

学術論文

電磁力バランスを考慮した任意磁場生成コイルパターン計算手法の開発

Development of coil pattern design method of arbitrary magnetic field considering electromagnetic force balance

寺田 将直^{*1}(正員), 阿部 充志^{*1}, 今村 幸信^{*1}

Masanao TERADA (Men.), Mitsushi ABE, Yukinobu IMAMURA

A technique to search a force balanced coil was developed, based on coil pattern design method which calculates optimized coil shape on a surface. Starting with the coil shape, the new technique minimizes a net thrust force through the linear programming method. The new technique suppresses the magnetic field degradation to set up restriction conditions considering current direction and magnetic field in initial state. Test calculation was done in Gradient field coils pattern design for MRI apparatus, which are pulse coils in strong magnetic field. The applicability has been confirmed.

Keywords: coil pattern, electromagnetic force, linear programming, gradient field coil, MRI.

1 緒言

核融合装置や核磁気共鳴イメージング(Magnetic Resonance Imaging: MRI)装置などの磁場発生装置は、指定された空間に所望の磁場を生成することが求められるが、磁場が強くなると電磁力を支持する構造が複雑かつ大型化する。よって、電磁力を小さくする設計とその設計手法が必要である。

核融合装置では、応力と磁気エネルギーの関係を表すビリアル定理を用いて、トーラス大半径方向の電磁力を低減したヘリカル型コイルの電磁力平衡コイル[1]や応力最小コイル[2, 3]が提案されている。上記コイルは初等関数で表現可能で、その近傍の周方向に様な磁場を生成するため、電磁力は近似式で表現可能であり、これを小さくするコイルパターンは、半理論的に求めることが可能である。

一方、MRI 装置では、撮像領域に均一な磁場を生成する静磁場コイルと、撮像領域に線形勾配で空間的に変化する磁場を生成する傾斜磁場コイルからなる。これらは初等関数で近似可能であるが、コイル付近に生成する磁場分布は様で無く、電磁力を近似式で表現することは困難であるため、数値解法が必要となる。

この一つとして、電流密度分布を三角関数で表現し、目標磁場分布が得られるような関数の組み合わせを求めるもの[4]があり、局所的なトルクや全体に働く合力を最小にする傾斜磁場コイル[5-7]が提案されている。

連絡先: 寺田 将直, 〒319-1221 日立市大みか町 7-2-1, 日立製作所日立研究所,

e-mail: masanao.terada.br@hitachi.com

^{*1} 日立製作所日立研究所

上記手法は、形状毎に関数を変更するため汎用性が低い。これに対し、有限要素法を用いて目標磁場を生成するような電流分布を求める手法[8]がある。これは、任意曲面で計算でき汎用性が高いが、目標磁場分布に近づけるために、磁場の閾値を定めて電流分布を構成するため、磁場精度はその選び方に依存する。また、同様の手法で、目標磁場を生成しかつ局所的なトルクを最小にするような電流分布を求めるもの[9]があるが、磁場精度は、目的関数の重みの選び方に依存する。

これらに対し、目標磁場分布を形成するような任意曲面上の電流ポテンシャル分布を特異値分解を使った最小二乗法で解くアプローチ[10]がある。電流ポテンシャル分布は互いに直交する特異ベクトルの重ねあわせで表現されるため、必要な次数を選択することで任意の磁場分布を所望の磁場精度で解くことが可能である。この手法は核融合装置や MRI 装置のコイル設計に適用されている[10, 11]。しかし、電磁力最適化アルゴリズムは含まれていないため、形状を試行錯誤で変更し、電磁力が低減するコイルパターンを得ていた。

本稿では、支持構造簡素化を目指すべく並進力低減を目的とした電磁力最適化手法を新たに構築する。また、本手法を水平磁場型 MRI 装置用傾斜磁場コイルパターンに適用し、その有効性を確認する。

2 コイルパターン計算手法

対象とするコイルは、断面内に様な電流密度が流れる薄板近似[12]で表現可能なものとする。Fig. 1 に、磁場生成領域の N 個の磁場計算点と、節点数 M の電流面上に形成されるコイルパターンを示す。磁場計算

点 i の目標磁束密度の内、注目する方向の成分を $B^{\text{d ideal}, i}$ とし、全成分を並べた磁場分布の列ベクトルを $\{B^{\text{d ideal}}\}$ とする。また、電流面の節点 j の電流ベクトルポテンシャルの法線成分を T_j とし、全成分を並べた列ベクトルを $\{T\}$ とする。

$\{T\}$ と $\{B^{\text{d ideal}}\}$ の関係は $N \times M$ 行列 $[A]$ を用いて以下のように表せる。

$$\{B^{\text{d ideal}}\} = [A]\{T\} \quad (1)$$

$[A]$ を特異値分解することで、以下のように $\{T\}$ の近似解が得られる。

$$\{T\} = [V][\Sigma]^{\dagger}[U]^{\dagger}\{B^{\text{d ideal}}\} \quad (2)$$

ここで、 $[U]$ 、 $[V]$ は特異ベクトルを並べたもので、それぞれ $N \times N$ 行列、 $M \times M$ 行列である。 $[\Sigma]$ は特異値を対角成分に持つ $N \times M$ 行列である。式(2)の代わりに、次式のようにある初期値 $\{T_0\}$ との差分 $\{\Delta T\}$ を計算し $\{T\}$ を求めることも可能である。

$$\begin{aligned} \{T\} &= \{T_0\} + \{\Delta T\} \\ &= \{T_0\} + [V][\Sigma]^{\dagger}[U]^{\dagger}\{\Delta B\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\{\Delta B\}$ は $\{B^{\text{d ideal}}\}$ と初期の磁場分布 $\{B^{\text{d }0}\}$ との差分である。式(3)は、コイルパターンに制約が課される場合に有効である。本手法では、式(2) (3)の特異値の個数及びそれぞれの特異ベクトルの大きさを調整することで、任意の精度で求解可能としている。コイルパターンは $\{T\}$ を形成するポテンシャル場の等高線で表現される。

実際の設計では、電流面が複数枚必要な場合がある。その場合は、各々に磁場生成領域を設定し、それぞれの電流ポテンシャルを上記手法で計算し、自身以外が形成する磁場を目標磁場に取り込んで、それぞれの電流ポテンシャルが収束するまで繰り返し計算を行う。

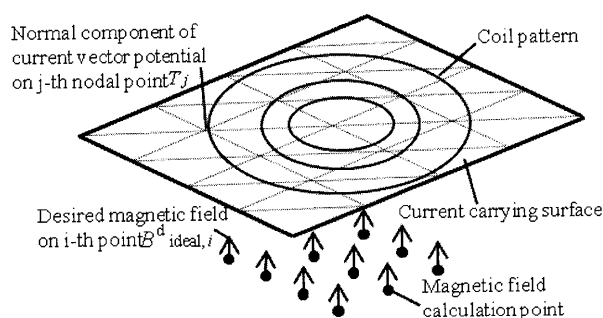


Fig. 1 Desired magnetic field and current vector potential.

この計算方法は参考文献[11]に詳しい。

3 電磁力最適化手法

上記計算手法で得られたコイルパターンは、任意の磁場分布を所望の磁場精度で解くことが可能であり高い磁場性能を持つが、コイルに働く電磁力に関して最適化されていない。そこで、電流ポテンシャル分布の変更を最小限に抑えながら、電磁力を小さくする計算手法を構築する。ここでは並進力を対象とするため、電磁力合力を最小にする計算手法を構築する。以下に、電磁力の電流ポテンシャルによる表現方法及び線形計画法による最適化について述べ、コイルパターン計算手法と組み合わせた計算手順について述べる。

3.1 電磁力の電流ポテンシャルによる表現

Fig. 2 に電流面上の磁束密度分布と電磁力の合力を示す。ここでは、自己磁場が小さい機器を対象とし、電磁力計算に用いる磁束密度は、外部コイルにより生成されるもののみを用いる。自己磁場の影響が大きい場合は以降の磁束密度に自己磁場分を重ね合わせたものを使用する。Fig. 3 に三角要素 k に働く電磁力 F_k を示す。 F_k は、一様な電流密度 J_k と、重心の磁束密度 B^{ccs_k} 及び面積 S を用いて、以下のように書ける。

$$F_k = (J_k \times B^{\text{ccs}_k})S \quad (4)$$

J_k は、薄板近似の電流ポテンシャル表現[12]を離散化することで、以下のように書ける。

$$J_k = \frac{T_{k,1}(X_{k,3} - X_{k,2}) + T_{k,2}(X_{k,1} - X_{k,3}) + T_{k,3}(X_{k,2} - X_{k,1})}{2S} \quad (5)$$

ここで、 $T_{k,1}$ 、 $T_{k,2}$ 、 $T_{k,3}$ は節点の電流ポテンシャル、 $X_{k,1}$ 、 $X_{k,2}$ 、 $X_{k,3}$ は位置ベクトルである。式(5)を(4)に代入すると、

$$F_k = a_{k,1}T_{k,1} + a_{k,2}T_{k,2} + a_{k,3}T_{k,3} \quad (6)$$

を得る。ここで、 $a_{k,1} = (X_{k,3} - X_{k,2}) \times B^{\text{ccs}_k} / 2$ などとなる。電磁力合力 F_{all} は式(6)を電流面の K 個の要素で足し合わせたものであり、 $\{T\}$ と $3 \times M$ 行列 $[A_f]$ を用いて、以下のように書ける。

$$F_{\text{all}} = \sum_{k=1}^K F_k = [A_f]\{T\} \quad (7)$$

このように、電磁力の合力は電流ポテンシャルの線形結合で表現される。

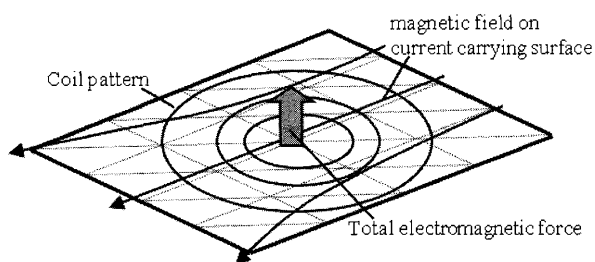


Fig. 2 Electromagnetic force on current carrying surface.

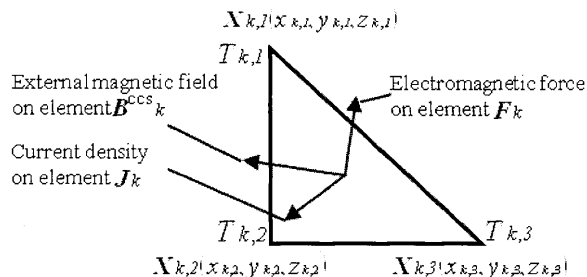


Fig. 3 Electromagnetic force on triangle element.

3.2 線形計画法による電磁力最適化

前節で定式化した F_{all} を最小化するためには、式(7)から、電流ポテンシャルを変更すればよいことが分かる。ここで扱うコイル面の節点数は数千であり、電磁力は電流ポテンシャルの線形結合であることから、線形計画法[13]を用いた。制約条件付き最適化手法であるラグランジュ未定乗数法やペナルティ法では、制約条件を目的関数に組み込む際の重み付けを適切に行わなければならない、今回対象とするような変数が数千に及ぶと計算時間が膨大になってしまう上に大域的最適解を保障しないという欠点を持つためここでは採用しない。以下に、最小化する目的関数及び、制約条件について説明する。

3.2.1 目的関数

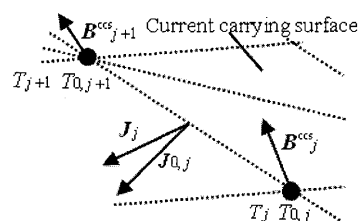
電磁力の合力を最小とするため、目的関数 O を以下のように設定する。

$$O = |F_{all, x} - F_{target, x}| + |F_{all, y} - F_{target, y}| + |F_{all, z} - F_{target, z}| \quad (8)$$

ここで、 F_{target} は目標とする電磁力合力であり、xyzそれぞれの成分ごとに設定し和をとるものとする。

3.2.2 制約条件

目的関数を最小にするような電流ポテンシャルは一意に決まらないため、解の中には、目標磁場分布から大きくずれるものや製作上困難な複雑なコイルパターンとなるものが存在する。そのため、生成する磁場

Fig. 4 Current potential and magnetic field at node j , $j+1$, and current density between node j , $j+1$.

分布及び電流分布に制約条件を設ける。

磁場分布 $\{B^d\}$ に関する制約条件は、以下とする。

$$|B^d_i - B^{d, ideal}_i| < \beta |B^d_{0, i} - B^{d, ideal}_i| \quad (9)$$

ここで、 β は計算過程で更新する量である。

電流分布に関する制約条件は、隣り合う節点 j , $j+1$ での電流ポテンシャル値 T_j , T_{j+1} を用いて設定する。この間を流れる電流の大きさ $T_{j+1} - T_j$ は、節点間の様な電流密度 J_j と節点間距離 r から $|J_j| r$ と表される。同様に、初期の電流の大きさ $T_{0, j+1} - T_{0, j}$ は初期電流密度 $J_{0, j}$ を用いて $|J_{0, j}| r$ となる。よって、 T_j , T_{j+1} の関係は以下ようになる。

$$T_{j+1} - T_j = (|J_j| / |J_{0, j}|) (T_{0, j+1} - T_{0, j}) \\ \leq (J_{max} / |J_{0, j}|) (T_{0, j+1} - T_{0, j}) \quad (10)$$

ここで、 $T_{0, j+1} > T_{0, j}$ とし、 J_{max} は導体発熱量の制限値から決定する。

式(10)は、コイル導体の移動範囲を表しているが、電流面での磁場勾配が微小なところで導体移動しても、電磁力の合力の変化は微小である。一方、磁場勾配が大ききところでは少しの導体の移動で電磁力の合力は大きく変化する。そこで、節点 j , $j+1$ での磁場勾配を考慮して式(10)を変更する。Fig. 4 に示すように、節点 j , $j+1$ での磁束密度 B^{ccs}_j , B^{ccs}_{j+1} を用いて差分磁場 $|\Delta B^{ccs}_j|$ を以下のように表現する。

$$|\Delta B^{ccs}_j| = |B^{ccs}_{j+1} - B^{ccs}_j| \quad (11)$$

式(11)の電流面全体での最大値を $|\Delta B^{ccs}_{j, max}|$ とすると $|\Delta B^{ccs}_j| / |\Delta B^{ccs}_{j, max}|$ は 0 から 1 までの値をとる。この値を式(10)の右辺値に掛けて、 $|\Delta B^{ccs}_j| = 0(T)$ のとき初期の電流の大きさ $T_{0, j+1} - T_{0, j}$ と等しくなるように変形すると以下のように書ける。

$$T_{j+1} - T_j \leq \left\{ \frac{|\Delta B^{ccs}_j|}{|\Delta B^{ccs}_{j, max}|} \left(\frac{J_{max}}{|J_{0, j}|} - 1 \right) + 1 \right\} (T_{0, j+1} - T_{0, j}) \quad (12)$$

3.4 電磁力最適化付コイルパターン計算手法

前節で構築した電磁力最適化計算手法を前章で述べたコイルパターン計算手法と組み合わせた。以下に計算手順を示す。ここで、 β の初期値を 10 とする。

1. 初期電流ポテンシャル $\{T_0\}$ を設定する。
2. 式(3)で電流ポテンシャル分布 $\{T_1\}$ を得る。
3. 線形計画法による電磁力最適化計算で電流ポテンシャル分布 $\{T_2\}$ 得る。
4. β を以下の式で更新する。

$$\beta = \max([A]\{T_2\} - \{B^d_{ideal}\}) / \max([A]\{T_1\} - \{B^d_{ideal}\}) \quad (13)$$

ここで、 $\max$ は残差の最大値を意味する。

5. $\{T_2\}$ を初期電流ポテンシャル $\{T_0\}$ に設定する。
6. 2-5 を β 及び電流ポテンシャルの最大値 (= 起磁力) が収束するまで繰り返す。収束条件は、前段階の値に対する前段階と現段階の値の差分の割合が 0.1 % 以下となったときとする。

式(13)による β の更新で、式(9)がとり得る範囲が狭くなり、結果、初期の磁場分布に近づいていく。この計算で、磁場性能を可能な限り保持することができる。また、電流面及び磁場生成領域が複数個存在する場合は、上記 1-5 をそれぞれの系で実施し、互いの磁場を目標磁場に取り込んで 6 の収束計算を実施する。

4 水平磁場型 MRI 用傾斜磁場コイルへの適用

傾斜磁場コイルは、MRI 装置の撮像領域に軸方向(z)、横方向(x)、縦方向(y)それぞれに線形に変化するパルス状の磁場を生成する。この磁場を外側に設置される超電導コイル等の静磁場発生装置の均一な静磁場と重畳させ撮像断面に位置情報を与える。パルス磁場は、周囲の構造物に渦電流を生じさせ、撮像領域に不要な磁場を発生させるため画像劣化を引き起こす。この渦電流を抑制するため、主に傾斜磁場を発生させるメインコイル(Main Coil: MC)に加え、これと逆向きの電流を流すシールドコイル(Shielding Coil: SC)を配置する。傾斜磁場コイルは静磁場により電磁力が働くが、並進力が存在すると自重を支える支持構造以外の付加的な支持を必要とする。また、この電磁力は時間的に変動するが、並進力が存在すると MRI 撮像時の振動を励起し、画質劣化や騒音を引き起こす。よって、並進力(電磁力合力)を低減したコイルパターンを得ることは、構造簡素化、性能向上に寄与することが分かる。以下では、y 傾斜磁場コイルを対象とし、その体系及び仕様について述べ、電磁力バランスを考慮したコイルパターンの

例を示す。

4.1 体系と仕様

Fig. 5 に y 傾斜磁場コイルの計算体系を示す。傾斜磁場生成領域(Gradient Magnetic field Generation Surface: GMGS)に生成する磁場 $\{B_{z,GC}\}$ は以下のように表せる。

$$\{B_{z,GC}\} = C \cdot \{y\} \quad (14)$$

ここで、 C は傾斜磁場強度 [T/m] である。また、磁場遮蔽領域(Magnetic Shield Evaluation Surface: MSES)では磁束密度の法線成分が 0(T) となるような目標磁場分布を設定する。GMGS を MC, MSES を SC の磁場評価領域とし、これら 2 つの系で互いの磁場を目標磁場にとりこみながら電流ポテンシャル分布を計算する。式(14)と Fig. 5 の体系から、対称条件を用いることができるため、 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ の領域のみで計算可能である。Fig. 5 では、対象とする全体系を示すため、GMGS 及び MSES はすべての領域を表示している。Fig. 5 中の数値は、SC の軸長を 1000 mm とした時の相対値である。仕様は Table 1 に記載する。磁気エネルギーは傾斜磁場強度と電流立ち上げ速さの要求から、漏れ磁場は渦電流磁場の許容値から、範囲が決まっており、電磁力合力は、コイル重量約 1000 kg の 1 % 以下とした。

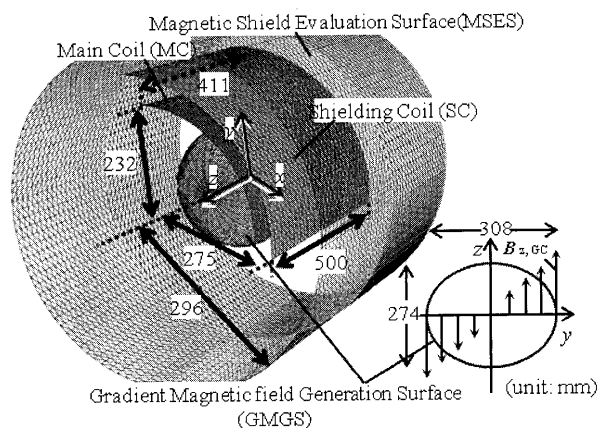


Fig. 5 Gradient coil model and gradient magnetic field.

Table 1 Specification.

Parameters	Values
Static magnetic field strength(T)	3
Gradient magnetic field strength (T/m)	0.04
Magnetic energy (J)	<140
Maximum value of residual magnetic field in MSES (T)	<0.004
Net thrust force (N)	<100

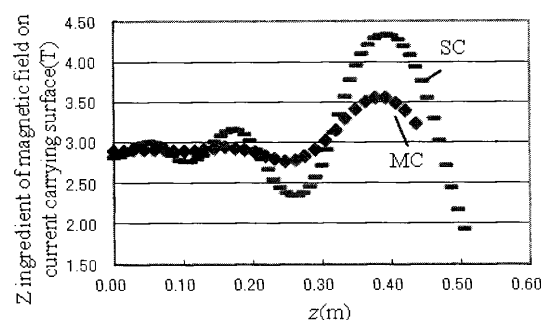


Fig. 6 Magnetic field on current carrying surface.

4.2 電磁力合力と最適化方針

傾斜磁場コイルに働く電磁力は、静磁場発生装置の磁場(3 T)によるものが支配的となる。形状及び磁場の対称性から、電磁力合力は y 成分のみ非零となり、磁束密度は z 成分のみ合力に寄与する。Fig. 6 に MC, SC それぞれの面上に静磁場発生装置が作る磁束密度の z 成分を示す。磁場の変化は端部に行くにしたがって大きく、SC の端部領域で磁場変化が大きいことが分かる。磁場変化が大きい領域では電磁力が大きく変化することから、ここでは、SC の電流ポテンシャル分布を電磁力合力が最小となるように変更することにする。

4.3 結果

3.4 節の手順 1-6 で得られるコイルパターンを Fig. 7(a) に示し、yz 面に作る磁束密度の z 成分の等高線を Fig. 7(b) に示す。(a)は、x 軸から時計回りに回転する角度を θ とし、横軸 θ 、縦軸 z として、表示したものである。ここで、SC は yz 面に対して折り返して表示している。SC の端部領域では、Fig. 6 に示したように磁場勾配が大きく端部に行くにつれ磁場が小さくなるため、電磁力を小さくするようにコイルパターンが z 方向外側へ押し出されている様子が分かる。(b)から、GMGS で磁束密度 z 成分が y 方向に線形勾配で変化する様子と MSES の外側で磁気遮蔽がされている様子が分かる。Fig. 8 に計算の収束の様子を示す。(a)は電磁力合力と MSES 上の漏れ磁場最大値であり、漏れ磁場が計算過程で小さくなりながら(0.0023(T))も、電磁力合力が 10(N)程度に抑えられている。また、(b)は MC, SC それぞれの起磁力と磁気エネルギーであり、計算の早い段階で収束していることが分かる。電磁力合力がばらつくのは、MC, SC とともに局所的な電流ポテンシャル分布が計算毎に変化し、 F_{target} が式(9)-(12)の制約条件の範囲外にくる場合があるためである。

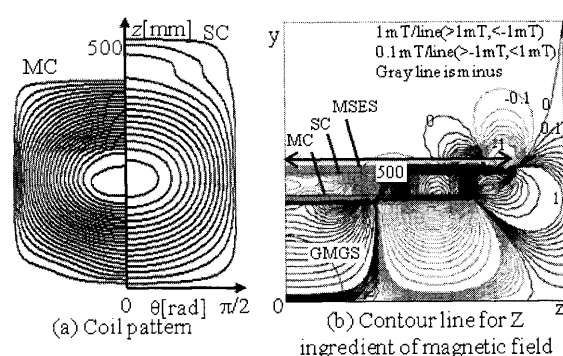


Fig. 7 Calculation result of coil pattern design method using force optimization.

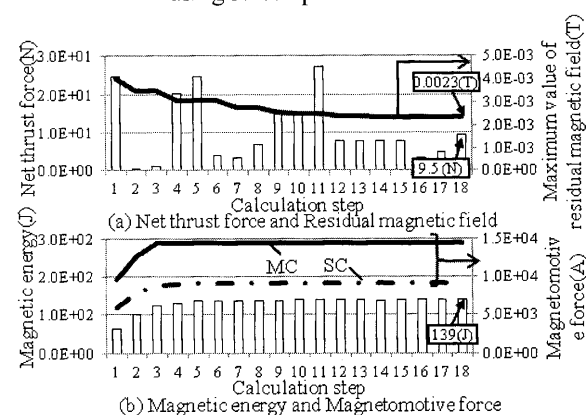


Fig. 8 State of convergence of coil pattern design method using force optimization.

今回得られたパターンとの比較のため、MSES での磁場を電磁力最適化で考慮しない場合(式(9)の制約条件がない場合)を Fig. 9(a)に示す。SC で、Fig. 8(a)よりも外側に押し出されるターンが多いのは、磁場の制約が無くより広い範囲で探索を実施するためである。Fig. 10 に示すように磁場の制約が無い分、漏れ磁場が大きい(0.0043(T), 閾値以上)。これは、Fig. 9(b)の MSES 外側の磁場の広がりとなって現れる。一方、磁気エネルギーが両者で同等となるため、漏れ磁場を抑えながら計算を進めていく本手法が効果的である事が分かる。また、式(8)で F_{target} を変えた場合の電磁力合力と漏れ磁場との関係を Fig. 11 に示す。右端の点は電磁力最適化なしの計算結果である。このように、両者はトレードオフの関係にあり、画質とコストの兼ね合いから限界設計を可能とする指針を提示することができた。最後に、本手法では、面内に連続的に分布する電流ポテンシャルを取り扱ったが、実際は、等高線に沿って形成される導体内に電流が流れる。電磁力合力はこの導体幅によって異なるため、別途設定する必要がある。このような実体系での電流分布を考慮した導体形状を

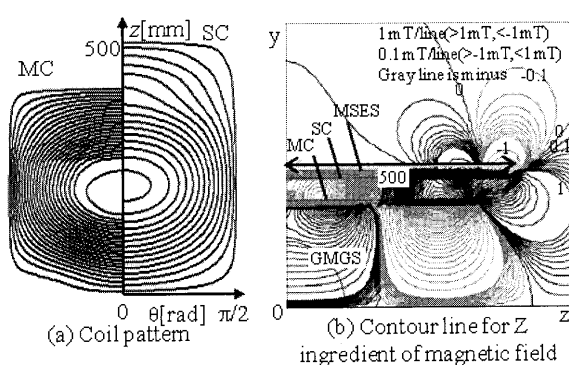


Fig. 9 Calculation result of coil pattern design method using force optimization not considered with effect of magnetic field in MSEs.

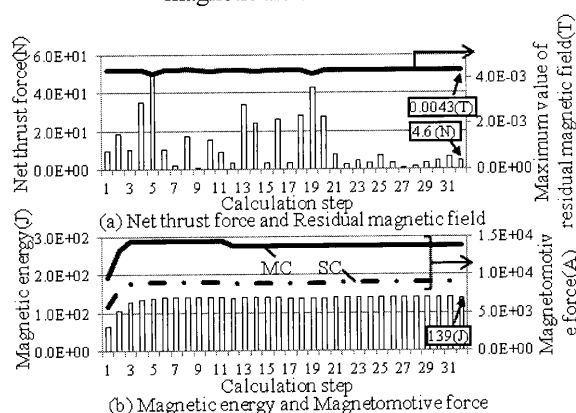


Fig. 10 State of convergence of coil pattern design method using force optimization not considered with effect of magnetic field in MSEs.

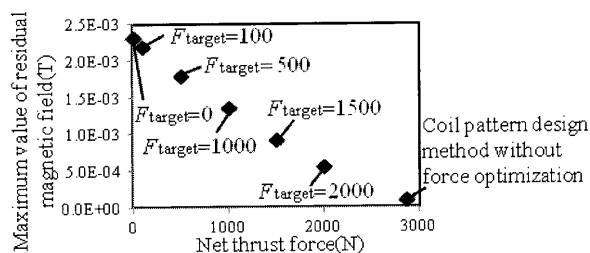


Fig. 11 Relation between net thrust force and residual magnetic field.

決定する手法を開発することは今後の課題である。

5 結言

電磁力バランスを考慮した任意磁場生成コイルパターン計算手法を構築し、以下の結論を得た。

1. 電磁力最適化手法を開発しコイルパターン計算手法に組み込んだ。最適化方法は、コイルが作る磁場を考慮した目的関数、制約条件を設定し、合力最小となるパターンを線形計画法により計算するものである。

一連の計算を、初期パターンが作る磁場と電磁力最適化で得たパターンが作る磁場の比が収束するまで繰り返すことで、磁場性能悪化を最小限に抑えることを可能とした。

2. 上記手法を傾斜磁場コイルパターン設計に適用し、周囲への漏れ磁場を最小限にしながら電磁力を低減でき、本手法の有効性を確認した。

今後は導体形状を考慮した実体系を模擬したモデルを構築し、実際に電流を流したときに働く電磁力を最適化する計算手法を開発していく。

(2011 年 11 月 1 日受付, 2012 年 1 月 16 日再受付)

参考文献

- [1] 村上, 小松, 飯尾, 嶋田, 電磁力平衡コイルを用いたトカマク装置とプラズマの挙動, プラズマ・核融合学会誌, Vol. 75, No. 3, pp. 268, 1999.
- [2] 筒井, 野村, 嶋田, Virial 定理の磁気閉じ込め核融合装置への応用, プラズマ・核融合学会誌, Vol. 77, No. 3, pp. 300, 2001.
- [3] S Nomura, R Shimada, C Suzuki, S Tsuji-Iio, H Tsutsui, N Watanabe, Variations of force-balanced coils for SMES, *IEEE Trans, Appl.Supercond*, Vol.12, No.1, p.792, 2002.
- [4] F Romeo, D I Hoult, Magnetic field profiling: Analysis and corresponding coil design, *Magnetic Resonance In Medicine*, Vol. 1, pp. 44, 1984.
- [5] A M Abduljalil, A H Aletras, P M L Robitaille, Torque free asymmetric gradient coils for echo planar imaging, *Magn.Reson.Med*, Vol. 31, pp. 450, 1994.
- [6] D C Alsop, T J Connick, Optimization of torque-balanced asymmetric head gradient coils, *Magn. Reson. Med*, Vol. 35, pp. 875, 1996.
- [7] P Mansfield, B L W Chapman, R Bowtell, P Glover, R Coxon, P R Harvey, Active acoustic screening: reduction of noise in gradient coils, by Lorentz force balancing. *Magn.Reson.Med*, Vol. 33, pp. 276, 1995.
- [8] T Takahashi, Shape Optimization Method for Coils Consisting of Free Curves, *IEEE Transactions On Magnetcs*, Vol. 29, No. 2, 1993.
- [9] Rostislav A Lemdiasov, Reinhold Ludwig, A stream function method for gradient coil design, *Magnetic Resonance Engineering*, 26B(1), pp. 67, 2005.
- [10] M Abe, T Nakayama, A new technique to optimize the coil winding path for the arbitrarily distributed magnetic field and application to a helical confinement system, *Phys.Plasmas*., Vol.10, No.4, pp. 1022, 2003.
- [11] 阿部, 磁場入力・コイル出力コード DUCAS の開発と適用, 第 17 回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 345-348, 2008.
- [12] Kameari, A, Transient eddy current analysis on thin conductors with arbitrary connections and shapes, *J.Comput.Phys*, Vol. 42, No. 124, 1981.
- [13] 坂和, 線形システムの最適化, 森北出版, 1984.