向に磁性流体が運動し，上昇することにより，膜が変形して波が発生している。また，Fig.6 から，波の移動は x 軸方向の磁性流体の運動が伝播することにより生じていることがわかる。Fig.7(b)(c)より，磁場がなくなると磁石近傍の容器底面付近に発生していた圧力が高い領域が消滅して初期圧力分布とほぼ同様となり，圧力勾配による影響が小さくなることがわかる。

4.2 膜面応答に対する容器サイズの影響

Model A における L= 80，100，120 mm の計算結果として，膜上面中心における変位の時間変化，膜面形状をそれぞれ Fig.8 と Fig.9 に示す。また，Model B での h_F=3，5，10 mm の計算結果として，膜上面中心における変位の時間変化，膜面形状をそれぞれ Fig.10 と Fig.11 に示す。Fig.8 から膜上面中心の最大変位は，磁性流体層の長さによらずほぼ一定であることがわかる。

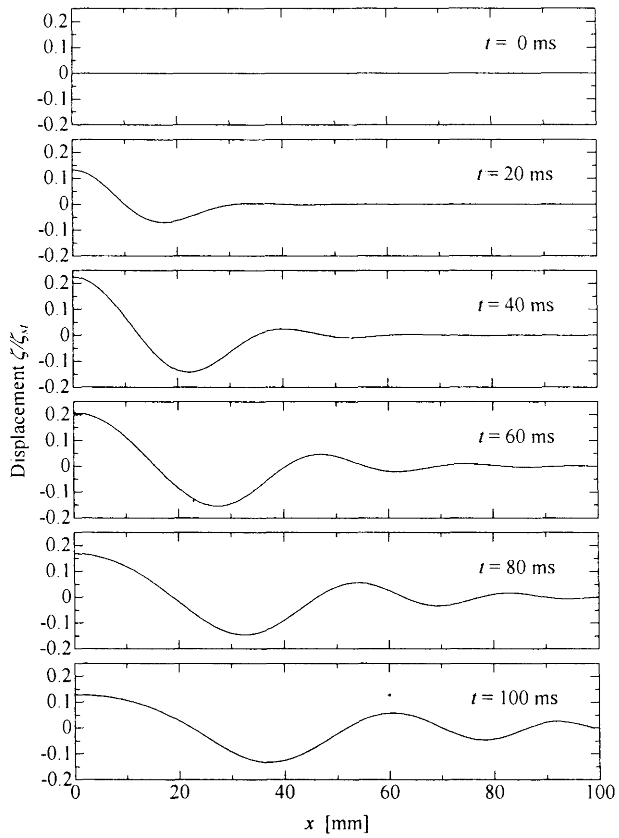
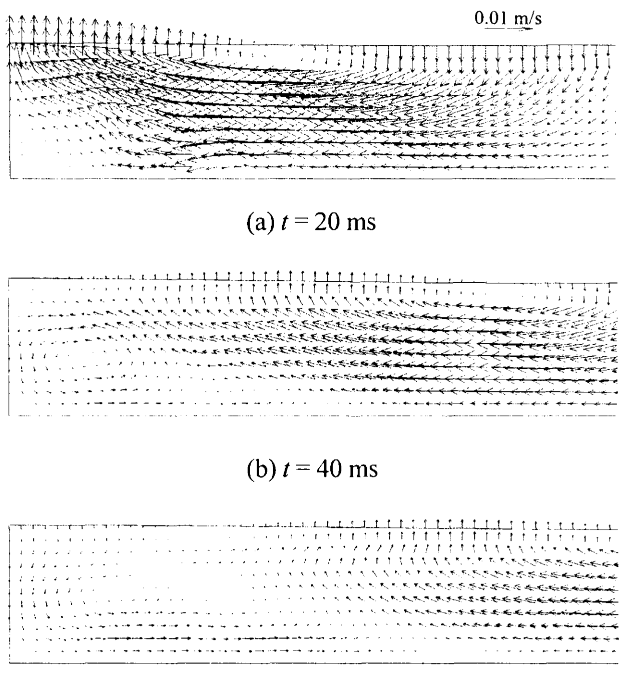


Fig.5 Time history of the shape of the membrane (L=100 mm, h_F= 5 mm, i = 0.5 A, t_m= 20 ms).

Model A の計算結果から，磁性流体層長さが大きくなると，膜上面中心の最大変位が若干大きくなるが，その変化量は微小であることがわかる。したがって，膜上面中心の最大変位は磁性流体層長さによらずほぼ一定であるといえる。膜上面中心の変位が最大となる時間 $t_{\zeta max}$ も磁性流体層長さによらず 43 ms とほぼ一定となった。一方，最大変位後の挙動は磁性流体層長さが変わると変化している。Fig.9 から波が容器端に到達するまでは，膜面形状が同じであることがわかる。また，変位 ζ が最小となる点の速度 $v_{\zeta min}$ を求めると，磁性流体層長さによらず 0.25 m/s で一定になる。したがって，波の速度(頂点の移動速度)は磁性流体層長さに依存しない。そのため，磁性流体層長さが短いほど波が容器端で反射し中心に戻ってくるまでに要する時間は短くなり，Fig.8 のように磁性流体層長さが短いほど，膜中央に反射波の影響が速く現れると考えられる。さらに，磁性流体層長さが短くなるほど複数の波が重なりやすくなるため，Fig.8 のように最大変位後の変位に違いが現れてくると考えられる。Fig.10 から膜上面中心の最大変位は磁性流体層深さに依存し，極値が存在することがわかる。Model B の計算結果から磁性流体層深さが大きくなると膜上面中心の最大変位は増大し，ほぼ 6 mm で極大値をとった後，減少していることがわか

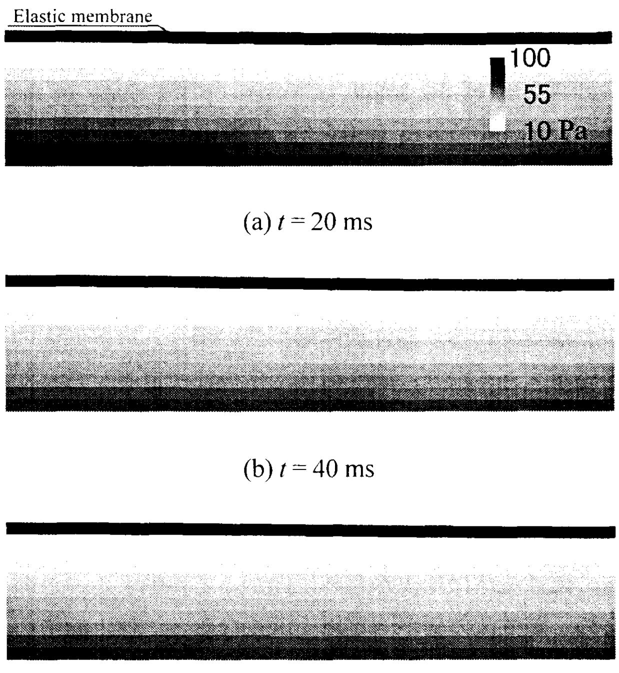


(a) t = 20 ms

(b) t = 40 ms

(c) t = 60 ms

Fig.6 Velocity vector diagrams (L = 100 mm, h_F= 5 mm, i = 0.5 A, t_m= 20 ms).



(a) t = 20 ms

(b) t = 40 ms

(c) t = 60 ms

Fig.7 Contours of pressure (L = 100 mm, h_F= 5 mm, i = 0.5 A, t_m= 20 ms).

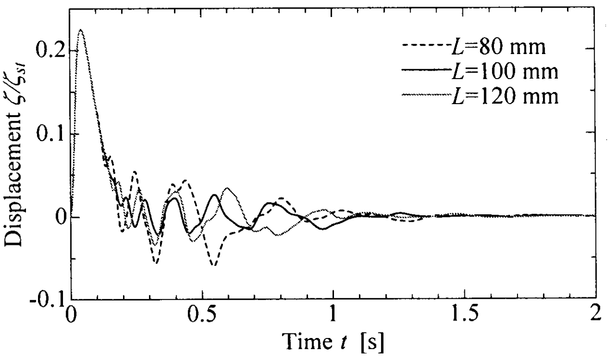


Fig.8 Displacement of the membrane at the center.
(h_F= 5 mm, i = 0.5 A, t_m= 20 ms)

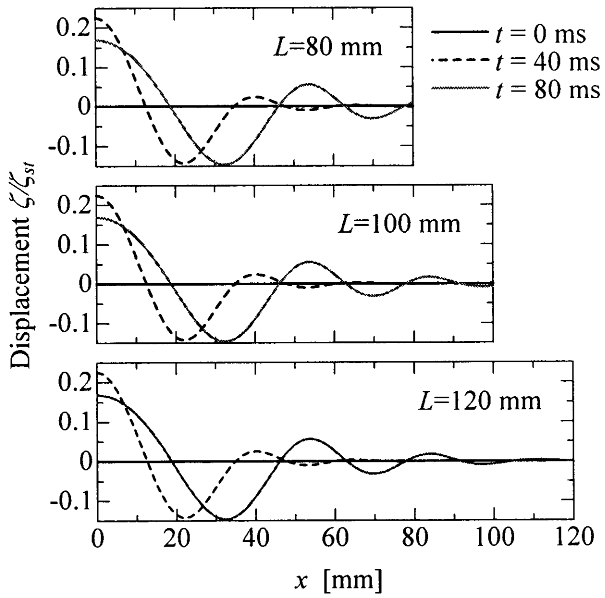


Fig.9 Effect of the length of vessel on the shape of the membrane (h_F=5 mm, i = 0.5 A, t_m= 20 ms).

った。これは，容器底面の影響と磁場分布によるものと考えられる。*4.1* 節から膜中央の変形は，磁性流体が中央に引き寄せられ，上昇することにより生じることがわかっている。磁性流体層が浅い場合，容器底面の影響が大きくなり，磁性流体が中央に引き寄せられにくくなるため，膜上面中心における最大変位が小さくなると考えられる。逆に，磁性流体層深さが大きくなると，容器底面の影響は小さくなるが，中央付近であっても磁場の影響が非常に小さい領域があり，この領域の磁性流体は中央から外に向かって移動する。このため，磁性流体層が一定以上深くなると，膜上面中心における最大変位が小さくなっていくと考えられる。また，最大変位後の挙動にも違いが見られ，磁性流体層深さが大きくなると振幅が大きくなり，変位が 0 に収束するまでにかかる時間も長くなることがわかる。

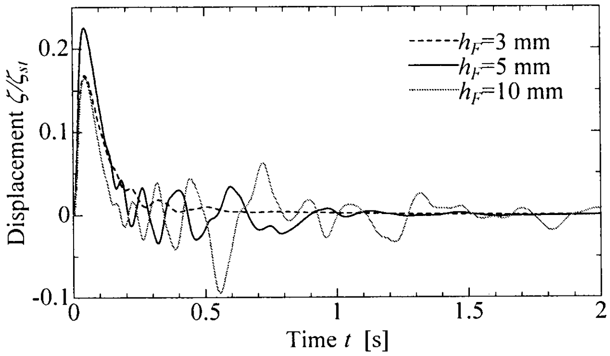


Fig.10 Displacement of the membrane at the center.
(L= 100 mm, i = 0.5 A, t_m= 20 ms)

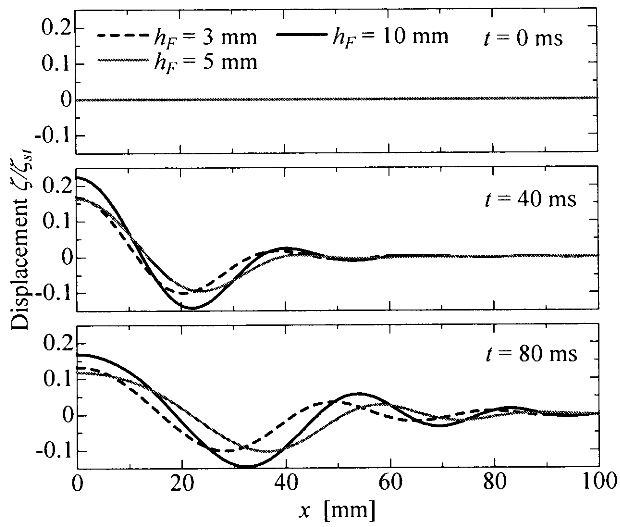


Fig.11 Effect of the depth of magnetic fluid layer on the shape of the membrane (L= 100 mm, i = 0.5 A, t_m= 20 ms).

これは，磁性流体層深さが大きくなることにより，相対的に容器底面の影響が小さくなり，減衰しにくくなるためであると考えられる。Fig.11 において，各時間の波の位置が違うことから，磁性流体層深さが変わると波の速度が変化することがわかる。Model B の計算結果から速度 $v_{\zeta min}$ は磁性流体層深さが増大するにつれ大きくなるが，やがてある値に収束していくことがわかった。*4. 2* 節から波の移動は，磁性流体の x 軸方向の流速が伝播することにより生じることがわかっている。このため，磁性流体層深さが小さいと容器底面の影響が大きく，流速の伝播が阻害されるため，波の速度が小さくなると考えられる。そして，磁性流体層が一定以上大きくなると，容器底面の影響が十分小さくなるため，波の速度が変わらなくなると考えられる。

4.3 膜面応答に対する入力磁場の影響

4.2 節から，膜上面中心の最大変位と波の速度が磁性

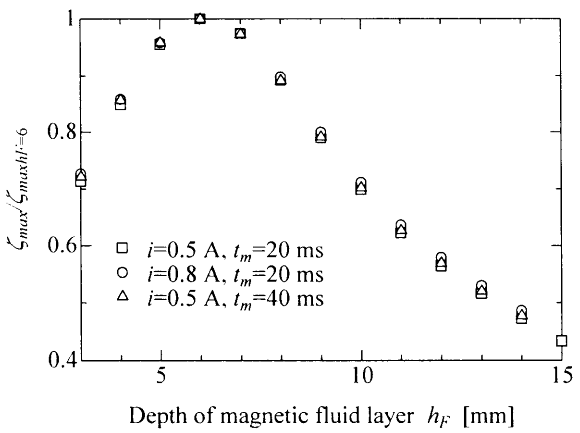


Fig.12 Maximum displacement at the center of the membrane vs. depth of the magnetic fluid layer (L = 100 mm).

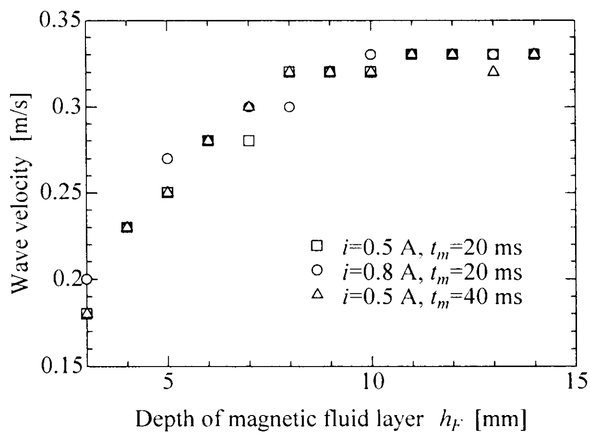


Fig.13 Wave velocity vs. depth of the magnetic fluid layer (L = 100 mm).

流体層深さに依存することがわかった。そこで，Model B，C，D の計算結果から得た磁性流体層深さと膜上面中心の最大変位の関係を Fig.12 に，磁性流体層深さと波の速度の関係を Fig.13 にそれぞれ示す。Model によらず，磁性流体層深さ h_F= 6 mm で，膜上面中心の最大変位が極大値をとることから，Fig.12 において膜上面中心の最大変位 ζ_{max} を各 Model の h_F= 6 mm における最大変位 $\zeta_{maxhF=6}$ で規格化した。Model B，C，D それぞれの $\zeta_{maxhF=6}$ は，0.127 mm ，0.582 mm， 0.446mm である。Fig.12 から磁場強度，磁場の印加時間が変わると最大変位は変わるが，磁性流体層深さと膜上面中心における最大変位の関係は変わらないことがわかる。また波の速度は，各波によって異なるため，膜上面で最も下がった点の移動速度を Fig.13 に示した。*4.2* 節と Fig.13 から，弾性膜の条件が変化しない場合，波の速度は磁性流体層深さのみに依存することがわかる。

5　結言

本研究の数値解析結果は実験結果[6]と定性的に一致する。この数値解析の結果，以下のことがわかった。磁性流体-弾性膜連成系にパルス磁場を印加した場合の波動発生過程を，磁性流体内部の流速や圧力分布を示すことによって明らかにした。また，最大変位，波の速度は磁性流体層の深さに依存しており，磁性流体層の深さと最大変位の関係は，磁場の分布形状や膜の条件が同じであれば変わらないことがわかった。すなわち，磁場強度などの入力条件や磁性流体層長さによらず，最大の変位をとる磁性流体層深さは一定である。これは実験[6,7]からは得られなかった新たな知見である。低速推進器やポンプなどへの応用に際して，この最大変位を取る磁性流体層深さが重要なパラメータとなると考えられる。本解析手法は他の形態の磁性流体－弾性膜連成系を利用した応用開発にも役立つものと考えられる。

(2005 年 2 月 11 日受付，2005 年 8 月 8 日再受付)

参考文献

[1] 武富・近角，磁性流体，日刊工業新聞社，1988.

[2] 神山，磁性流体入門，産業図書，1989.

[3] 田中・村島，磁性流体を用いた進行波動壁型推進機構（第１報，流体輸送に関する実験），日本機械学会論文集 B, 56-523，pp.660-665，1990.

[4] 田中・村島，磁性流体を用いた進行波動壁型推進機構（第２報，進行波駆動回路の改良と推進特性），日本機械学会論文集 B, 58-553, pp.2673-2677, 1992.

[5] Y. Ido, K. Tanaka and Y. Sugiura, Fluid transportation mechanisms by a coupled system of elastic membranes and magnetic fluids, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol.252, pp.344-346, 2002.

[6] K. Tanaka, Y. Ido and K. Takuma, Dispersive Waves in a Coupled System of Magnetic Fluid and Elastic Membrane, *JSME International Journal*, Series B, Vol.41, pp.583-589, 1998.

[7] 井門・田中・片山，磁性流体と円形弾性膜の連成振動，日本機械学会論文集 B, 65-639, pp.3668-3674, 1999.

[8] 棚橋，CFD 数値流体力学，アイピーシー，1993.

[9] 橋本・棚橋，非圧縮超弾性体の分離型有限要素法に関する研究(Mooney-Rivlin 体の GSMAC 有限要素法解析), 日本計算工学会論文集, 20040016，2004.