

学術論文

特異値分解を用いたジャイロ効果を有する弾性ロータ 磁気軸受フライホイールのモデリング (第1報 精密なモデリングおよび制御系の設計)

Modeling of Flexible Rotor Magnetic Bearing Flywheel System with Gyroscopic Effect Using Singular Value Decomposition (1st Report: Precise modeling and control system design)

任 明^{*1}(学生員), 野波 健蔵^{*2}(正員)

Ming REN (Stu. Mem.), Kenzo NONAMI (Mem.)

This paper deals with a flexible rotor magnetic bearing flywheel system taking into consideration of the gyroscopic effect. A flexible model has been derived based on the finite-element method. Further, a mode separation has been carried out by the singular value decomposition method considering the equation of motion with the gyroscopic matrix. Meanwhile, we also studied a vibration analysis based on a rigid model. Through the result of relation between the natural frequency and the rotation frequency by experiment, the FEM model can be adjusted so as to be similar to an actual system. Finally, the effectiveness of the reduced-order flexible model and stability of the closed loop system with the H_{∞} controller were verified through the simulation.

Keywords: magnetic bearing, flexible rotor flywheel, singular value decomposition, mode separation, gyroscopic effect, vibration analysis, H_{∞} control, zero bias control.

1 緒言

電力貯蔵用磁気軸受フライホイールシステムに対する研究は、ロータを重心に関する集中質量と仮定して剛性モデルに基づいた補償器の設計が多く行われている。しかし、実際のロータは無数の弾性モードを有する分布質量の弾性ロータとなっている。さらに、電力貯蔵効率を増大させるために、慣性モーメントの大きいフライホイールが用いられるが、この場合、ロータの剛性モードと弾性モードのジャイロ効果の影響を強く受ける。特に、ロータの回転周波数の増加と共に、弾性曲げ1次の後向き振れ回りモードの固有振動数が剛性二次モードの前向き振れ回り振動数に接近してくる。すなわち、強いジャイロ効果が存在することで、弾性曲げ1次の後向き振れ回りモードは閉ループ系の安定性に影響を及ぼす。そして、ある回転数以上からシステムは不安定化することとなる[1]。こうした問題では、ジャイロ効果を考慮した剛性モデルの補償器設計でも、上記の理由で高速回転に対処することができなくなる。

本論文は上述した問題を検討するために、最初から

剛性モードと弾性モードの両方のジャイロ効果を考慮してモデル化することを考えた。この場合、解析的にモデルの運動方程式を導くことは困難であるため、数値的方法で、かつ、実用的な方法である有限要素法によりジャイロ効果を考慮した弾性ロータモデルを得た。しかし、周知のように有限要素モデルの次数は一般的に極めて高い。また、制御系設計用のモデルは可能な限り低次元されることが望ましい。そこで、ジャイロ効果を有する弾性ロータモデルのモード分離を実行して低次元化を行う。

ジャイロ効果を有するモデルのモード分離法は Meirovitch の文献[2]の方法がある。この方法を生かして、コレスキ分解を用いるモード分離に関する論文はいくつがある[3][4]。しかし、コレスキ分解は行列が正定かつ対称であるという制約があり、ロータがフリーフリー状態のときにはマトリクスが正定とならない。この場合、コレスキ分解でのモード分離ができなくなる。そこで、本研究では行列の制約がない特異値分解による方法を提案する。ただし、コレスキ分解の考え方は採用している。これによりモード分離を実行し、定格回転数領域に存在する剛性モードと弾性曲げ1次後向き振れ回りモードの低次元化モデルを導出した。

連絡先：野波 健蔵，〒263-8522千葉市稲毛区弥生町1-33，
千葉大学工学部電子機械工学科，
e-mail: nonami@faculty.chiba-u.jp

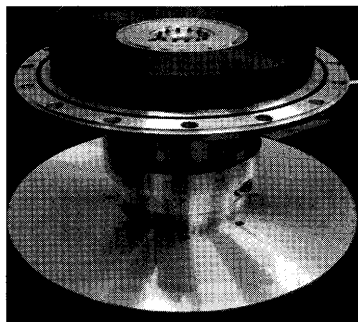
^{*1} 千葉大学

得られた低次元化モデルの信頼性と有効性を検証するために、剛性モデルに対する安定化制御器を設計して、閉ループシステムの振動解析を行い、実際の弾性1次後向き振れ回り固有振動数の挙動を回転周波数との関係として調べる。さらに、 H_∞ 制御系を構築してジャイロ系の低次元化モデルの安定性について考察した。

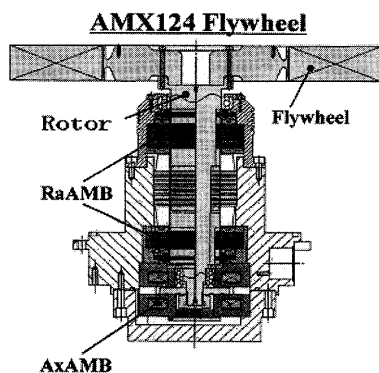
2 磁気軸受フライホイールシステムとFEMモデル

制御対象は Fig.1 で示すような5軸制御型磁気軸受であり、総重量は約13kg、高さは0.65m、直径は0.6mである。(a)は材料がCFRP製の黒い部分と中央部のアルミ部分で構成されているフライホイールを示す。(b)は全体の組立図で、RaAMB, AxAMBはそれぞれラジアル方向とアキシアル方向の電磁石である。磁気軸受とロータのギャップ長は250 μ m、保護ベアリングとのギャップ長100 μ mである。

弾性モデルの導出はフリーフリーロータと考えると、フライホイールを集中質量とし、Fig.2のように回転軸の各部分を8要素に分割し、有限要素法によって行う。要素8はロータ下端の各部分を平均化している。また、電磁石を配置される位置によって、要素2と3,7と8、



(a) Flywheel rotor and containment



(b) Cross-sectional view

Fig.1 Overview of flywheel system.

それぞれ二つの要素と分ける。なお、減衰と不釣り合い振動は考慮しないこととする。Fig.2のモデリングについて、ジャイロ効果を考慮したロータの運動方程式は次式となる[5]。

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{U} \quad (1)$$

$\tilde{\mathbf{M}}$ は質量行列、 $\tilde{\mathbf{G}}$ はジャイロ反対称行列、 $\tilde{\mathbf{K}}$ は剛性行列、 $\mathbf{U}$ は制御入力ベクトル、 $\tilde{\mathbf{T}}$ は電磁石の設置場所を表す行列($\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}} \in R^{36 \times 36}$, $\tilde{\mathbf{T}} \in R^{36 \times 4}$)、ベクトル $\mathbf{q}(x_1 \theta_{x1} \cdots x_9 \theta_{x9} y_1 \theta_{y1} \cdots y_9 \theta_{y9})^T$ は1から8までの各要素の節点に対するx, y軸方向の変位と傾き角度を示している。

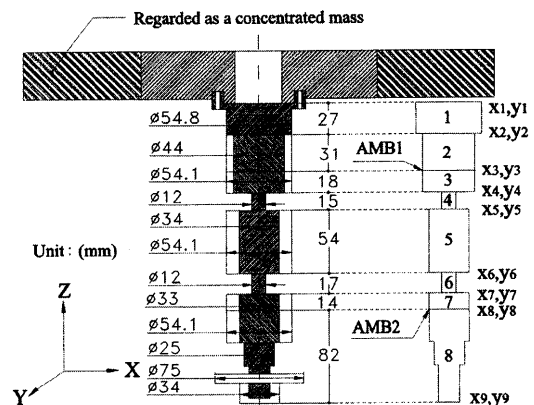


Fig.2 One dimensional finite element model.

3 特異値分解によるモデル低次元化

3.1 コレスキ分解

前章の運動方程式(1)のFEMモデルは36次になっているので、状態空間モデルの次数は72次となる。これに基づく制御系設計は演算速度に制約を受けるので実用的でない。このため、モデルを低次元化することが必要である。しかし、式(1)は反対称のジャイロ行列 $\tilde{\mathbf{G}}$ が存在するので、標準形のモード分離法を適用することができない。反対称ジャイロ行列が存在する場合のモード分離を行うため、Meirovitchの文献[2]の方法に基づき、新しい状態ベクトル $\mathbf{z} = [\mathbf{q} \ \dot{\mathbf{q}}]^T$ を導入して、次式を得る。

$$\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{G}^* \mathbf{z}(t) = \mathbf{T}^* \mathbf{U} \quad (2)$$

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{K}} \\ \tilde{\mathbf{K}} & \tilde{\mathbf{G}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

式(2)の固有値問題を次式により考察する。

$$s\mathbf{M}^* \mathbf{z}(s) + \mathbf{G}^* \mathbf{z}(s) = \mathbf{0} \quad (3)$$

式(3)は標準形に似ているが、 $\tilde{\mathbf{K}}$ と $\tilde{\mathbf{G}}$ の特性から $\mathbf{G}^*$ は相変わらず反対称行列となっている。このクラスの固有値問題の解は n 組の共役純虚数 $s_r = i\omega_r$, $\bar{s}_r = -i\omega_r$ とそれに対応している n 組の共役複素数の固有ベクトル $\mathbf{z}_r = \alpha_r + i\beta_r$, $\bar{\mathbf{z}}_r = \alpha_r - i\beta_r$ ($r \in 1 \cdots n$)を持っていることが分かる。今、 $s_r = i\omega_r$ と $\mathbf{z}_r = \alpha_r + i\beta_r$ を式(2)に代入し実部と虚部を分けることにする。この結果、 α_r と β_r に関連する式は次のような二つの固有値問題の形式となる。

$$\begin{cases} \mathbf{K}^* \alpha_r = \lambda_r \mathbf{M}^* \alpha_r & \mathbf{K}^* \beta_r = \lambda_r \mathbf{M}^* \beta_r \\ \mathbf{K}^* = \mathbf{G}^{*T} \mathbf{M}^{*-1} \mathbf{G}^* & \lambda_r = \omega_r^2 \end{cases} \quad (4)$$

式(4)は n 組の重複な λ_r を持ち、 α_r と β_r は同じ λ_r に対応していることがわかる。次に、 $\mathbf{M}^*$ に対して、行列の分解を行う。Meirovitchの方法は次式のようなコレスキ分解を適用している。 $\mathbf{Q}$ は上三角行列である。

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \quad (5)$$

しかし、コレスキ分解の制約条件は行列 $\mathbf{M}^*$ が正定対称行列でなければならないことである。したがって、ロータがフリーフリーの状態の場合は行列 $\mathbf{M}^*$ が半正定行列となるので、コレスキ分解ができなくなるという問題が発生する。そこで、フリーフリーロータのモード分離を実行するために正定条件が不要な特異値分解を適用する。

3.2 特異値分解によるモード分離

任意の $n \times m$ の行列 $\mathbf{M}^*$ について、その階数が r ならば、正規直交ベクトルを列ベクトルにもつ行列 $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ は以下の特異値分解で与えられることが知られている。

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T \quad (6)$$

$n \times m$ $n \times r$ $r \times r$ $r \times m$

この場合、特異値分解においては行列 $\mathbf{M}^*$ の正定かつ対称という制約はない。そこで、コレスキ分解の代わりに特異値分解を行うことを提案する。周知のように $\mathbf{U}$ の列ベクトルは $\mathbf{M}^* \mathbf{M}^{*T}$ の固有ベクトルであり、 $\mathbf{V}$ の列ベクトルは $\mathbf{M}^{*T} \mathbf{M}^*$ の固有ベクトルである。しかし、本文の $\mathbf{M}^*$ は実対称行列で、 $\mathbf{M}^{*T} \mathbf{M}^* = \mathbf{M}^* \mathbf{M}^{*T}$ の関係があるので、 $\mathbf{U}$ と $\mathbf{V}$ は同じ列固有ベクトルを持つ行列になることがわかる。そこで、 $\mathbf{R} = \mathbf{U} \sqrt{\mathbf{D}}$ とおけば、次式が得られる。

$$\begin{cases} \mathbf{R}^T = \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{U}^T = \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{V}^T \\ \mathbf{M}^* = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T = \mathbf{U} \sqrt{\mathbf{D}} \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{V}^T = \mathbf{R} \mathbf{R}^T \end{cases} \quad (7)$$

式(7)はコレスキ分解の形に似ているが、 $\mathbf{R}$ は上三角行

列ではないので、式(5)のコレスキ分解と異なることが明らかである。これを式(4)に代入すると次式となる。

$$\begin{cases} \Phi \mathbf{P}_r = \lambda_r \mathbf{P}_r \\ \Phi = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}^* \mathbf{R}^{-T} \end{cases} \quad (8)$$

λ_r に対応する固有ベクトルは $\mathbf{P}_r = [\alpha_r \ \beta_r]$, ($r=1, 2, \dots, n$)となる。座標変換式 $\mathbf{z}_r = \mathbf{R}^{-T} \mathbf{P}_r \xi$ を設定し、式(2)に代入すると、式(9)が得られる。 $\xi = [\eta_r \ \zeta_r]$ はモード座標である。 θ の中身は式(10)で表すようにブロック対角行列となるので、各モードは連成のない非干渉系となっておりモード分離が確認できる。

$$\dot{\xi} = \theta \xi + \psi U \quad (9)$$

ここで、

$$\theta = -\mathbf{P}^{-1} \Lambda \mathbf{P}, \quad \Lambda = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^* \mathbf{R}^{-T}, \quad \psi = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{T}^*$$

式(9)を詳しく書くと、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \omega_n \\ \hline - & - & - & - & - & - & - \\ -\omega_1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_n & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{T}^* U \quad (10)$$

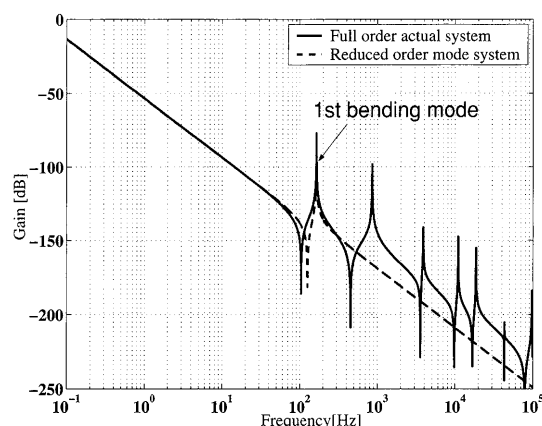
3.3 低次元化モデル

式(9)に基づいて、剛性モードの4自由度と弾性1次後向き振れ回りの1モードの5つモードを含む低次元モデルは次式のように記述される。

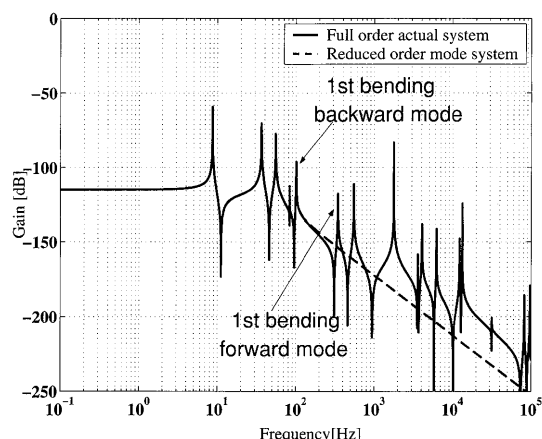
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r U \\ \mathbf{y}_r = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{D}_r U \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$, $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{10 \times 4}$, $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{4 \times 10}$, $\mathbf{D}_r \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ であり、

実システムと低次元化モデルに対するボード線図をFig.3に示す。入力はロータ上部のx方向に対向している電磁石間の吸引力で、出力はセンサ変位である。実線は実モデル(FEMモデル)のボード線図、破線は低次元化モデルのボード線図を示す。(a)はロータがフリーフリー状態で、剛性モードは固有値零で弾性モードのみ非零固有値となることを示す。ここで、文献[3][4]との比較であるが、コレスキ分解はフリーフリー状態でモード分離できないので、弾性モードのみのFig.3(a)の結果を得ることができない。(b)は剛性行列 $\tilde{\mathbf{K}}$ にばね定数を設定し、かつ、ロータが回転した状態における剛性



(a) Bode plot of free-free rigid-flexible rotor (0Hz)



(b) Bode plot of rigid-flexible rotor (100Hz)

Fig.3 Mode separation.

モードと弾性モードを示しており、実モデルでは弾性モードが後ろ向き振れ回りモードと前向き振れ回りモードの二つに分離している。ここで、ばね係数の設定は、すでに平衡点で安定となった閉ループシステムを考え、ロータ上部x方向に50Nの外乱を与え、その結果、x方向のロータ変位量が20 μ mになることを仮定して、得られたばね係数を剛性行列の中に用いる。この仮定は4章の実験において実際に適用している。(b)から低次元化モデルが5つのモードを正しく包含していることが分かる。

4 実験における低次元化モデルの検証

磁気軸受システムにおいては、剛性モードは制御器によって、固有振動数が変動するが、弾性モードは一般に変動しない。ロータの回転周波数の増加にしたがって、実際の弾性1次後向き振れ回りモードの固有振動数がどのように変化するかを計算値と実験値と比較して考察することによって、3章で導出した弾性モデルの信頼性を検証することができる。ここで、閉ループ系を安定化できる制御器で剛性モデルを制御し、閉ループ系の回転数に依存した固有振動数を計測する。

安定化できる制御器は本章ではスライディングモード制御器を用いた。なお、この場合の設計法を簡単に記述する。

4.1 スライディングモード制御器設計

4.1.1 最適制御理論による超平面の設計

スライディングモード制御器を設計するとき、制御対象には文献[1]に記載された次式の剛性モデルを適用する。ここで x_1, x_2 は電磁石におけるロータ変位と速度である。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & A_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} \\ B_2 \end{bmatrix} U, \quad y = x_1 \quad (12)$$

サーボ系を構成するため、目標値と出力 y の差の積分値 δ を考え、次式で現せる。

$$\delta = \int_0^t (r - y) dt \quad (13)$$

それをシステムに含め、拡大系は以下ようになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & A_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_2 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (14)$$

ここで、切り替え関数を次のように定義する。

$$\sigma = Sx = [s_1 \quad s_2 \quad s_3] \begin{bmatrix} \delta \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

式(15)から $x_2 = -s_1 \delta - s_2 x_1$ を得られる。これによって、等価制御系の状態方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -s_1 & -s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (16)$$

式(16)から等価制御系の定常値 $\dot{\delta}(\infty) = \dot{x}_1(\infty) = 0$ の関係に基づき、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \delta(\infty) \\ x_1(\infty) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -s_1 & -s_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (17)$$

ここで、定常値からの誤差システムを考えると、誤差状態ベクトルを $\delta_e = \delta(t) - \delta(\infty)$, $x_e = x_1(t) - x_1(\infty)$ のように定義する。そして、式(16), 式(17)から、誤差システムは次式のように表せる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_e \\ \dot{x}_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -s_1 & -s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} r \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -s_1 & -s_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \delta_e \\ x_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta(\infty) \\ x_1(\infty) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} r \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -s_1 & -s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ x_e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

さらに、 $U^* = -[s_1 \quad s_2] \begin{bmatrix} \delta_e \\ x_e \end{bmatrix}^T$ を定義すると、誤差シ

システムは次のように決める。

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_e \\ \dot{x}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ x_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} U^* \quad (19)$$

ここで、 $x_2 = -s_1 \delta - s_2 x_1$ の関係から、 U^* は x_2 の定常状態からの偏差を現すことがわかる。式(19)に対して、評価関数を設け、最小化する切替行列 S はリカッチ方程式の正定解によって求められる。

4.1.2 制御入力設計

スライディングモード制御器の線形等価入力 U_{eq} は次式のように求める。

$$U_{eq} = -(\mathbf{S}\mathbf{B}_a)^{-1}(\mathbf{S}\mathbf{A}_a X + \mathbf{S}\mathbf{E}_a r) \quad (20)$$

また、非線形入力 U_{nl} は次式のように求める。

$$U_{nl} = -K(\mathbf{S}\mathbf{B}_a)^{-1} \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \tau} \quad (21)$$

ここで、 $\mathbf{A}_a$ 、 $\mathbf{B}_a$ 、 $\mathbf{E}_a$ は式(14)の拡大系に対応するそれぞれの行列で、 $X = (\delta \ x_1 \ x_2)^T$ は拡大系の状態量で、 K は非線形制御入力を調整するパラメータで、 τ は平滑関数である。そして、最終の制御入力は $U = U_{eq} + U_{nl}$ となる。

4.2 閉ループシステムの振動解析

前章で設計したスライディングモード制御器を用いて、閉ループシステムの振動解析を行う。ここで、

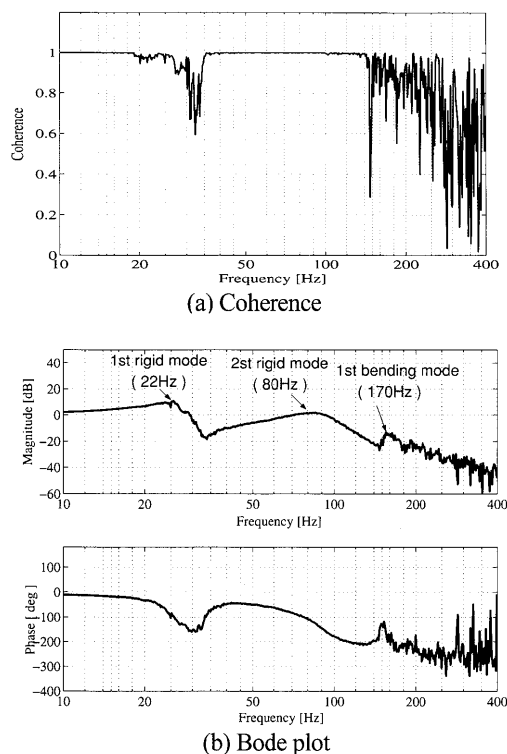


Fig.4 Dynamic response at $\omega = 0$ Hz.

スループレートが高くハイスピードアンプを用い、サンプリング周期は 0.125ms とした。なお、位相遅れ補償などは一切用いていない。まず、浮上状態で正弦波信

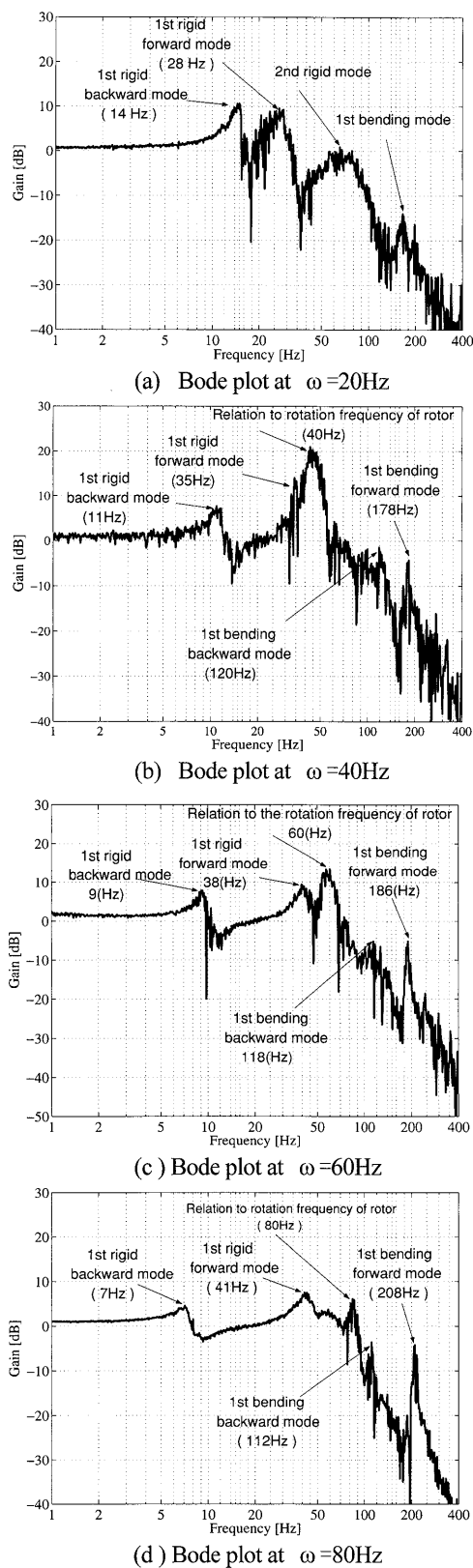


Fig.5 Dynamic response in rotation.

号をロータ上部の x 方向のギャップ変位に加え、目標値としてシステムに掃引し、その入力データとセンサ出力データの相関性を Fig.4(a) で示す。相関性の値は 25 Hz 付近と 150 Hz 以降で乱れているが、一般的には最大 20% 程度の変動であるとき、データの信頼性はまだ十分高いと思われる。得られた閉ループシステムの伝達関数のボード線図を (b) に示す。次にロータは 10Hz づつ回転数を増加しながら、加振正弦波信号を重畳して、それぞれ伝達関数を得ると Fig.5 のゲイン線図となる。(a) はロータが回転数 20Hz 時の状態を示し、剛性 1 次後向き振れ回りモードと前向き振れ回りモードの二つが分離していることを示す。剛性 2 次モードと弾性 1 次モードの動きは鋭いピークがないため、判別しにくい状況にある。回転数 30Hz 以上のとき (b), (c), (d) のように弾性 1 次後向き振れ回りモードが顕著に生じている。図中大きいピークは固有振動数と異なり、ロータの回転周波数と対応している。さらに、このピークの影響で剛性 2 次モードの動きが隠されている。Fig.6 は実験データに基づく固有振動数の変化の挙動をまとめたものである。また、計算結果も同時に示している。☆印は実験値で、点線は計算結果である。ここで、弾性 1 次後向き振れ回りモードの動きについては計算値と実験値がよく一致しているので、導出した弾性モデルの信頼性は大変良好であると言える。

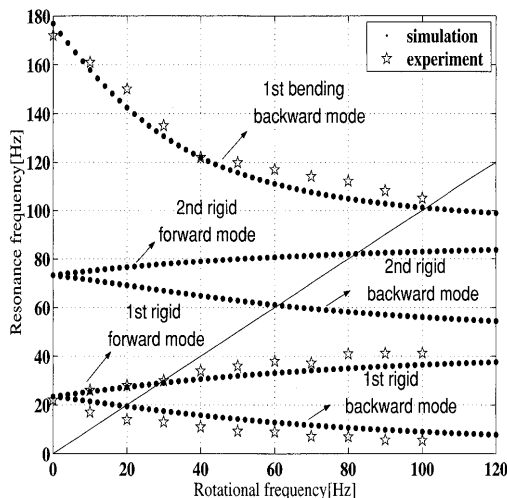


Fig.6 Relation between resonance frequency and rotational frequency.

5 低次元化モデルに基づく H_∞ 制御器設計

本磁気軸受システムに対してはサーボ系の設計と無視した高次弾性モードを不安定化させないスピロオーバーの抑制のためのロバスト安定化が重要となる。

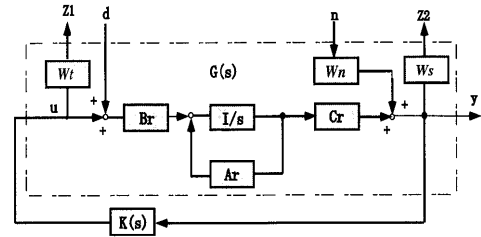
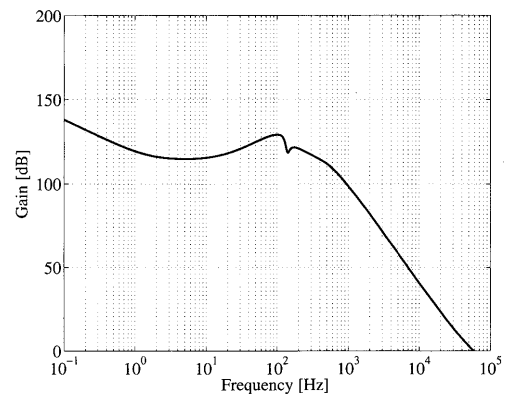


Fig.7 Block diagram of generalized plant.

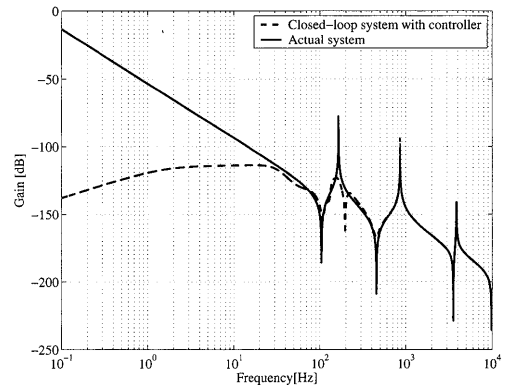
そして、このような要求を満たす制御系として H_∞ 制御系を弾性モデルに適用する。一般化プラントのブロック線図を Fig.7 に示す。まず、ジャイロ効果がない浮上時の設計を行う。重み関数は式(22)のように W_s は一次のフィルタで、 W_t は二次のフィルタとする。また、標準 H_∞ 制御問題の仮定条件を満たすように (行フルランク)、新たな観測ノイズ n を付加する。また、重み関数 W_n は調整パラメータで小さい正数として選ぶものとする。

$$\begin{aligned} W_s &= 10^{-3} \times \frac{s+10}{s+0.01} \\ W_t &= 10^{-5} \times \left(\frac{s+3000}{s+400000} \right)^2 \end{aligned} \quad (22)$$

得られた H_∞ 制御器のボード線図を (a) で示す。この図から低周波数帯域で外乱に対して強い剛性を有するサーボ補償器となっているのがわかる。設計した



(a) Bode plot of H_∞ servo controller



(b) Bode plot of open and closed-loop system

Fig.8 Bode plots of 0Hz.

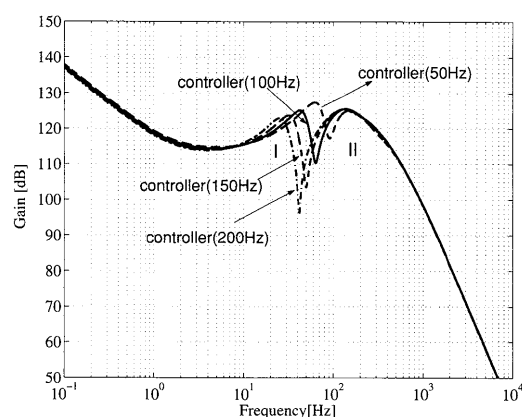
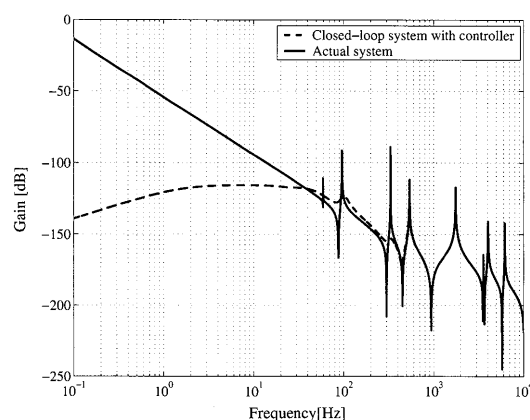
Fig.9 Bode plot of four H_{∞} controller.

Fig.10 Bode plot of open and closed-loop system at 100Hz with controller at 150Hz.

H_{∞} 低次元制御器を式(1)のシステムに適用し、閉ループのボード線図を求めると(b)となった。破線は閉ループ系のゲイン線図を示す。実線は非制御時の応答である。一方、ロータが回転する場合、ジャイロ効果が発生するため、浮上時の制御器を適用すると、高回転数範囲では閉ループ系の固有値のいくつかは虚軸に接近して、システムは不安定に近づく。この問題を解決するために、50Hz, 100Hz, 150Hz, 200Hzの回転数を設定してそれぞれのモデルに対する H_{∞} 制御器を設計し、回転中に制御器を切り替えることによって、200Hz までの全領域でシステムの安定性を保証することを考える。Fig.9 はこのように設計された4個の制御器のゲイン線図の比較を示している。図から、二つのゲインのピークが存在している。これは Fig.6 の固有振動数の変化挙動と対応していることがわかる。Fig.9 の低い周波数のピーク I は回転数の増大に従って、剛体1次後向き振れ回りモードが低周波数へ移動することで、制御器は主に剛性1次後向き振れまわりモードを制御していると考えられる。2つ目のピーク II は弾

性1次後向き振れ回りモードを制御している、この二つのモードはシステムの安定性に大きな影響を与え、安定化のためにハイゲインとなっていることがわかる。Fig.10 は回転周波数 150Hz 時で設計した制御器を $\omega = 100\text{Hz}$ のモデルに適用するときの閉ループのゲイン線図を示す。以上の結果より五つの H_{∞} 制御器を設計して、制御器を切り替えることによって、 $\omega = 0 \sim 200\text{Hz}$ の回転領域でシステムを安定化できると考えられる。

6 結言

電力貯蔵用フライホイール磁気軸受システムに対して、ジャイロ効果を考慮した有限要素モデルを導き、特異値分解によりモード分離して低次元化モデルを導出し、その有効性と制御法を考察した。結果をまとめると次のようになる。

- (1) ジャイロ反対称行列が存在する場合の低次元化については、ロータがフリーフリー状態において半正定行列となるので、コレスキ分解の代わりに特異値分解によるモード法を提案し、その有効性を検証した。
- (2) 信頼性の高い低次元化モデルに対して約 50Hz の帯域を安定化可能とする5つの H_{∞} 制御器を設計して、定格回転数域 0Hz~200Hz の安定化の可能性を検証した。これはゲインスケジューリング制御の一つと考えられる現実的な方法である。
- (3) 本研究対象のロータ系では剛性1次と弾性1次後向き振れ回りモードが不安定化しやすい。このため、 H_{∞} 制御器は2つのピークを有し、これらの不安定化しやすいモードを安定化する補償器となることがわかった。

(2006年1月22日受付, 2006年7月10日再受付,
2006年9月15日再々受付)

参考文献

- [1] 任, 野波, ジャイロ効果を考慮したゼロバイアス磁気軸受系のバックステッピング制御(剛性モデルと弾性モデルに対する考察), 日本機械学会論文集(C 編), Vol.71, No.712, pp.3437-3444, 2005.
- [2] L. Meirovitch, Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff Noordhoff International Publisher B.V., 1980.
- [3] 張, 野波, 樋笠博, ジャイロ効果を考慮した電力貯蔵用 10MWh 高温超電導フライホイールシステムのスライディングモード制御, 日本機械学会論文集(C 編), Vol.67, No.662, pp.3139-3145, 2001.
- [4] 張, 野波, 小林, コレスキ分解を用いたジャイロ効果を有する電力貯蔵フライホイールのゼロパワー制御, 日本機械学会論文集(C 編), Vol.70, No.698, pp.2805-2811, 2004.
- [5] 野波, 任意の分布質量を有する弾性ロータの危険速度通過応答, 日本機械学会論文集(C 編), Vol.148, No.435, pp.1669-1677, 1982.