学術論文

ソリッド平面鉄心の磁気抵抗の解析モデル

Analytical Model of Magnetic Reluctance in Plane Solid Iron Cores

深田 悟[*1]（正員）

Satoru FUKATA (Mem.)

An analytical model of magnetic reluctance is presented in the frequency domain for a case where magnetic flux normally enters and leaves on the surface of wide, plane solid iron-cores. First, a three-dimensional distribution of the magnetic field is obtained with Fourier expansion of simplified boundary conditions. Then, the magnetomotive force between the two pole faces is given by a mean value along flux paths on the surface of the iron core. The magnetic reluctance is derived from the ratio between the magnetomotive force and the magnetic flux. The model is complicated with double series; hence it is simplified with an approximated expression. The numerical result is checked with an experimental result for the frequency characteristics of the magnetic flux passing through the iron core.

Keywords: magnetic reluctance, solid iron core, plane iron core, analytical model, frequency characteristics.

1 まえがき

磁気アクチュエータや渦電流式受動形磁気ダンパ[1]の動特性モデルを考えるとき，全体をまとめて解析するとかなり複雑になるので，鉄心部をいくつかに分けて，各部の磁気抵抗を組み合わせて全体の磁気抵抗をもとめることができれば便利である。このとき，代表的な鉄心形について磁気抵抗モデルを求めておくとそれらを利用できる。特にソリッド鉄心の場合には磁束の浸入形態が複雑であるために，必要度が高い。しかしながら，単純なソリッド矩形鉄心については簡単なモデルが提案されている[2, 3]が，鉄心の側面に磁束が出入りするなどの他の場合についてはあまり検討されていないようである。

磁気特性の解析には一般に，数値解析手法が有用で，特に，磁気飽和などが問題になる複雑な解析には有力な手法である。数値解析結果からモデル(数値解析モデル)をつくる場合には，数値データを周波数の関数として与える方式が直接的で利用しやすいとみられる。ただし，モデルの形やパラメータ値を寸法や形に応じて準備しておく必要があると考えられる。

一方，理論的な解析モデルは，適用には制約を伴うが，寸法を含んだ形を与え，形や構造がやや異なる場合にも，代表寸法を用いて，大まかな特性の把握に流用できる。また，特性に影響を与える因子とその程度を定性的に把握し，現象を理解することに適している。そのような解析的なモデルを見出すことができるかどうかは，設定された問題に解析解が存在するかどうかにかかっている。厳密な解を見出すことが難しい場合には，仮定や条件を緩くして，近似解を求めることも必要である。モデルとしてはそれで充分意味がある。また，モデルが見出されていない場合には，それがより正確なモデルの導出の一歩になることが期待できる。

このような考え方に基づいて，著者は先に，コイルが巻かれていないソリッド矩形鉄心とU字形磁脚のコイル巻き鉄心とが空隙部を介して相対する場合のように，矩形鉄心の側面に垂直に磁束が出入りするときの磁気抵抗のモデリングを試みた[4]。このとき，簡単のために，幅方向の磁界の分布を無視し，磁界を二次元で近似した。本稿では，この分布を考慮した三次元磁界を取り扱い，幅が十分に広い鉄心について，磁気抵抗の解析モデルの導出を試みる。

ここで取り扱う問題は十分に厚い平面形の鉄心に，同じ面に磁束が出入りする場合の磁気抵抗を求めるもので，磁束の浸入問題の一種である。かなり単純な問題であると思われるが，磁界の三次元分布を解析的に求めた報告は見受けられないようである。本稿では，

連絡先：深田 悟，〒815-8540 福岡市南区塩原 4-9-1，九州大学芸術工学研究院人間生活システム部門
e-mail: fukata@design.kyushu-u.ac.jp
[*1] 九州大学.

まず，磁極面での境界条件をフーリエ級数展開して，磁界の関係式を解き，磁界分布の三次元モデルを与える。その結果から二つの磁極間の平均起磁力を求め，それを磁束で除した式で磁気抵抗を表すという，文献[4]と類似な手法をとる。得られた式はフーリエ級数展開に基づいた，複雑な二重級数で与えられる。計算を容易にするために，簡単な近似式を提案する。最後に実験結果と照合して，モデルの妥当性を検証する。

記　号

a ：磁極面の長さ
b ：磁極面の幅
$f_m(s)$ ：増分起磁力
H_x， H_y， H_z ：各軸方向の磁界の強さ
H_{x0} ：境界面の一様な磁界の強さ
$\bar{h}_x$， $\bar{h}_y$， $\bar{h}_z$ ：磁界の強さの正規化ラプラス変換
h ：磁極面間の距離
p_n， q_m ：パラメータ
$R_m(s)$ ：磁気抵抗
s ：ラプラス変数
y_m ：磁界の及ぶ幅方向の範囲
z_m ：有効な鉄心の長さの 1/2
$\alpha^2 = \mu\sigma s$
μ ：鉄心の透磁率
σ ：鉄心の導電率

2　磁気回路と解析条件

2.1　鉄心の形

Fig. 1 に解析する磁石系の構造を示す。電磁石コイルまたは永久磁石で励磁されたU字形の鉄心が矩形鉄心の平面に空隙を介して置かれている。一つの磁極から発する磁束は鉄心の平面に垂直に入り，表面近くの鉄心内部を通って他の磁極に返る。このとき，鉄心内部の磁界の分布を求め，等価な磁気抵抗モデルを見いだすことが本論文の目的である。

座標軸を Fig. 1 のように，磁束が出入りする鉄心面(以下では鉄心表面と呼ぶ)上で，二つの磁極面の中心点を原点 O に選び，磁束が浸入する深さ(厚さ)方向に x 軸，主磁路方向と垂直な方向に y 軸，主磁路と同じ方向に z 軸をとる。

解析の簡単化のために以下のような条件を課す。

1) 磁石鉄心の二つの磁極は同一寸法で，空隙長は同じである。

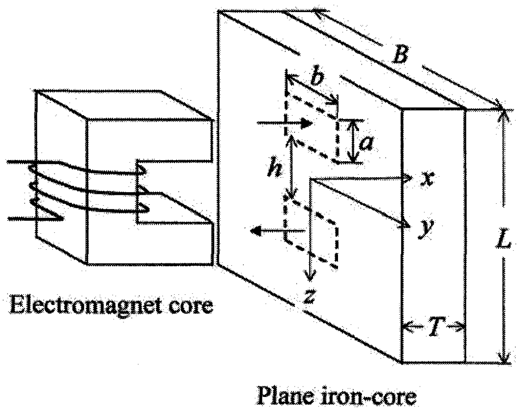


Fig. 1 Configuration of magnetic iron-core

2) 鉄心の厚さ T は磁束の浸入が反対側の面に達しないほどに，充分に深い。
3) 鉄心の幅 B は磁極面の幅 b に比して充分に大きい。
4) 鉄心の磁極面では磁界は面に垂直方向に一様である。
5) 磁気定数は等方，一様で一定で，磁気飽和は無い。
6) 磁束の漏れは無い。

磁界は x , y , z と時間 t の関数である。 x 軸方向の磁界の強さ H_x は y の偶関数で，z の奇関数であると予想される。また， y 軸方向の磁界の強さ H_y は y , z の奇関数，z 軸方向の磁界 H_z は y , z の偶関数であると推測される。

2.2　境界条件

磁界の強さは鉄心の内部と幅方向では減衰していくので，境界条件を次のように与える。

$$H_x(\infty, y, z, t) = 0 \tag{1}$$

$$H_y(x, \infty, z, t) = 0 \tag{2}$$

また，磁束が出入りする鉄心表面での磁界の強さを，仮定 4) の下に，次のように与える。

$$H_x(0, y, z, t) = \begin{cases} H_{x0}(t), & -z_m < z < -h/2 \\ 0, & -h/2 < z < h/2 \\ -H_{x0}(t), & h/2 < z < z_m \end{cases},$$

$$z_m = \frac{h}{2} + a\,, \qquad -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \tag{3}$$

ここで， H_{x0} は座標軸に無関係な磁界の強さで，時間の関数である。

式(3)の不連続な関数は解析解を求める際に不向きであるので，次のようなフーリエ級数展開式を用いることにする[4]。

$$H_x(0,y,z,t) = -H_{x0}(t)\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(p_n z), \quad -z_m < z < z_m \tag{4}$$

ここで,

$$p_n = p_0(2n+1), \quad p_0 = \frac{\pi}{h+2a} \tag{5}$$

$$c_n = \frac{4}{\pi}\frac{\cos[(2n+1)\xi]}{2n+1}, \quad \xi = p_0\frac{h}{2} \tag{6}$$

式(4)の級数は Fig. 2 の矩形関数のフーリエ級数展開である。(ここで，磁極面の長さを2倍の$2a$に想定していることに注意。)

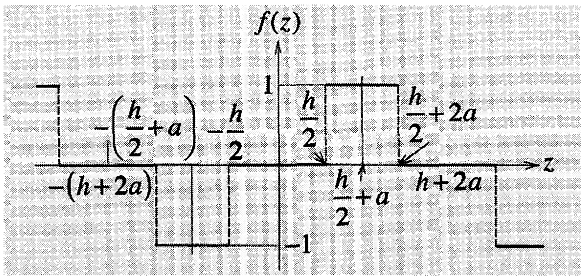


Fig. 2 Function for Fourier expansion

3 磁界分布のモデル

3.1 磁界の関係式

透磁率μと導電率σが等方で一様であるとすると、磁界の関係式と磁束の連続の式が以下のように書かれる(例えば[5, 6])。

$$\nabla^2 H_x = \mu\sigma\frac{\partial H_x}{\partial t} \tag{7}$$

$$\nabla^2 H_y = \mu\sigma\frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{8}$$

$$\nabla^2 H_z = \mu\sigma\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{9}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

ここで，∇^2はラプラシアンで次式で表記される.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{11}$$

以下では,上の式をラプラス変換表示して取り扱う。このとき，例えば$H_x(x,y,z,t)$のラプラス変換を$\bar{H}_x(x,y,z,s)$とするとき，簡単のために，次式で定義される正規化磁界を用いる。

$$\bar{h}_x = \bar{h}_x(x,y,z,s) = \frac{\bar{H}_x(x,y,z,s)}{\bar{H}_{x0}(s)} \tag{12}$$

ただし、sはラプラス変数，$\bar{H}_{x0}(s)$は$H_{x0}(t)$のラプラス変換表示である。h_yとh_zについても同様である。

磁界の関係式を初期値ゼロでラプラス変換すると，磁界の式，連続の式と境界条件の式は以下のように書き換えられる。

$$\nabla^2\bar{h}_x = \alpha^2\bar{h}_x \tag{13}$$

$$\nabla^2\bar{h}_y = \alpha^2\bar{h}_y \tag{14}$$

$$\nabla^2\bar{h}_z = \alpha^2\bar{h}_z \tag{15}$$

$$\frac{\partial\bar{h}_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar{h}_y}{\partial x} + \frac{\partial\bar{h}_z}{\partial z} = 0 \tag{16}$$

$$\bar{h}_x(\infty,y,z,s) = 0 \tag{17}$$

$$\bar{h}_y(x,\infty,z,s) = 0 \tag{18}$$

$$\bar{h}_x(0,y,z,s) = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(p_n z) \tag{19}$$

ただし,

$$\alpha^2 = \mu\sigma s \tag{20}$$

3.2 解の形

式(13)を変数分離法で解くために次のようにおく。

$$\bar{h}_x(x,y,z,s) = h_{xx}(x,s)h_{xy}(y,s)h_{xz}(z,s) \tag{21}$$

このとき，次式が得られる。

$$\frac{1}{h_{xx}}\frac{\partial^2 h_{xx}}{\partial x^2} + \frac{1}{h_{xy}}\frac{\partial^2 h_{xy}}{\partial y^2} + \frac{1}{h_{xz}}\frac{\partial^2 h_{xz}}{\partial z^2} = \alpha^2 \tag{22}$$

いま，qとpを媒介数として

$$\frac{1}{h_{xy}}\frac{\partial^2 h_{xy}}{\partial y^2} = -q^2, \quad \frac{1}{h_{xz}}\frac{\partial^2 h_{xz}}{\partial z^2} = -p^2 \tag{23}$$

とすると，式(22)は次のようになる。

$$\frac{1}{h_{xx}}\frac{\partial^2 h_{xx}}{\partial x^2} = \alpha^2 + q^2 + p^2 \tag{24}$$

このとき，境界条件式(17)を考慮して，式(24)から次式が得られる。ただし，c_{xx}は任意定数である。

$$h_{xx} = c_{xx}e^{-\gamma x}, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + q^2 + p^2 \tag{25}$$

また，式(23)の一般解で，$\bar{h}_x$がyの偶関数で，zの奇関数であるという予測から,次のような形の解を得る。

$$h_{xy} = c_{xy}\cos(qy), \quad h_{xz} = c_{xz}\sin(pz) \tag{26}$$

ただし，c_{xy}とc_{xz}は任意定数である。したがって，境界条件式(19)を考慮して，式(21)から次式を得る。

$$\bar{h}_x = \sum_m \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}e^{-\gamma_{nm}x}\cos(q_m y)\sin(p_n z) \tag{27}$$

ここで，

$$\gamma_{nm}^2 = \alpha^2 + q_m^2 + p_n^2 \tag{28}$$

a_{nm} と q_m は境界条件を満たすように定められる。

$\bar{h}_y$ と $\bar{h}_z$ については，式(14)や(15)から求めるよりも連続の式(16)を満たすように求める方が簡単であるとみられる。このとき，$\bar{h}_y$ と $\bar{h}_z$ が y, z のそれぞれ奇関数，偶関数であることを考慮すると，次のような形に書くことができる。

$$\bar{h}_y = \sum_m \sum_{n=0}^{\infty} b_{nm} e^{-\gamma_{nm} x} \sin(q_m y) \sin(p_n z) \tag{29}$$

$$\bar{h}_z = \sum_m \sum_{n=0}^{\infty} d_{nm} e^{-\gamma_{nm} x} \cos(q_m y) \cos(p_n z) \tag{30}$$

このとき，係数間に次の関係が要求される。

$$\gamma_{nm} a_{nm} - q_m b_{nm} + p_n d_{nm} = 0 \tag{31}$$

式(29)と(30)はそれぞれ式(14)と(15)を満たす。

3.3　境界条件

境界条件式(17)は式(27)から満たされている。また，式(19)から

$$\sum_m \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \cos(q_m y) \sin(p_n z) = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(p_n z\right) \tag{32}$$

上式は次の関係を与えれば満たされる。

$$\sum_m c_{bm} \cos(q_m y) = 1, \quad -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \tag{33}$$

$$a_{nm} = -c_n c_{bm} \tag{34}$$

係数 c_{bm} と媒介数 q_m の選び方にはある任意性がある。

一方，式(29)の形で式(18)の境界条件を満たすことが可能であろうか。ここでは，y 座標の充分大きいところで満たされれば良いとの観点から，式(33)の係数とパラメータの選び方の任意性を利用する。この式の右辺"1"の関数をFig. 3の矩形関数のフーリエ級数展開

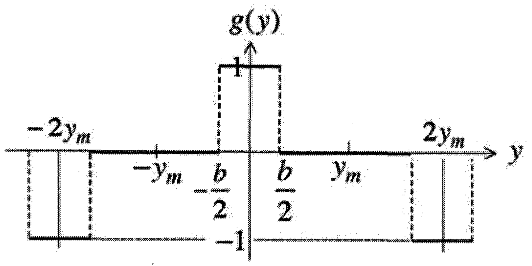


Fig. 3 Function of boundary condition in *y*-axis

で表すことを考える。ここで，周期は $4y_m$ で，磁極面幅 b に比べて十分に大きいとする。この関数のフーリエ級数展開は次のようになる。

$$g(y) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\dfrac{b}{2y_m}\dfrac{\pi}{2}(2m+1)\right]}{2m+1} \cos\left[\frac{\pi}{2}(2m+1)\frac{y}{y_m}\right] \tag{35}$$

ただし，ここでは次の区間で有用である。

$$-y_m \le y \le y_m \tag{36}$$

上式を式(33)と比較して，次の関係が得られる。

$$c_{bm} = \frac{4}{\pi} \frac{\sin\left[(2m+1)\eta\right]}{2m+1}, \quad \eta = q_0 \frac{b}{2} \tag{37}$$

$$q_m = q_0(2m+1), \quad q_0 = \frac{\pi}{2y_m} \tag{38}$$

この関係から，式(29)が式(18)の境界条件を満たすかどうかは自明ではないが，$\pm y_m$ の近傍の y で，$\bar{h}_x \cong 0$，また，式(30)の形から，$\bar{h}_z = 0$ であるので，磁束の連続性から $\bar{h}_y \cong 0$ が期待できる。後に数値計算例で確認する。y_m の定め方については後述する。

3.4　起磁力の関係

鉄心の表面($x = 0$)では，磁界の入口と出口間の起磁力は磁路に依存しないと仮定する。簡単のために，Fig. 4のように，$h/2 < z_c < h/2 + a$ の z 軸上の任意の点 $(-z_c, 0)$ から出発して y 軸に平行に点 $(-z_c, y_c)$ に進み，そこから z 軸に平行に点 (z_c, y_c) に行って，y 軸に平行に z 軸上の点 $(z_c, 0)$ に至る磁路を選ぶ。この磁路に沿った起磁力 f_m は次のように計算される。

$$\begin{aligned} f_m &= \int_0^{y_c} \bar{h}_y(0, y, -z_c, s) dy + \int_{-z_c}^{z_c} \bar{h}_z(0, y_c, z, s) dz \\ &\quad + \int_{y_c}^{0} \bar{h}_y(0, y, z_c, s) dy \\ &= 2\int_0^{y_c} \bar{h}_y(0, y, -z_c, s) dy + 2\int_0^{z_c} \bar{h}_z(0, y_c, z, s) dz \\ &= 2\sum_{n,m} \left\{ -\frac{b_{nm}}{q_m}\left[1 - \cos(q_m y_c)\right] + \frac{d_{nm}}{p_n} \cos(q_m y_c) \right\} \\ &\quad \cdot \sin(p_n z_c) \end{aligned} \tag{39}$$

上式は，$y_c = 0$ のとき，

$$f_m = 2\sum_m \sum_n \frac{d_{nm}}{p_n} \sin(p_n z_c) \tag{40}$$

式(39)と(40)を等しいと置くか，または式(39)を y_c で微分したものがゼロであるという条件から，次の関係が得られる。

$$\frac{b_{nm}}{q_m} = -\frac{d_{nm}}{p_n} \tag{41}$$

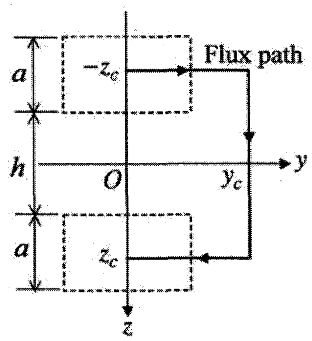


Fig. 4 Flux path on the surface of iron core

上の関係を式(31)に用いると未知係数が次のように定まる。

$$b_{nm} = -\frac{\gamma_{nm} q_m}{{p_n}^2 + {q_m}^2} c_n c_{bm} \quad (42)$$

$$d_{nm} = \frac{\gamma_{nm} p_n}{{p_n}^2 + {q_m}^2} c_n c_{bm} \quad (43)$$

上の結果をまとめると，磁界の分布モデルが以下のように表される。

$$\bar{h}_x = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(p_n z)\left[\sum_{m=0}^{\infty} c_{bm} e^{-\gamma_{nm} x} \cos(q_m y)\right] \quad (44)$$

$$\bar{h}_y = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(p_n z)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_{nm} c_{bm}}{{p_n}^2 + {q_m}^2} q_m e^{-\gamma_{nm} x} \sin(q_m y)\right] \quad (45)$$

$$\bar{h}_z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n \cos(p_n z)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_{nm} c_{bm}}{{p_n}^2 + {q_m}^2} e^{-\gamma_{nm} x} \cos(q_m y)\right] \quad (46)$$

3.5 y_m の選定

y_m すなわち，磁界が届く幅をどのように選定するかが次の問題である。このために，磁束の収支を考える。$x-y$ 軸平面を通る磁束 $\Phi(s)$ は次のように計算される。

$$\Phi(s) = \mu \bar{H}_{x0}(s) \int_0^{\infty} \int_{-y_m}^{y_m} \bar{h}_z(x, y, 0, s) dxdy \quad (47)$$

このとき，磁極面に入る磁束との比は次のように表される。

$$\phi(y_m) = \frac{\Phi(s)}{\mu ab \bar{H}_{x0}(s)} = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_{nm}}{\gamma_{nm} q_m} \sin(q_m y_m) = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p_n}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{1 + (q_m / p_n)^2} \frac{c_{bm}}{q_m}\right] \quad (48)$$

最後の式には式(43)と(38)を用いた。磁束の連続性から式(48)は“1”に等しいはずである。

いくつかの組み合わせに対して，数値計算例を整理すると，磁束の誤差が2%程度を示す y_m が次のように表される。

$$y_m \cong 3\left(\frac{h}{2} + a\right) \quad (49)$$

ついでに， 5%程度では係数の 3 が 2.5 である。このとき，式(45)が $y = \pm y_m$ の近傍で実質的にゼロであることを数値計算例で確認できる。

3.6 鉄心表面の磁界の分布

式(45)と(46)を用いて，鉄心表面での磁力線の輪郭を，次式から微分方程式を解く要領で描くことができる。

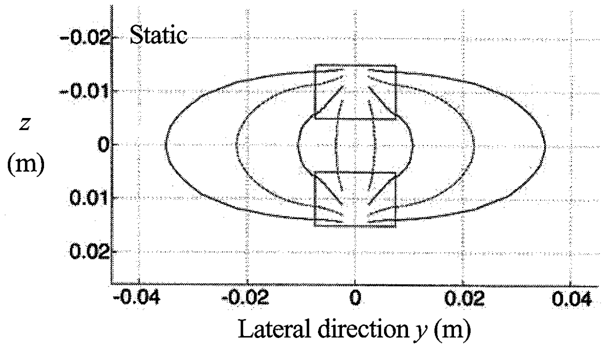
$$\frac{dy}{dz} = \frac{\bar{h}_y(0, y, z, s)}{\bar{h}_z(0, y, z, s)} \quad (50)$$

a =10mm, $b = 1.5a$, $h = a$ に対して，静的な場合 ($s = 0$) を Fig. 5 の上部に， α が非常に大きく， $\gamma_{nm} \cong \alpha$ と近似できる場合を下部に示す。このとき， $y_m = 45$ mm である。図中，四角形は磁極面を示す。それぞれの磁力線の出発点は両方で同じ箇所である。低・中周波数ではこれらの二つの間に入る。このように，本モデルでは周波数が高くなると磁界の広がりがやや狭まる。

Fig. 5 の結果は概して妥当なものと見受けられる。図には示されていないが，磁極面の外側縁 ($z = \pm z_m$) 付近から出る曲線も y 軸に平行に出発して，図の最も外側の曲線に類似なより外側の経路をとる。したがって，外側縁付近で予想される z 軸方向に外側に広がる磁力線が示されていない。これは境界条件をフーリエ級数展開するときの関数の形に因る。実際，Fig. 2 で磁極面の長さを実際の2倍と想定しているのは，磁束の連続性を確保するためである。フーリエ級数が周期関数であることから，Fig. 2 の関数では， $z_m = h/2 + a$ を境にして，左側と右側に磁束の流れが分かれる。したがって，実際の磁極面の外側境界に対応する位置 z_m では z 軸方向の磁束成分はないという境界条件になっている。

このことからも，磁界分布が近似的であることが明らかである。しかしながら，外側縁に出入りする磁界は，図示の最外側の磁力線よりもさらに二回り以上の外側を通り，その分磁路が長くなることから，全体に

与える影響は無視できるほどに小さいと予想される。



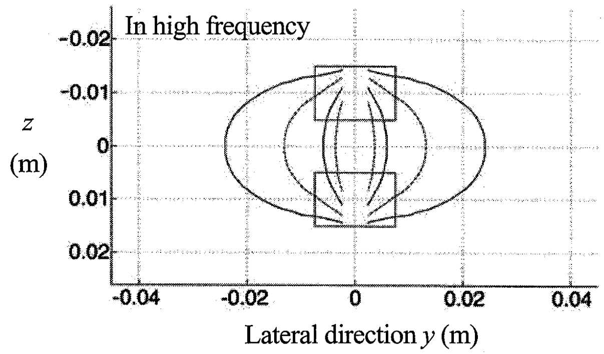


Fig. 5 Magnetic field lines on the surface of iron core

磁界の浸入深さについては，もっとも深いと考えられる静的な z 軸上の点での分布は，式(44)から $p_0 x_m \cong 1$，すなわち，大きく見積もっても

$$x_m = \frac{h+2a}{\pi} \tag{51}$$

のときに，表面の大きさの $1/e \cong 0.37$ 倍より小さくなる。数値計算例によると，上の範囲では0.2程度に減衰する。周波数の影響が現れてくると，磁界の強さが $1/e$ になる深さは大きく見積もって，通常の表皮深さの式[6]で近似される。

4 磁気抵抗モデル

4.1 起磁力

平均的な起磁力を次のように求める。

$$\bar{f}_m(s) = \frac{1}{a}\int_{h/2}^{h/2+a} f_m dz_c$$

$$= \frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d_{nm}}{p_n^2}\cos(p_n\frac{h}{2}) \tag{52}$$

一方, 鉄心表面の平均的な磁路長を $h+a$ として起磁力を定義すると, 式(40)で $z_c = (h+a)/2$ として次のように求められる。

$$f_{ml}(s) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d_{nm}}{p_n}\sin(p_n\frac{h+a}{2}) \tag{53}$$

計算例によると, 式(52)の方がわずかに小さい(高々約5%)。式(52)の方が合理的で，n についての計算の収束性もよいのでこれを選ぶことにする。この式は次のように表される。

$$\bar{f}_m(s) = \frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{a}\right)S_{nm}(s)\cdot l_p \tag{54}$$

$$S_{nm}(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}\{1+\cos[(2n+1)2\xi]\}S_m(s) \tag{55}$$

$$S_m(s) = a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\frac{\sqrt{\alpha^2+p_n{}^2+q_m{}^2}}{1+\left(\frac{q_m}{p_n}\right)^2}\sin[(2m+1)\eta] \tag{56}$$

$$l_p = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{\pi}\right)^4\left(1+\frac{h}{2a}\right)^2 a \tag{57}$$

4.2 磁気抵抗

磁気抵抗を次式から求める。

$$R_m(s) = \frac{\bar{f}_m(s)\bar{H}_{x0}(s)}{\mu ab\bar{H}_{x0}(s)} \tag{58}$$

このとき，上式を次のように書く。

$$R_m(s) = \frac{l_m(s)}{\mu ab} \tag{59}$$

このとき，

$$l_m(s) = \bar{f}_m(s) \tag{60}$$

ここで，$l_m(s)$ は磁極面積を ab と見なしたときの等価な磁路長を表す。上式はそれが先に定義した起磁力に等しいことを示す。

静的な等価磁路長 l_{m0} は $\alpha=0$ として得られる。

$$l_{m0} = l_m(0) = S_{nm0}\cdot l_p \tag{61}$$

$$S_{nm0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}[1+\cos(2n+1)2\xi]S_{m0} \tag{62}$$

$$S_{m0} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{q_m}{p_n}\right)^2}}\frac{\sin[(2m+1)\xi_b]}{2m+1} \tag{63}$$

上式は，磁路の広がりのために，静的な等価磁路長は簡単な式では表せないことを示している。

4.3　近似計算式

磁気抵抗の計算式は複雑であるので，近似計算式を検討する。まず，S_{nm0} は次のように近似できる。

$$S_{nm0} \cong S_{0ap} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{a}\right)^{7/4}} \cdot \frac{b/a}{1+\frac{b}{a}},$$

$$1 \le \frac{h}{a} \le 3, \qquad 0.5 \le \frac{b}{a} \le 2 \tag{64}$$

上式は上の範囲で約 3%以下の近似度を示す。このとき，l_{m0} の近似式が次のように表される。

$$l_{m0ap} = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{\pi}\right)^4 \frac{1}{1+b/a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{a}\right)^{1/4} b \tag{65}$$

$$\cong \frac{2}{1+b/a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{a}\right)^{1/4} b \tag{66}$$

高周波数域では $l_m(s)$ の近似式 $l_{m\infty}(s)$ として次の式を提案する。

$$\frac{l_{m\infty ap}(s)}{(\alpha a)a} = \bar{l}_{m\infty}$$

$$= 1.12\left(\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\sqrt{1+2\frac{h}{a}} + \frac{1}{10}\left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{h}{a}-1\right)\right],$$

$$0.6 \le \frac{b}{a} \le 2, \qquad 0.5 \le \frac{h}{a} \le 3.5 \tag{67}$$

上式は 3%以下の近似度を示す。このとき，磁気抵抗の静的な値と高周波数近似値とが交わる，折れ点角周波数 ω_b (rad/s) はおおよその値で次式から求められる。

$$\omega_b \cong \frac{1.79}{\mu\sigma a^2} \frac{1+\frac{1}{2}\frac{h}{a}}{\sqrt{\left(1+2\frac{h}{a}\right)\left(\frac{b/a}{1+b/a}\right)}} \tag{68}$$

4.4 計算例

前例と同じデータで（$a = 10$㎜, $b = 1.5a$, $h = a$）周波数 f (Hz) に対して，$s = j \cdot 2\pi f$（j は虚数単位）と置いて 式(60)から等価磁路長の周波数特性を計算し，それを式(61)の静的な等価磁路長で正規化した結果を Fig. 6 に示す。また，近似計算式 (67)の結果を式(66)の近似値で除した値で示す。式(68)から計算される折れ点周波数は f_b =0.051 Hz である。

近似式が中・高周波数域で非常に良い近似を与えていることを確認できる。

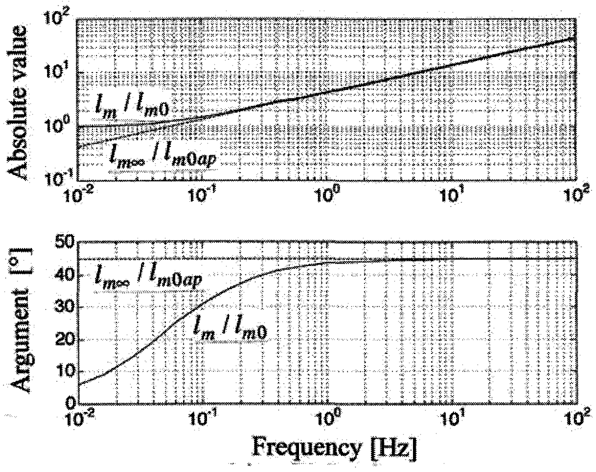


Fig. 6 Relative magnetic reluctance

5　実験結果との比較

5.1 実験結果

U字形鉄心には 0.2㎜ 厚さの電磁鋼板の積層形を用いて，動特性への関与を無視できるようにした。二つの磁極には合計 400 回の駆動コイルを巻いた。磁脚の長さ a_s，幅 b_s，磁脚間の距離 h は下記の通りである。矩形鉄心は軟鉄製（静的な推定比透磁率が約 5000）で，寸法を下に示す。空隙長を l_0 =1㎜ に固定し，増分磁束は矩形鉄心の中央部に 4 回巻いたサーチコイルで計測した。

$$a_s = 20 \text{ mm}, \quad b_s = 17 \text{ mm}, \quad h_s = 25 \text{ mm}$$
$$B = 40 \text{ mm}, \quad T = 20 \text{ mm}, \quad L = 100 \text{ mm}$$

B はモデリングで仮定しているおおよその幅 195mm（$2y_{ms} = 6(a_s + h_s/2)$）の約 1/5 である。これは，この程度の幅の広さでモデルの検証には十分であると予想したためである。

駆動コイルにバイアス電流 0.8A（空隙部での磁束密度が約 0.2T）を流し，それに対応するパワーアンプへの入力電圧値を基準にして，約 35%の振幅で入力電圧を正弦波状に変化させた（使用したパワーアンプは電流フィードバック式で，別な類似の実験結果では，コイル電流の入力電圧に対する周波数応答のゲイン値は 1kHz で約 3dB 低下するという特性を示した。このとき，コイル電流の振幅は低周波数域でバイアス値の約 1/3, 1kHz 辺りでは約 1/4 になると推定される）。そして，

駆動コイル電流を入力とし，サーチコイルに発生する電圧を出力とする周波数応答を計測した。その結果を $j\omega$（j は純虚数単位，ω は入力の角周波数）で除すことによって，起磁力に対する発生磁束の周波数応答を求めた。結果を Fig. 7 に示す。

5.2 計算結果

高周波数域での近似は低周波数域辺りまでかなり良いとみられるので，鉄心の磁気抵抗の計算には高周波数域での近似式を用いる。このとき，電磁石系の等価磁気回路での関係から，U字形鉄心の磁気抵抗を無視して，電流に対する磁束の伝達関数が次式のように得られる。

$$\frac{\Phi(s)}{I(s)}=\frac{\mu_0 A_0 N}{2l_0}\frac{1}{1+\dfrac{\mu_0}{\mu}\dfrac{A_0}{ab}\dfrac{l_{m\infty}(s)}{2l_0}} \tag{69}$$

ここで，μ_0 は真空の透磁率($=4\pi\times10^{-7}$ H/m)，A_0 は空隙部の等価断面積，N はコイルの巻き数である。

空隙部での縁効果[7]を考慮して，鉄心の寸法と A_0 を下のように採った。

$$a=a_s+4l_0,\quad b=b_s+4l_0,\quad h=h_s-4l_0,$$
$$A_0=(a_s+3l_0)(b_s+3l_0) \tag{70}$$

$\mu=5000\mu_0$ と $\sigma=1.0\times10^7\ 1/\Omega\mathrm{m}$ を用いて，式(69)から周波数応答を計算し，測定装置の感度を考慮して静的なゲイン値を補正した。さらに，変化分の比較を容易にするために，ゲインを低周波数域で実験値と揃えた(計算値を 0.50dB 上げた)。結果を Fig. 7 に示す。($T=10$ ㎜ でもほとんど同じ結果を得た。)

計算のゲインの周波数特性は200Hz以下で実験結果とよく合うが，それ以上では外れていく。一方，位相遅れは計算値が全体的に実験値の約半分で，良くない。位相遅れ特性には，静的なヒステリシス特性[3]や磁束の集中[8]などいくつかの要素が関係すると考えられるので，この程度の一致度で差しあたり満足できると思われる。

鉄心を立てて，厚さと幅を逆にした場合($B=20$ mm, $t=40$ mm, $L=100$ ㎜)の実験結果は，先の結果に比べて，ゲインが全域で約 0.5dB 低いだけで，ほとんど同じ周波数特性を示した。これは，厚みの違いによる磁束の浸入深さの効果ではなく，幅を超えて側面に回り込む磁束分布の様子が，広幅鉄心の平面全体に分布する場合と類似であるためであると考えられる。このことから，ここで求めた平板形モデルは有限幅の場合にも応用できると考えられる。

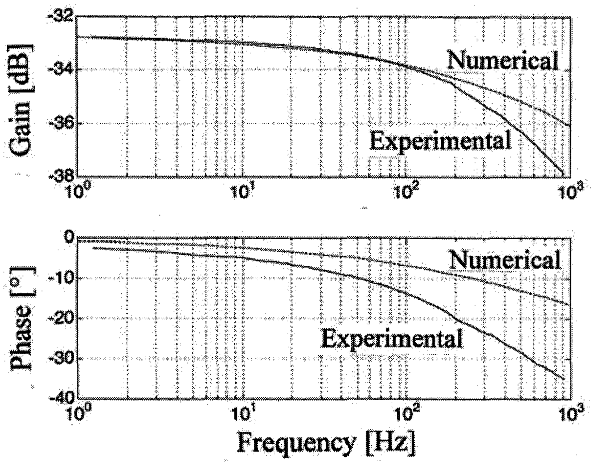


Fig. 7 Experimental and numerical results

6 結 び

平面鉄心の面に垂直に磁束が出入りする場合に，磁界の分布モデルを導出し，磁気抵抗の解析的なモデリングを試みた。そして，中・高周波数域で簡単な表現式を提案した。空隙部を持つ電磁石系に対して，モデルから求めた増分磁束の周波数応答の計算値を実験結果と比較・照合した。

(2006 年 9 月 29 日受付，2006 年 12 月 18 日再受付，
2007 年 5 月 7 日再々受付)

参考文献

[1] 村上，佐藤：新方式渦電流ダンパの研究，第 9 回電磁力関連のダイナミクスシンポジウム，pp.187-192，1997.
[2] Feeley, J. J.: A Simple Dynamic Model for Eddy Currents in a Magnetic Actuator, *IEEE Trans. on Magnetics*、Vol. 32, No. 2, pp. 453-458, 1996.
[3] Fukata, S: A Frequency-Domain Model of Electromagnetic Actuators Composed of Solid Iron Cores, *JSME Int. Journal,* C-43-1, pp. 38-46, 2000.
[4] 深田：磁気アクチュエータの一鉄心部磁気抵抗の解析モデル, 日本 AEM 学会誌，Vol. 14, No. 1, pp. 66-71, 2006.
[5] Stoll, R. L.: *The Analysis of eddy currents,* pp. 4-5, Clarendoon Press, Oxford, 1974.
[6] 卯本：電磁気学，pp. 7-8, pp. 325-326，昭晃堂，平成 5 年.
[7] Engelman, R. H., *Static and Rotating Electromagnetic Devices*, (1982), pp. 36-38, Marcel Dekker, Inc.
[8] 深田：磁気力アクチュエータの周波数特性に対する一考察，日本機械学会論文集(C 編)，71 巻 709 号，pp. 2746 -2753，2005