

〔連載〕熱流の不安定性と熱音響現象

熱流の不安定性と熱音響現象

第1回 —導入編—

*関西大学 システム理工学部 杉本 信正†

今回から3回にわたって「熱流の不安定性と熱音響現象」と題して解説を連載する。温度勾配のある固体壁に接した静止気体が不安定化し、最終的には気体全体が振動し始める不思議な現象がある。この熱音響現象を利用した新しい熱機関の開発が行われており、現在は実用化できるかを見極める重要な時期にある。第1回目はまず現象を紹介し、流体力学の研究者が馴染みやすい流れの安定性との類似から、現象を熱流の不安定性によるものと捉える。次回ではその線形安定性解析について述べ、3回目には非線形現象について紹介する。

Instability of heat flow and thermoacoustic phenomena

Part 1. Preliminaries

Nobumasa SUGIMOTO, Faculty of Engineering Science, Kansai University

1 はじめに

今回から3回にわたって「熱流の不安定性と熱音響現象」と題して解説を連載する。紹介する現象は、静止気体中を流れる熱流が、温度勾配下での粘性や熱伝導性による拡散効果によって不安定化し、これに伴い攪乱が音波として気体中に拡がり最終的には気体全体が自励振動する、まさに歴とした熱流体の現象である。しかしながら、熱音響の研究はこれまで主に低温物理学や音響学の分野で行われてきたため、流体力学の分野では世界的にもあまり知られていないのが実状である。

この現象を熱流の不安定性と見ることにより、流れのそれと類似して捉えると流体力学の研究者の見方も違ってくるであろうし、新たな解決法が見つかる可能性もある。さらには将来、予想もしなかった状況への適用も期待される。気体は元々流れておらず、粘性があるので力学的に安定な平衡状態にあるかと思われるが、熱的には非平衡な状態におかれている。これはベナール対流と似た状況である。しかし、浮力（重力）の作用がなくても発生するのと圧縮性が重要である点が異なっている。

そこで第1回目ではまず現象を説明し、次回では熱流の線形安定解析について述べ、3回目には非線形現象について紹介する。出現する非線形現象は、熱の流れと物

質の流れが振動を介して複雑に絡まり合うものであるが、一応「波」に関係するものと、「渦」に関係するものとに分けられる。熱音響現象が注目を集める理由は、現象自体不思議であるだけでなく、ここ二三十年にわたりその現象を利用した新奇な熱機関が考案されており、これが環境・エネルギー問題の一助になるのではという望みがあるからである。具体的には、まず熱機関の構造が簡単であり、特に摺動部がなく、化石燃料を使用しないで太陽熱・地熱や廃熱等が利用でき、また環境に負担をかけない空気やヘリウムなどの気体が使用でき、さらにはスターリングサイクルが構成されるので理論上はカルノー効率が達成できることが理由に挙げられる。

しかし、出力や効率はまだ低く、実用化には新しいブレイクスルーが必要な段階に現在きている。このためには非線形現象の解明が不可欠であり、特にCFDやPIVなどの流体力学的な見方や手法が大いに役立つと思われる。それにはまず何よりも現象を知って頂いて、正しく理解してもらうことが必要である。

熱音響現象についての成書はあまりなく、一つはスイフト (Swift) によるもの¹⁾と、もう一つは富永昭氏によるもの²⁾がある。いずれも低温物理・工学の研究者の手によるものであり、考え方において流体力学のそれとは異なるところがある。解説は数多くあり、紙面の都合上それらの引用は割愛させていただくが、本解説は拙著³⁻⁵⁾と重複する箇所があることをお断りしておきたい。

*〒564-8680 大阪府吹田市山手町 3-3-35

† E-mail: n_sugimoto@kansai-u.ac.jp

sugimoto@me.es.osaka-u.ac.jp

2 熱音響現象の例

熱音響とは、簡単に言えば、熱的な要因で発生する音やその伝播のことである。われわれが耳にする音は空気の膨張と圧縮からなる粗密波であり、空気の粒子は断熱的に変化している。これを熱力学の言葉で言えば、エントロピーの変化が無い、等エントロピー変化である。自由空間を伝播する音ではこの近似がよく成り立つ。断熱変化はラプラスによって指摘され、それまでのニュートンによる等温変化が訂正され、音速の実測値との違いが解消された⁶⁾。

以上の点において、一般の音響学はいわば断熱音響学であり、音速も正確に言えば断熱音速である。断熱変化を仮定すると圧力と密度（または温度）の変化は一つに決り、熱力学は表から隠れてしまう。この結果、音響学は熱力学とは切り離され無縁のように見られてきた。これに対し熱音響学は、音の発生や伝播においてエントロピーの変化が主な役割を演じる、熱力学が表舞台に現れる音響現象を扱うと言ってもよい。

熱音響現象の例を示すことから始める。これは二つのカテゴリに分けられる。最初のカテゴリに属するのは、燃焼などの発熱に伴う音の発生である。最も簡単な例は、ガスコンロやバーナーからの音である。開栓して着火すると音は明らかに違って聞こえる。発熱があると空気の温度が上昇し密度は大きく変化するが、圧力はさほど変化しないのがこの場合の大きな特徴である。自由空間では特別の周波数が励起しやすいということもなく、また燃焼は乱流状態で起きることから、発生する音は多くの周波数成分を含んでいる。

発熱が自由空間ではなく管の中で起きる場合を考える。この代表例はライケ (Rijke) 管⁷⁻⁹⁾ である。図1に示すように、両端が開いた管のある断面にわたり金網を置いて加熱し、管を鉛直に立てると音が聞こえるときがある。音が聞こえるのは金網を管の下半分に置いた場合である。この発振のメカニズムについては古くから多くの人を悩ませたようである。レイリーも名著 *Theory of Sound*¹⁰⁾ の中で、気体が不安定化するには、「気体が圧縮を受けるときに周囲から熱が与えられ、一方膨張を受けるときに熱が奪われると振動が増幅される」と文章で述べているだけであり、定量的な記述はない。

両端が開いた管の中の気柱には、両端で圧力の節、中央で腹、流速で言えば両端で腹、中央で節をもつ固有振動モードがある。管を鉛直に立てると、金網に接している温かい空気は上昇するので、管内には定常的な上昇気流が現れる。この流れの上に、上で述べた固有振動モードが加わる。振動は金網から空気への熱伝達に影響を与え熱流を変動させる。この熱流は金網を通過する流速に

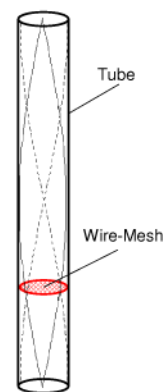


図1 ライケ管の図。実線および破線は最低次の超過圧と軸方向の流速の固有振動モードを表す。

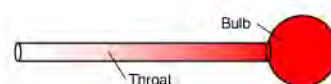


図2 ソンドハウス管の図

比例し、特に時間遅れを伴う。一般に熱流を考えるときには、速度との間に位相差が生じることに注意する必要がある。この位相差を考慮すると、金網が管の下半分に置かれた場合にのみレイリーの条件が満足される。ライケ管のメカニズムはこれで一応説明がつく。詳細は解説⁴⁾を参照されたい。ちなみに、金網を冷却する場合に不安定になるのは、網を上半分に置いたときである。このような管はボスカ (Bosscha) 管⁷⁾と呼ばれている。

もう一つのカテゴリに属するのが、この解説で紹介する熱音響現象である。これは温度勾配のある壁面に接した気体の粘性や熱伝導性の拡散効果によって引き起こされる不安定現象である。この例として古くから知られているものに、ソンドハウス (Sondhauss) 管^{11,12)}がある。これは図2に示すようなフラスコ型の容器であり、いまではヘルムホルツ共鳴器として知られている。球根部を加熱するとスロート部に沿って温度勾配が現れ、その値がある値を超えるとスロート内の気体が不安定化して音が聞こえるものである。この現象は古くから欧州のガラス吹き職人の間で知られており、これを詳しく調べたのがソンドハウスである。

もう一つの例は、いまから60年ほど前に発見されたタコニス (Taconis) 振動¹³⁾である。これが最近の熱音響の研究の原点でもある。図3に示すような液体ヘリウムを入れたデューワーに、一端が開いた長い管を挿入し開口部を液面に近づけると、管の中を充たしている気体のヘリウムが激しく振動し始める。これがタコニス振動である。管のもう一端は室温に保たれているので、管に沿って急激な温度勾配が発生する。極低温やヘリウ

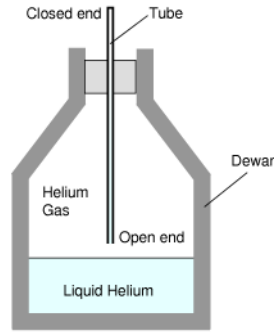


図3 液体ヘリウムを入れたデューワー内のタコニス振動。

ムガスは現象にとって本質的ではない。

出現する振動をエネルギー的に見ると、気体の運動エネルギーやポテンシャルエネルギーは、周囲に蓄えられていた熱から供給されている。熱エネルギーから振動の力学的エネルギーへの変換の作用は、まさにプライムムーバ（原動機）に他ならない。一方、温度勾配のない管の中の気体を外部から強制的に振動させると、熱が移動することがメルクリ (Merkli) とトマン (Thomann)¹⁴⁾によって示された。この作用はヒートポンプに他ならない。このような見方から、熱音響現象を利用した熱機関のアイデアがセパレー (Ceperley)^{15,16)} やホイートレイ (Wheatley)¹⁷⁾ らによって提案され、実際にエンジンや冷凍機が70年代以降に製作された¹⁸⁻²⁰⁾。

3 熱音響式熱機関の例

これまで様々な創意工夫がなされた熱機関が考案されてきた。本解説はそれを説明することが目的ではないので、基本的なものについてのみ紹介し、詳細は文献²⁾を参照されたい。一つは定在波を利用するものと、もう一つは進行波を利用するものがある。歴史的には前者のほうが早くから研究されてきたが、効率では後者に劣る。

定在波はソンドハウス管や一端が開放した管、また両端が閉じた直管でも発生するが、管の温度を室温から少し上げたり下げたりしたくらいでは簡単には発振しない。タコニス振動では室温と極低温との温度比は実に数十倍もある。不安定化を促進するために、薄くて短い平板をある間隔で積み重ねたものや、細い管を多く束ねたもの、さらには蓮根のように軸方向に貫通した小さな多くの孔があいたセラミックを管の中に挿入することが考案された。こうしたものは一般にスタックと呼ばれている。粘性や熱伝導性が支配的な壁面に接した拡散層は大変薄く、その厚さは室温の空気（大気）の100 Hzの振動においては0.1mm～0.2mm程度しかない。スタックの挿入は、流路幅に対して拡散層の厚さを相対的

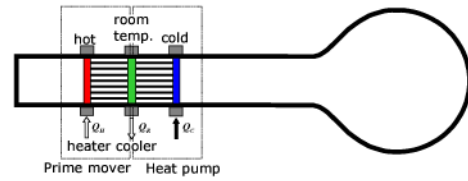


図4 定在波を利用した熱機関の例。プライムムーバでヒートポンプを駆動する。横縞部がスタックであり、その左右と間に挟まれた部分が熱交換器である。

に厚くする効果がある。スタックを用いると室温の2、3倍の温度比でも十分発振する。

定在波を利用した熱機関で有名なものは、ビアクーラーと呼ばれる図4に示すものである¹⁸⁾。一端が閉じた管の他端に空洞を取り付け、管の内部に二つのスタックを配置する。その外側と間に熱交換器を配置し、中間の熱交換器を室温の熱源に接続する。スタックや熱交換器の配置によって流路の断面積は小さくなるが、気体は自由に移動できる。左の熱交換器を高温の熱源に接続し熱流 Q_H を供給し、真ん中の熱交換器からは熱流 Q_R を取り出しスタックに温度勾配を与える。一方、右のスタックには温度勾配を与えない。左のスタックの温度勾配がある閾値を越えると、気体が不安定化し振動が発生する。右のスタック流路内の気体が振動すると、熱流がスタックの中を右から左に定常的に流れることにより、右の熱交換器から熱流 Q_C が汲み上げられる。

装置はスロート長さが37cmであり、気体には3気圧に加圧したヘリウムが用いられた。高温部の温度を400°Cに保つと周波数が580Hz、最大圧力振幅が0.2気圧の振動が発生し、このとき低温部は-10°Cにまで温度が下がったと報告されている。図2のヘルムホルツ共鳴器型ではなく、直管を用いた熱機関もある。管の中にはプライムムーバ用のスタックだけを配置し、ヒートポンプの代わりに固定端に細いバルブを通して音響負荷を駆動させる例もある²¹⁾。

これに対し、ループ管路内に二つのスタックを配置し進行波を用いた熱機関を図5に示す。図中の左下のスタックの両端には、高温と室温の熱交換器を配置することによって温度勾配を与える。勾配がある値を超えると気体が振動し始める。右上のスタックの右側の熱交換器を室温に保つと、スタック内の気体の振動により左の熱交換器を通して熱流 Q_C が汲み上げられる。一つの管の中でヒートポンプがプライムムーバによって駆動される。

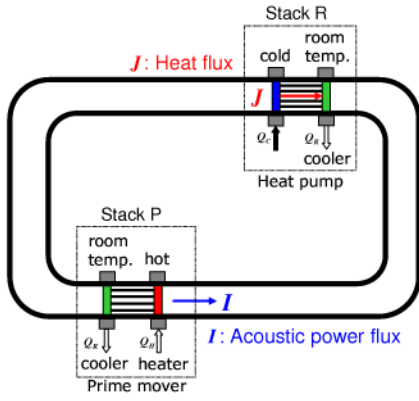


図5 ループ管内の進行波を利用した熱機関の例. 左下のスタックでプライムムーバ作用を発生させ、右上のスタックでヒートポンプ作用を発生させる熱機関。

矢崎らのグループ^{22,23)}が図5の装置で発振に成功した直後に、バックハウス (Backhaus) とスウィフト (Swift)^{24,25)} は、図6に示すようなループ管路に共鳴管を枝管として取り付けた装置を用いて熱音響式スターリングエンジンを実現した。図6は彼らが用いた装置そのものではない。目の細かい金網を幾重にも密着させたスタックをループ管路の中に配置し、その上下を室温と高温の熱交換器によって挟み込んで温度勾配を課す。図中の音響負荷というのはスピーカーを逆に作動させる発電機である。バックハウスとスウィフト²⁵⁾はこのような装置で、710 W の出力を 30% の効率 (カルノー効率の 41%) で達成できたと報告している。

図5のループ管路では、発生する振動はループ長を1波長 (ないし2波長) とするので、周波数は音速をループ全長 (もしくはその半分の長さ) で割った値に近い。これに対し図6のように共鳴管を取り付けると、周波数は枝管の長さを1/4波長にするような周波数に近くなり大いに低下する。このため粘性や熱伝導性による拡散層の厚さが大きくなる。スタックはこのとき、いわゆる再生器 (Regenerator) の働きをする。

再生器というのは、寒い日のマスクのように、冷たい空気を吸い込むときには空気に熱を与え暖め、温かい空気を吐き出すときにはその熱を一時蓄えておく役目をするものである。スタックとは本来「積み重ねた」という意味であるので、金網を積み重ねてもスタックと呼んでもいいようであるが、拡散層が網の目に比べて大きい場合には再生器と呼ぶようである。

以上、熱音響現象を用いた熱機関を簡単に紹介した。図5、図6の進行波型の熱機関が今日盛んに研究されている。定在波、進行波いずれの場合も気体は最初は静

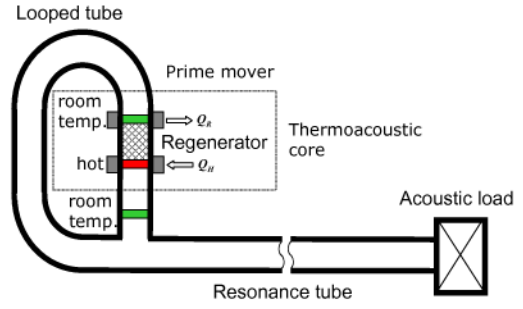


図6 ループ管内に共鳴管を取り付けた熱機関の例. ループ管内でプライムムーバ作用を発生させ、共鳴管の端で音響負荷を駆動する熱機関。

止しており、力学的には平衡状態にある。しかし、温度勾配を課した箇所では、高温側から低温側に向かって熱流が定常的に固体中のみならず気体中をも流れている。このような状況において熱流や気体は様々な攪乱に絶えず晒されており、ある状況ではそれが不安定化する。そこで温度勾配を受ける静止気体がなぜ不安定化するかに話を移す。

4 基礎的事項のまとめ

4.1 基礎方程式

その前に今後の議論に必要な流体力学の基礎方程式をここで纏めておく。熱音響現象は、ニュートン流体でフーリエの熱伝導則が成り立つ理想気体で十分説明できる。重力を無視して、基礎方程式には連続の式、ナビエ・ストークス方程式およびエネルギー式を用いる。これらは以下のように書き下せる：

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[2\mu \left(\mathbf{e} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \nabla (\mu_v \nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (4.2)$$

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + q_s. \quad (4.3)$$

ここで、 t を時間として、 D/Dt はラグランジュ微分 $\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ を表し、 $\rho, \mathbf{v}, p, T, S, \mathbf{e}, \Phi (= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}))$, q_s はそれぞれ、気体の密度、速度ベクトル、圧力、温度、単位質量当たりのエントロピー、ひずみ速度テンソル、粘性散逸関数、単位時間・単位体積当たりの発熱量または吸熱量であり、 $\mathbf{I}$ は単位テンソル、 $\boldsymbol{\sigma}$ は粘性応力テンソルである。係数 μ, μ_v, k はそれぞれ、せん断粘性率、体積粘性率、熱伝導率であり一般には温度に依存す

る．この依存性を，以下では次のべき則で取り入れる：

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\beta, \quad \frac{k}{k_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\beta. \quad (4.4)$$

以後，添え字 0 を付けた量はある基準状態での値を表し， β は定数である．空気ではその値は 0.5 から 0.7 の間にある．一般に μ_v のデータは多くはないが， μ と同じように振る舞うと仮定する．

一方，理想気体の状態方程式は次のように与えられる：

$$p = \mathcal{R}\rho T. \quad (4.5)$$

ここで， $\mathcal{R}$ は気体定数である．圧力を密度とエントロピーで表現すると

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \exp\left(\frac{S - S_0}{c_v}\right) \quad (4.6)$$

となる．ここで， c_v, c_p はそれぞれ定積比熱，定圧比熱であり， $\mathcal{R} = c_p - c_v$ の関係が成り立つ．また γ は比熱比 c_p/c_v である．

熱音響現象の解析にはエネルギー式が重要である．式 (4.3) は断熱変化を仮定するときには使い易いけれども，温度で表現するのが便利な場合がある．熱力学の関係より， $TDS/Dt = c_p DT/Dt - \rho^{-1} Dp/Dt$ を用いると，以下のように表せる：

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + q_s. \quad (4.7)$$

微分形のエネルギー式 (4.3) または (4.7) が導かれる元のエネルギー保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + e \right) \right] + \nabla \cdot (\rho H \mathbf{v} - k \nabla T - \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}) = q_s \quad (4.8)$$

である．ここで， $e (= c_v T)$ ， $h (= c_p T = e + p/\rho)$ ， $H (= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2 + h)$ はそれぞれ，単位質量当たりの内部エネルギー，同エンタルピーおよび全エンタルピーである．式 (4.8) の $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2 + e)$ がエネルギー密度であり， $\rho H \mathbf{v} - k \nabla T - \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}$ はエネルギー流束（密度）ベクトルである．なお，括弧内の密度は省かれる場合が多い．

4.2 自由空間内での音の伝播

まず静止気体中の微小攪乱の伝播について考える．重力を無視すると，攪乱が無ければ圧力は至る所で一定値 p_0 をとる．定常的な熱源 q_s があれば，温度場は (4.8) より $-\nabla \cdot (k \nabla T) = q_s$ から求まる．このような静止状態での温度場を T_e で表すことにすると，対応する密度場 ρ_e は (4.5) より $p_0 = \mathcal{R}\rho_e T_e$ を満たす．また，エントロピー場は (4.6) より $(\rho_e/\rho_0)^\gamma \exp[(S_e - S_0)/c_v] = 1$ を満たす．これらの関係を用いると，状態方程式 (4.5)，(4.6) は

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_e} \frac{T}{T_e} = \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^\gamma \exp\left(\frac{S - S_e}{c_v}\right) \quad (4.9)$$

とも表すことができる．

まず粘性と熱伝導性の効果が小さく無視できる場合を考える．連続の式 (4.1) の第一項は，

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial p} \bigg|_S \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial \rho}{\partial S} \bigg|_p \frac{DS}{Dt} \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{\rho}{c_p} \frac{DS}{Dt} \end{aligned} \quad (4.10)$$

と書き直せる．ここで， $a (= \sqrt{\partial p / \partial \rho|_S} = \sqrt{\gamma p / \rho})$ は局所断熱音速である．この関係式とエネルギー式 (4.3) を用い，右辺の最初の二つの項を無視すると，連続の式は

$$\frac{1}{\rho a^2} \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{q_s}{\rho c_p T} \quad (4.11)$$

とかける．この式から発熱や吸熱は質量の湧き出しや吸い込みと同じ効果を与えることが分かる．

攪乱をプライムを付けて以後表すことにし，式 (4.11) を線形化すると

$$\frac{1}{\rho_e a_e^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}' = \frac{q'_s}{\rho_e c_p T_e} \quad (4.12)$$

となる．ここで， $a_e (= \sqrt{\gamma p_0 / \rho_e})$ は局所線形断熱音速である．一方，運動方程式 (4.2) を線形化すると，

$$\rho_e \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla p' \quad (4.13)$$

となる．これらの式から速度を消去すると，超過圧 p' ($= p - p_0$) は次の式に支配される：

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla \cdot (a_e^2 \nabla p') = \frac{a_e^2}{c_p T_e} \frac{\partial q'_s}{\partial t}. \quad (4.14)$$

次に音のエネルギーを支配する方程式を導く．式 (4.12) に p' を掛けた式と，式 (4.13) と $\mathbf{v}'$ との内積をとった式を加え合わせると，

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{I} = \frac{p' q'_s}{\rho_e c_p T_e} \quad (4.15)$$

となる．ここで， E は $\rho_e \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' / 2 + p'^2 / 2\rho_e a_e^2$ ， $\mathbf{I}$ は $p' \mathbf{v}'$ であり，それぞれ音響エネルギー密度，音響エネルギー流束（密度）ベクトルまたは音の強度とも呼ばれる．

熱源から周期的に音が放射されているとして，熱源を囲む空間 V にわたって式 (4.15) を体積積分し，時間平均をとると，

$$\int_A \bar{\mathbf{I}} d\mathbf{A} = \int_V \frac{\widetilde{p' q'_s}}{\rho_e c_p T_e} dV \quad (4.16)$$

となる．ここで， A は考えている領域の表面であり， $d\mathbf{A}$ は面積要素ベクトルを示し，波線は時間平均を表す．これから音が外部に放射されるには，左辺の積分値が正でなければならない．この条件は，超過圧力変動 p' と発

熱（吸熱）量の変動 q'_s との間の位相関係が重要であることを示唆している。放射が継続するには、超過圧が正のときに発熱 ($q'_s > 0$) し、負のときに吸熱 ($q'_s < 0$) することが必要である。これがレイリーが定性的に述べた不安定化の条件である。

4.3 壁によって囲まれた空間内での音の伝播

次に固体壁の影響について考える。これが本解説で紹介する場合である。平行な平面壁に挟まれたチャンネル内の気体の2次元運動や、円管内の気体の軸対称な運動を考える。この流路に沿って温度勾配があるとし、その方向に x 軸を、これに垂直に y, z 軸または半径座標 r をとる。気体中に熱源がないとして $q_s = 0$ とすると、静止している気体の温度 T_e は $\nabla \cdot (k \nabla T_e) = 0$ を満たさなければならない。熱伝導率の温度依存性を無視すると、これはラプラス方程式に帰着する。

壁面温度を $T_w(x)$ として、流路方向の温度勾配の代表長さを l とする。通常この長さは流路幅に比べて十分長いので、気体温度の流路方向の勾配も断面内の勾配に比べて十分小さい。簡単のため熱伝導率の温度依存性を無視すると、気体温度 T_e は、ラプラス方程式を壁面上で $T_e = T_w$ として漸近的に解くことにより、 $T_e = T_w + (d^2 T_w / dx^2)(H^2 - y^2)/2 + \dots$ と求まる。ただし、 H はチャンネルの半幅であり、半径 R の円管の場合には $(H^2 - y^2)/2$ を $(R^2 - r^2)/4$ で置き換える。

これより、気体の温度と壁面温度とは2次関数分だけ異なり、その差は T_w の2階微分に比例している。この差を無視すれば、気体温度は壁面温度に等しいと見なしでもよい。以上の近似を不等式で書けば

$$\frac{H^2}{T_w} \left| \frac{d^2 T_w}{dx^2} \right| \ll \frac{H}{T_w} \left| \frac{dT_w}{dx} \right| \ll 1 \quad (4.17)$$

となる。円管の場合には H を R で置き換える。以下で述べる理論は温度の x 依存性に加え、その勾配である1階微分の影響までを考慮するが、2階微分以上や1階微分の積は無視する近似を用いる。この近似の下では、壁面温度と静止状態での気体の温度との区別は不要になる。このとき軸方向には定常的に熱流 $-k dT_w/dx$ が流れるが、断面内の熱流は無視される。

固体の温度はその熱容量が大きく気体の温度変化の影響を受けないとよく仮定するが、壁の厚さが薄くなり熱容量が小さくなる場合には考慮せざるを得ない。固体温度 T_s の x 方向の変化も緩やかであると仮定すると、熱伝導方程式は

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla_{\perp} \cdot (k_s \nabla_{\perp} T_s) \quad (4.18)$$

となる。ここで、 $\nabla_{\perp}$ は断面内の勾配であり、 ρ_s, c_s, k_s はそれぞれ、固体の密度、定圧比熱、固体の熱伝導率で

ある。これより、固体内でも定常的に熱流 $-k_s \nabla T_s$ が流れている。気体中では断面内の熱流成分を無視することから、固体内の熱流の壁面での法線成分は熱流の連続性よりゼロである。固体と気体の温度の連成を考慮すると解析が面倒になる。

そこで簡単のため、固体温度の変化を無視して、気体中の攪乱の振る舞いを考える。自由空間の場合と違って、壁面があるために粘性や熱伝導性の影響を無視するわけにはいかない。波長が流路幅に比べて十分長い場合には、超過圧は断面内で一様と見なしてよい。このことや、以下の式の導出については次回に述べることにして結果だけ記すと、超過圧の振る舞いは一般に次の波動方程式によって記述される：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \\ = \frac{a_e^2}{c_p T_e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q}{2H} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{s}{2H} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

ここで、右辺の s, q はそれぞれ、両壁面で気体に作用するせん断応力と気体に流入する熱流束密度である。なお、円管の場合には右辺の $1/2H$ を $2/R$ に置き換える。自由空間の場合の方程式 (4.14) と比べると、(4.19) では空間的变化は x 方向だけに限られる一方、壁面からの熱流束がわき出しとして現れ、壁面でのせん断応力が2重極として現れる。熱流束やせん断応力はこの場合外部から与えられるものではなく、超過圧によって表すことができる。

次に音のエネルギーの式を示す。この詳細も次回に述べるとして、断面平均量に対してこれは以下のように与えられる：

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{I}}{\partial x} = \frac{1}{2H} \left(\bar{u}' s + \frac{p' q}{\rho_e c_p T_e} \right). \quad (4.20)$$

ここで、 $\bar{E}$ と $\bar{I}$ は断面平均したエネルギー密度とエネルギー流束密度ベクトルの x 成分であるが、 $\bar{E}$ 中の運動エネルギーは $\rho_e \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' / 2$ の平均ではなく、速度の x 方向成分の断面平均値 $\bar{u}'$ による $\rho_e \bar{u}'^2 / 2$ である。

この関係式から、周期的な変動に対するエネルギー流束密度の時間平均値の空間変化は

$$\frac{d \bar{I}}{dx} = \frac{1}{2H} \left(\bar{u}' s + \frac{p' q}{\rho_e c_p T_e} \right) \quad (4.21)$$

となる。波が x 軸の正の向きに伝播するとしよう。その向きにエネルギー流束が増加するには右辺が正である必要があるが、第1項の平均流速とせん断応力の積は物理的に負であると考えられるので、第2項の超過圧と熱流との積の平均が正でなければならない。この式はレイリーの条件 (4.16) とよく似ているが、この q は壁面を通過する熱流束密度である。その次元は $[J/m^2 s]$

または $[\text{W}/\text{m}^2]$ であり、熱源 q_s の次元 $[\text{J}/\text{m}^3 \text{ s}]$ とは異なる。なお、図4から図6で用いた大文字 Q は熱交換器に流入（流出）する全熱流束であり、次元は $[\text{J}/\text{s}]$ または $[\text{W}]$ である。ちなみに、 $q/\rho_e c_p T_e$ の次元は速度に等しく、 p' との積はエネルギー流束密度を表している。

5 不安定化のメカニズムの熱力学的な説明

不安定化のメカニズムを説明する。用いるのはラグランジュ的な説明であり、気体粒子に着目しそれがうける熱力学的なサイクルをレイリーの不安定化の条件に照らして議論するものである。

5.1 定在波の場合

定在波について最初に纏めておく。壁面でのせん断応力や熱流を無視し平面波の断熱音波を考えると、超過圧 $p'(x, t)$ は (4.19) より $\partial^2 p'/\partial t^2 - (\partial/\partial x)(a_e^2 \partial p'/\partial x) = 0$ を満足する。圧力が決まれば x 軸方向の速度 $u'(x, t)$ は、運動方程式 $\rho_e \partial u'/\partial t = -\partial p'/\partial x$ より求まる。

さて角周波数 ω で調和振動する定在波を考える。静止気体の温度 $T_e(x)$ を与えると、 a_e および ρ_e は T_e によって決定される。非一様な温度分布に対して上の波動方程式の解を一般的に求めるのは難しい。しかし、温度が x の放物型分布 $T_e(x)/T_0 = (1 + \lambda x/L)^2$ (ただし、 λ は定数、 L/λ は温度勾配の代表長さ、 $T_0 = T_e(0)$) の場合には、定在波として $p'/\rho_0 a_0 = P(x) \sin(\omega t)$ を仮定すると、 P は $\eta^{-1/2} \sin(\psi \log \eta)$ または $\eta^{-1/2} \cos(\psi \log \eta)$ と解析的に求まる。ここで、 $\psi = [(\omega L/\lambda a_0)^2 - 1/4]^{1/2}$ 、 $\eta = 1 + \lambda x/L$ である。

定在波はこの二つの素解の線形結合で一般に表現できる。簡単のため、一端が開いた長さ L のいわゆる $1/4$ 波長管を考える。開口端補正を無視して、開口端 $x = 0$ で超過圧をゼロ、一方、閉端 $x = L$ で流速をゼロとする解を求める。境界条件は前者の素解だけで満たされ、固有角周波数 $\omega_n = \{\lambda^2/4 + [\lambda z_n/\log(1 + \lambda)]^2\}^{1/2} a_0/L$ (ただし、 n は $1, 2, 3, \dots$ の正の整数であり、 $z_n(\lambda)$ は $\tan z_n = 2z_n/\log(1 + \lambda)$ を満たす解で、 $0 < z_1 < z_2 < z_3, \dots$ とする) をもつ、次の解が得られる。

$$\frac{p'}{\rho_0 a_0} = \mathcal{A} \omega \eta^{-1/2} \sin(\psi \log \eta) \sin(\omega t), \quad (5.1)$$

$$u' = \mathcal{A} \omega \eta^{1/2} \cos(\psi \log \eta + \theta) \cos(\omega t). \quad (5.2)$$

ここで、 $\mathcal{A} (> 0)$ は任意定数であり、位相 θ は $\tan \theta = 1/2\psi$ を満たす。温度の攪乱 T' は断熱関係より $T'/T_e = [(\gamma - 1)/\gamma] p'/p_0$ で与えられる。気体粒子に着目して考えるために、変位 $\xi(x, t)$ を $\partial \xi'/\partial t = u'$ より導入すると、 ξ は

$$\xi' = \mathcal{A} \eta^{1/2} \cos(\psi \log \eta + \theta) \sin(\omega t) \quad (5.3)$$

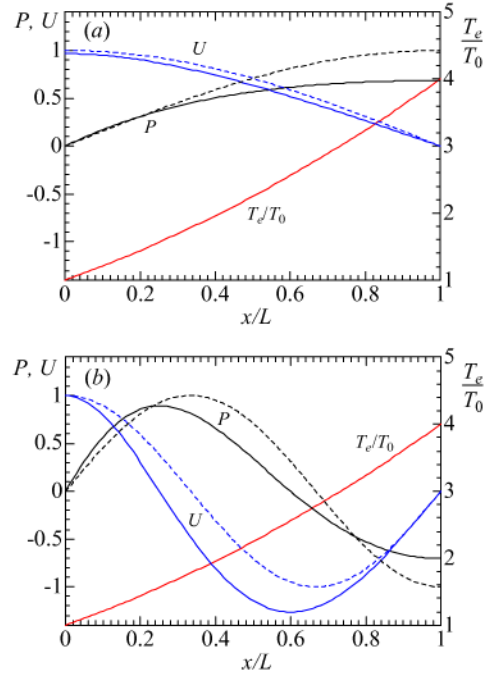


図7 一端が開いた管 ($1/4$ 波長管) に沿って放物型温度分布 $T_e/T_0 = (1 + x/L)^2$ を課した場合の定在波の圧力振幅 P および流速振幅 U の波形: (a) は $n = 1$ の最低次モード, (b) は $n = 2$ の2次モードで、破線は温度勾配が無い場合のそれぞれの分布を示す。

となる。これらの式において $\lambda \rightarrow 0$ の極限をとると、 $\eta \rightarrow 1$ 、 $\psi \log \eta \rightarrow \omega x/a_0$ 、 $\theta \rightarrow 0$ 、 $\omega_n L/a_0 \rightarrow (2n - 1)\pi/2$ となり、(5.1)-(5.3) は温度勾配がない場合の定在波の解に帰着する。

図7に (5.1), (5.2) から求まる圧力振幅 P (ただし、 P は、 p' を $\rho_0 a_0$ で割っているの、速度の次元をもつ) と、流速を $u' = U(x) \cos(\omega t)$ とおいたときの流速振幅 U の空間分布を、両端の温度比 $T_e(L)/T_0 = 4$ に対して $n = 1$ と $n = 2$ の場合についてそれぞれ (a), (b) に実線で示す。ここで、 $\mathcal{A} \omega = 1$ とおいた。破線は温度勾配が無い場合である。圧力 P と流速 U の空間的な変動の位相差が $\pi/2$ からさらに θ だけ異なり、また $\eta^{\pm 1/2}$ の係数により、温度が高い所で圧力振幅は小さくなる一方、速度や変位振幅は大きくなる。これは音響インピーダンス $\rho_e a_e$ が温度が高くなると $T_e^{-1/2}$ で小さくなるからである。

参考までに、 $n = 1$ の場合 $z_1 \approx 1.313$ 、 $\omega_1 L/a_0 \approx 1.959 > \pi/2$ であり、 $n = 2$ では $z_2 \approx 4.638$ 、 $\omega_2 L/a_0 \approx 6.710 > 3\pi/2$ である。温度が高くなると音速が早くなるので固有周波数も高くなる。また、基本固有周波数に対する2次の周波数の比 ω_2/ω_1 が約3.4と整数比3からずれる。高次の固有周波数も $2n - 1$ 倍からずれるが、 n が大き

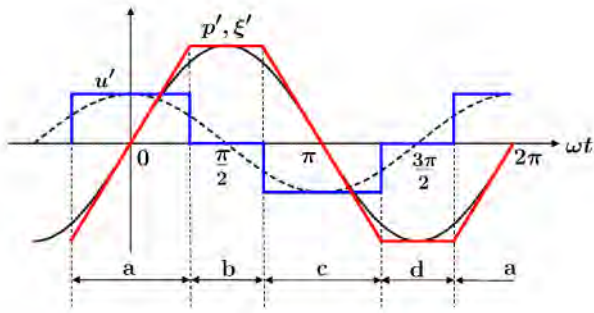


図8 定在波における超過圧 p' 、流速 u' および変位 ξ' のある位置での一周期にわたる時間的変化。ただし、縦軸のスケールには意味が無く、超過圧と変位を同じ実線で、流速を破線で示す。

くなるとその差は次第に小さくなる。各固有周波数が基本固有周波数の整数比である場合を、協和音 (consonant) と呼び、そうでない場合を不協和音 (dissonant) と呼ぶ。1/4 波長管は基本固有周波数の奇数倍の固有周波数をもつ協和音管であるが、温度勾配を与えると不協和音管になる。固有周波数間の関係は、有限振幅の振動における衝撃波の発生に関係する²⁶⁾。

上で示した例を念頭におきつつ、次に定在波に対するせん断応力や熱流による拡散効果について考える。図8は超過圧、速度および変位の1周期にわたる時間変化を示す。これは、1/4 波長管では $\sin(\psi \log \eta)$ および $\cos(\psi \log \eta + \theta)$ が正の値をとる位置での波形である。図は各量の変化の位相関係を示すだけのものであり、縦軸のスケールには意味はない。圧力と変位を同じ実線で示し流速を破線で示す。圧力と変位は時間的に同じ位相にあり、速度と比べると $\pi/2$ 遅れていることに注意する。

説明を簡単にするために、図8の1周期にわたる滑らかな時間変化を折れ線で置き換え、変化を図中の4つの区間 a, b, c, d に分けて考える。圧力と変位を赤の折れ線で近似し、速度を青の折れ線で近似する。区間 a では速度は x の正の向きに一定であり、圧力は直線的に増加する。速度が正で一定であることから、気体粒子に着目すれば変位は時間とともに増加する。区間 b では速度はゼロであるので、粒子は x の正の向きに最大変位した位置に留まり、圧力は最大値を暫く保つ。区間 c では速度は x の負の向きに一定であり、圧力は直線的に減少する。速度が負で一定であることから、変位は時間とともに増加する。区間 d では速度はゼロであるので、粒子は x の負の向きに最大変位した位置に留まり、圧力は最小値を暫く保つ。

上の結果は、あくまでも定在波のある位置での流速と圧力の時間変化を4つの区間に分けてモデル化し、同時に気体粒子の位置も考えたものである。これまでの結果

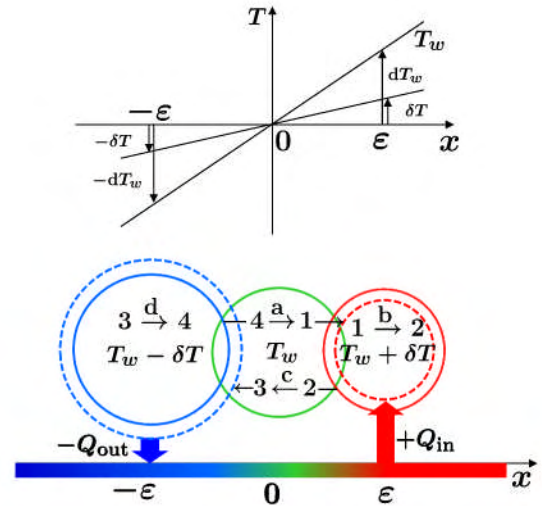


図9 上図：定在波による気体粒子の温度と壁面温度との関係 ($\delta T < dT_w$ の場合)。下図：図8の定在波により気体粒子がうける代表的な4つの過程 a, b, c, d を矢印で示し、その向きに時間が経過する。また、1, 2, 3, 4 は図10で示す状態に対応する。

は全てオイラー表示であるが、微小変位を考えるとラグランジュ表示としても使える^{注1)}。

ここから気体粒子に着目したラグランジュ的な見方に移り、温度勾配のある壁面に接触している場合を考える。図9に示すように、温度が上昇する向きに x 軸をとり、壁面温度を $T_w(x)$ とする。座標 x は1/4 波長管で採用したものとは関係はない。ある瞬間 $t = 0$ に $x = 0$ の位置にあった小さな体積の気体粒子が x 方向に速度の攪乱を受け、角周波数 ω で振動するものとする。

図8の4つの区間は気体粒子が受ける過程と解釈しなおすことができる。各過程における気体粒子の位置と状態を図9に示す。真ん中の丸が初期の流体粒子を表す。矢印は時間が経過する向きを示す。過程 a では粒子は一定の速度で x の正の向きに運動し、変位と圧力は直線的に増加する。過程 b では粒子は x の正の向きに最も変位した位置 $x = \epsilon$ に暫く留まるので、速度はゼロである。圧力は最大値を保ち、粒子は最も収縮した状態にある。過程 c では粒子は一定の速度で x の負の向きに運動し、変位と圧力は直線的に減少する。過程 d では粒子は x の負の向きに最も変位した位置 $x = -\epsilon$ に暫く留まり、速度はゼロである。圧力は最小値を保ち、

注1) 気体粒子を示すラベルを X とし、時刻 t におけるその位置を $x(X, t)$ とする。変位 $x - X$ をオイラー表示では $\xi(x, t)$ と表す一方、ラグランジュ表示では $\Xi(X, t)$ と表す。速度 $\partial x / \partial t|_X$ もそれぞれ両表示では $u(x, t)$, $U(X, t)$ と表され、 $u(x, t) = u[X + \Xi(X, t), t] \equiv U(X, t)$ と両者は変位を介して繋がっている。しかし微小変位では $x \approx X$ であり、変位で展開すると $u(X, t) \approx U(X, t)$ である。

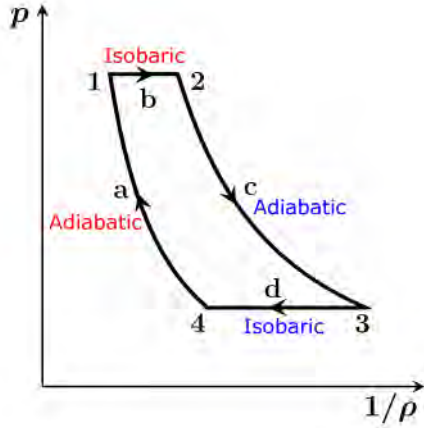


図 10 図 9 で示した過程における気体粒子の圧力 p と比体積 $1/\rho$ の間の関係

粒子は最も膨張した状態にある。

説明をさらに簡単にするために、熱流の影響だけ考慮し粘性を無視する。これは、気体の粘性拡散と熱拡散のうち後者が大きい、言い換えればプラントル数 $Pr (= \nu/\kappa)$ が 1 より十分小さな気体を想定することである。ここで、 ν は動粘性率 μ/ρ であり、 κ は温度拡散率 $k/\rho c_p$ である。空気のプラントル数は約 0.7 であるのでこの場合に該当しない。しかし、希ガスの混合ガスでは、プラントル数が十分小さい場合がある²⁷⁾。

過程 a と過程 c では、粒子は壁と熱交換する時間的な余裕がなく、断熱的に変化するものとする。これは振動の周期が熱拡散時間に比べて短い場合である。後者はチャンネル幅と温度拡散率 κ によって H^2/κ と見積もられるので、想定しているのは次の不等式

$$\frac{2\pi}{\omega} \ll \frac{H^2}{\kappa} \quad (5.4)$$

が成り立つ場合である。言い換えれば、熱拡散が及ぶ距離 $\sqrt{\kappa/\omega}$ が H より小さい場合であり、 $\sqrt{2\pi}$ をオーダー 1 とみると

$$\frac{\sqrt{\kappa/\omega}}{H} \ll 1 \quad (5.5)$$

となる。左辺の自乗の逆数 $H^2\omega/\kappa$ は、代表長さに流路幅をとり、代表速度を $H\omega$ にとったレイノルズ数 $H^2\omega/\nu$ に、プラントル数を掛けた量であり、ペクレ (Péclet) 数である。プラントル数が 1 程度の場合には、これは実質的にはレイノルズ数であり、条件 (5.5) はレイノルズ数が 1 より十分大きい場合に相当する。

熱音響の分野ではレイノルズ数による見方よりも、周期と熱拡散の時間の比を表す $\omega\tau$ と呼ばれる量がよく用いられる。ここで、 τ とは上で見積もった熱拡散時間の半分の時間 $H^2/2\kappa$ である。この $\omega\tau$ が大きい場合は、気体と壁との間の熱的な接触が不完全な場合である。

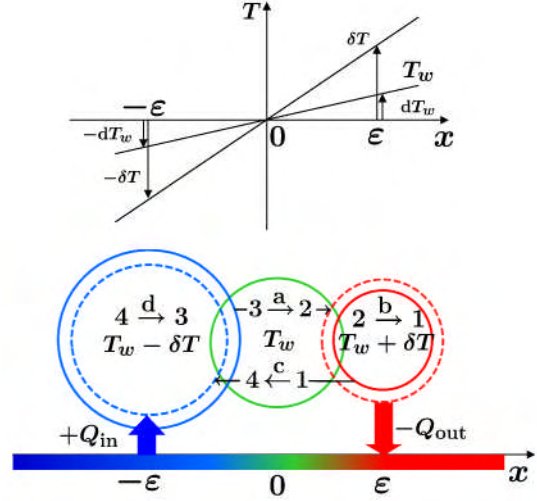


図 11 上図：定在波による気体粒子の温度と壁面温度との関係 ($\delta T > dT_w$ の場合)。下図：図 8 の定在波により気体粒子がうける代表的な 4 つの過程 a, b, c, d を矢印で示し、その向きに時間が経過する。ただし、1, 2, 3, 4 は図 10 で示す状態に対応するが、過程 a と過程 c が入れ替わり、変化の向きは全て逆になる。

気体粒子の断熱変化により、 $x = \epsilon$ での温度が $\delta T (> 0)$ 上昇して、 $T_w(0) + \delta T$ ($0 < \delta T \ll T_w$) となり、 $x = -\epsilon$ での温度が $-\delta T$ 下降して $T_w(0) - \delta T$ となる。位置 $x = \epsilon$ での気体の温度は、時間が $t = 0$ から周期の 1/4、すなわち $\pi/2\omega$ 経過していることから、 $T = T_e(\epsilon) + T'(\epsilon, \pi/2\omega)$ である。ここで、 $T'(x, t)$ は温度攪乱である。これより δT は $T_e(\epsilon) + T'(\epsilon, \pi/2\omega) - T_e(0) - T'(0, 0)$ であるが、微小変位では $T'(\epsilon, \pi/2\omega)$ は $T'(0, \pi/2\omega)$ で近似できる。

一方、壁面温度 $T_w(x)$ は、 $x = 0$ の回りに展開した $T_w(0) + dT_w/dx|_{x=0}x$ によって直線的に変化しているものとみなし、最大変位した位置での温度を $T_w(0) \pm dT_w$ とする。ただし、 $dT_w = dT_w/dx|_{x=0}\epsilon$ である。この壁面温度と粒子温度との差において三つの場合が考えられる。図 9 に示すように、 $x = \epsilon$ での壁面温度の方が粒子より温度が高い場合には、壁から粒子に熱流 Q_{in} が流入し、 $x = -\epsilon$ では壁面温度のほうが低いので Q_{out} の熱流が流出する。

この熱流により気体粒子がうける状態変化を、図 10 に圧力 p と比体積 $1/\rho$ の関係において示す。過程 b では圧力が最大であるときに熱流が流入し、一方過程 d では、圧力が最小であるときに熱流が流出する。壁面から流入（流出）する熱量の総和を、式 (4.12) の右辺の熱源と見なすと、第 1 項目の圧力変化は極値のためゼロであるので、それは左辺第 2 項の体積変化 $\nabla \cdot \mathbf{v}'$ を引き起こす。過程 b では粒子は膨張し状態が 1 から 2 に僅かに変化し、過程 d では粒子は収縮し状態が 3 から 4 に

僅かに変化する．図 9 の下段の図において，破線は熱の授受の前の体積を表し，実線はその後の体積を表す．これらの過程はレイリーが述べた不安定化の条件を満たしている．

図 10 の線図の面積である $p d\rho^{-1}$ の一周積分は正となり，熱エネルギーが気体のエネルギーに変換される．この状態が繰り返されると振動は次第に大きくなり攪乱が成長する．気体の運動エネルギーやポテンシャルエネルギーは壁面から入った熱流によって供給されているので，このエネルギーの変換はまさにプライムムーバの作用である．断熱過程と等圧過程からなるこのようなサイクルはブレイトン (Brayton) サイクルと呼ばれ，ガスタービンのそれと同じである．

一方，図 11 に示すように， δT が dT_w より大きい場合には， $x = \varepsilon$ で熱流 Q_{out} が壁に流出し，粒子は収縮する．また， $x = -\varepsilon$ では熱流 Q_{in} が壁から流入し，粒子は膨張する．この場合にはレイリーの条件が満足されていないので，振動は次第に小さくなり気体は安定である．振動を継続させるためには，気体を外から駆動すればよい．このとき熱流は， $+Q_{in}$ ， $-Q_{out}$ のように粒子を介して壁の温度勾配に逆らって低温側から高温側に向かって流れる．これはまさにヒートポンプの作用である．この場合には図 10 の中の過程 a と過程 c が入れ替わり，矢印の向きが全て逆になる．最後に， $x = \pm\varepsilon$ の気体の温度と壁面温度が等しい $\delta T = dT_w$ の場合には，両端で熱の出入りはないので，図 10 の圧力-比体積線図は上下の幅がなくなり，同一の線上を動くだけである．これが断熱の場合である．

気体粒子に着目した状態の変化と，壁から粒子に出入りする熱流の向きを見た．この粒子の左右に隣り合う多くの粒子を次々に考えると，それらも似た振る舞いをすることが想像できる．熱流は，隣り合う多くの気体粒子を介して，恰も「バケツリレー」¹⁸⁾ されるようにある距離にわたって運ばれる．

5.2 進行波の場合

次に進行波の場合を説明する．定在波では圧力と流速の時間変化の間には $\pi/2$ の位相差があるのに対し，進行波の場合には圧力と流速の変化が同位相で生じる大きな違いがある．進行波というと $\cos[\omega(t - x/a_0)]$ なる形を想像するが，流路が十分狭い場合にはこの形は当てはまらない．ただ，ループ管のスタック (再生器) 外部の区間では確かにその形の進行波が出現する．進行波と呼ばれるのはこのためだけでなく，狭い流路の中でも圧力と流速の時間変化が同位相で起きるからである．

では流路の幅が拡散層厚さより遙かに狭くなると何

が起きるであろうか？この条件を式で表せば

$$1 \ll \frac{\sqrt{\kappa/\omega}}{H} \quad (5.6)$$

である．定在波の場合とは逆に，レイノルズ数が 1 より十分小さく，また $\omega\tau \ll 1$ である．周期 $2\pi/\omega$ が熱の拡散時間 H^2/κ に比べて長いと，気体と壁面との間の熱的接触が完全に行われ，気体の温度はその位置での壁面温度に等しくなる．

レイノルズ数が十分低いので，流れはポワズユ流に近いと考えられる．このとき流速は局所圧力勾配に比例し，流路にわたり断面平均した流速 $\bar{u}'(x, t)$ は，チャンネルの場合には

$$\bar{u}'(x, t) = -\frac{H^2}{3\mu} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (5.7)$$

となる．上付きの線は断面平均を表す．なお，円管の場合には $H^2/3$ を $R^2/8$ で置き換える．関係式 (5.7) は，多孔質を流れる浸透流速と圧力勾配との間のダルシー (Darcy) 則と合致している．

一方，連続の式を断面平均すると次のようになる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{\rho}'}{\rho_e} \right) + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \bar{u}' = 0. \quad (5.8)$$

理想気体の状態方程式 (4.9) から，微小攪乱に対しては $p'/p_0 = \rho'/\rho_e + T'/T_e$ が成り立ち，局所温度変化 T'/T_e が無いとすると，等温変化の関係 $p'/p_0 = \rho'/\rho_e$ が得られる．これらの関係式を式 (5.8) に代入し， $\rho_e^{-1} d\rho_e/dx = -T_e^{-1} dT_e/dx$ を用いると，圧力攪乱は次の拡散・波動方程式に支配される：

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \quad (5.9)$$

ここで， α は拡散率 $p_0 H^2/3\mu$ であり，円管では $p_0 R^2/8\mu$ となる．この拡散率は μ を通して温度に依存し，温度が高くなると小さくなるので，動粘性率や温度拡散率とは逆の傾向を示す．ちなみに， $H = 0.1 \text{ mm}$ のチャンネル内の大気圧下の空気では， α の値は約 $20 \text{ m}^2/\text{s}$ となり，動粘性率 ($1.45 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$) に比べて遙かに大きな値をとる．いま 100 Hz の振動を考えると， x 方向の代表拡散距離 $\sqrt{\alpha/\omega}$ は約 20 cm である．

次にエネルギー式 (4.7) を考える．攪乱が小さいとして粘性散逸関数を無視し，また発熱源や吸熱源がないものとする．温度攪乱 $T' = 0$ において式を断面にわたり平均をすると，

$$\frac{q}{2H} = -\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_e c_p \frac{dT_e}{dx} \bar{u}' \quad (5.10)$$

と書ける．ただし， q は両壁面から気体に流入出する熱流束密度である．なお，円管では左辺は $2q/R$ になる．これから，温度勾配がなければ，圧力が時間とともに

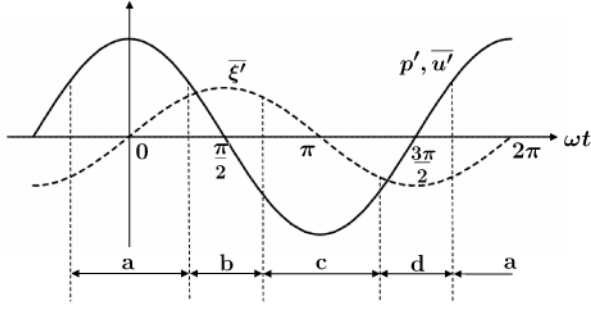


図 12 狭い流路内の気体の超過圧力 p' 、断面にわたる平均流速 $\bar{u}$ および平均変位 $\bar{\xi}$ の一周期にわたる時間的変化 (ただし $0 < Ae^{\lambda x/L} < A_0$)。縦軸のスケールには意味が無く、超過圧と平均流速を実線で平均変位を破線で示す。

増加 (減少) する位置では q は流出 (流入) する。したがってレイリーの不安定化の条件が満足されない。これは自明な結果である。一方、温度勾配があり第 2 項が大きいとすると、勾配が正でかつ速度が正 (負) の場合には、壁面から気体粒子に熱流が流入 (流出) する。これは、ある位置で気体を見ていると、速度が正 (負) のときには温度の低 (高) い気体が出て来るので、壁面から熱流が流入 (流出) するからである。

以下の議論では簡単のため μ の温度依存性を無視し、 α を定数とみなす。式 (5.9) の最初の二つの項は拡散方程式を構成するので、温度勾配が無ければ圧力変動は伝播出来ずに拡散してしまうことを示している。ところが温度勾配があると第 3 項によって、(5.9) は拡散・波動方程式になり、変動は拡散に加え温度勾配の正の向きに伝播することを示唆する。

温度が指数関数的に増加する場合を仮定し、 $T_e/T_0 = \exp(\lambda x/L)$ とおく。ただし、 T_0 は $x=0$ での温度で、 λ を正の定数とする。超過圧 p' が角周波数 ω で時間的に調和振動するとし、 $\exp(-kx + i\omega t)$ なる形の解を求めると、二つの k の値が決まる。温度勾配が急峻でその代表長さ L/λ が拡散距離 $\sqrt{\alpha/\omega}$ より十分小さいとする。このとき k は近似的に、 $-\lambda/L$ と $iL\omega/\lambda\alpha$ と求まる。後者が波のモードを表すが、前者に比べ小さいので k をゼロとおく。超過圧はこの解の重ね合わせになり、物理的には実部をとるものと定義すると次のようになる：

$$p' = \frac{3\mu L\omega}{\lambda H^2} (A_0 - Ae^{\lambda x/L}) \cos(\omega t). \quad (5.11)$$

ここで、 A_0 , A は未定の定数である。円管では $3/H^2$ を $8/R^2$ で置き換える。一方、平均流速 $\bar{u}$ は (5.7) より

$$\bar{u} = A\omega e^{\lambda x/L} \cos(\omega t) \quad (5.12)$$

となり、 $\partial \bar{\xi}/\partial t \equiv \bar{u}$ によって定義される平均変位 $\bar{\xi}$ は

$$\bar{\xi} = Ae^{\lambda x/L} \sin(\omega t) \quad (5.13)$$

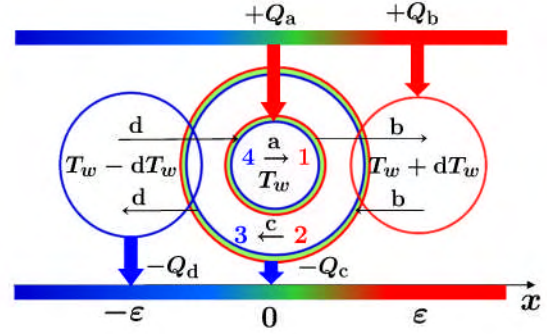


図 13 進行波により気体粒子がうける図 12 で示した代表的な 4 つの過程 a, b, c, d を矢印で表す。ただし、 $0 < Ae^{\lambda x/L} < A_0$ の場合であり、1, 2, 3, 4 は図 14 で示した状態に対応する。

と求まる。

式 (5.12) と関係 $\rho_e/\rho_0 = T_0/T_e = e^{-\lambda x/L}$ を用いると、平均質量流束密度 $\rho_e \bar{u}$ は x によらないことが分かる。これは温度が高 (低) い所では密度が低 (高) いが、速度が速 (遅) くなるためである。非圧縮性流体の振動流と同じように、この場合には密度の時間変化 $\partial \bar{\rho}/\partial t$ は連続の式 (5.8) よりゼロである。しかし、 $\bar{\rho}$ の $\bar{u}$ で動くラグランジュ微分はゼロではない。

式 (5.11), (5.12) から、流速に対する圧力の比である音響インピーダンスを求めると、

$$\frac{p'}{\rho_0 a_0 \bar{u}} \sim \frac{\nu/\omega L\omega}{H^2 a_0} \quad (5.14)$$

と見積もることができる。ここで、 $\nu = \mu/\rho_0$ とおいた。なお、等温の自由空間でのインピーダンスは $\rho_0 a_0$ である。右辺の $(\nu/\omega)/H^2$ はプラントル数を 1 程度とすると、(5.6) より十分大きな量である。一方、 $L\omega/a_0$ は温度勾配の長さを基にした代表速度 $L\omega$ の断熱音速に対する比であり 1 より小さい。音響インピーダンスはこの両者の積で決まるが、流路幅を小さくするにつれて $\rho_0 a_0$ より遙かに大きくなり、流れにくくなる。

以上の結果から、 $0 < Ae^{\lambda x/L} < A_0$ を満たす位置での超過圧、平均流速および平均変位の時間変化を図 12 に示す。図は各量の位相関係を示すだけで、縦軸のスケールには意味はない。圧力と流速は自由空間での進行波のように同位相で変化し、変位は $\pi/2$ 遅れる。変化を 4 つの区間で示す過程 a, b, c, d に分けて考える。

図 13 は、図 12 で示した 4 つの過程における気体粒子の位置と状態を示す。図 14 には、気体粒子が受ける過程と状態を圧力と比体積の関係において示す。熱拡散の速度に比べて粒子の運動は緩やか ($\omega \rightarrow 0$) であるので、過程 a では気体粒子は x の正の向きに運動しつつも原点付近にあるとして、図 13 では中央に描いた。過程

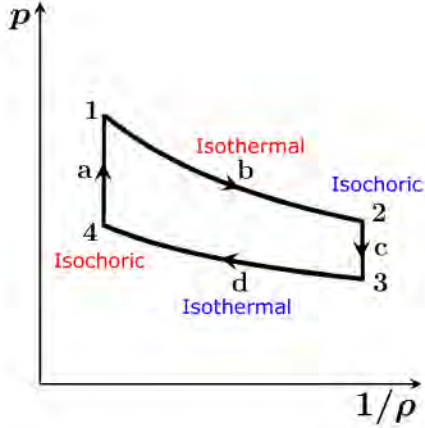


図 14 図 13 で示した気体粒子の圧力 p と比体積 $1/\rho$ との間の関係

b では粒子は x の正の向きに最大変位した位置 $x = \varepsilon$ 付近にあり、気体温度はその位置での壁面温度 $T_w + dT_w$ に等しい。この等温過程において圧力は減少し、粒子速度は正から負に変わる。過程 c では粒子は x の負の向きに運動しつつも原点付近にあるので、過程 a と重ねて中央に描いた。しかし、過程 a と過程 c の大きな違いは速度の向きだけでなく、過程 a では圧力は最大値をとる一方、過程 c では最小値をとる。過程 d では粒子は x の負の向きに最大変位した位置 $x = -\varepsilon$ 付近にあり、気体温度はその位置での壁面温度 $T_w - dT_w$ に等しい。この等温過程において圧力は増加し、粒子速度は負から正に変わる。

壁面からの熱流は (5.10) によって決まる。過程 a では圧力の時間変化は小さいが速度が正であるので、第 2 項により壁から熱流 Q_a が流入する。この結果、温度が $T_w - dT_w$ から $T_w + dT_w$ に上昇する。過程 b では速度はほぼゼロであり、温度は $T_w + dT_w$ に保たれる一方、圧力が減少するので熱流 $+Q_b$ が流入する。過程 c では圧力の時間変化は小さいが速度が負であるので、第 2 項により壁に熱流 Q_c が流出する。この結果、温度が $T_w + dT_w$ から $T_w - dT_w$ に下降する。過程 d では速度はほぼゼロであり、温度は $T_w - dT_w$ に保たれる一方、圧力が増加するので熱流 $-Q_d$ が流出する。図 13 には、過程 a および過程 c での変化をそれぞれ矢印で表し、二重丸で示した。いずれの過程も密度変化がないので等積変化である。

図 14 のサイクルはいわゆるスターリング (Stirling) サイクルである。特に過程 a と c での再生器を介した熱流の大きさ Q_a と Q_c が等しければ、熱効率はカルノーサイクルの効率に等しい²⁸⁾。これが進行波型の熱機関が注目される理由の一つである。この結論は、温度勾配が

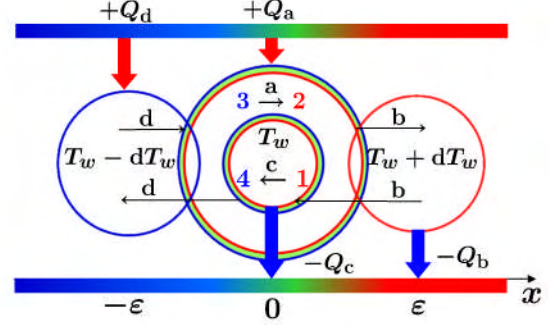


図 15 進行波により気体粒子がうける図 12 で示した代表的な 4 つの過程 a, b, c, d を矢印で表す。ただし、 $0 < A_0 < Ae^{\lambda x/L}$ の場合であり、1, 2, 3, 4 は図 14 で示した状態に対応する。

大きく攪乱は小さい場合であり、他にも多くの仮定が含まれていることに注意すべきである。

最後に、式 (5.11) の $0 < A_0 < Ae^{\lambda x/L}$ の場合を考える。図 12 の p' の符号が $\bar{u}'$ と異なり、過程 a では $p' < 0$ であるので、図 13 は図 15 で置き換えられ、図 14 では過程 a と c が入れ替わり矢印の向きが逆転する。もちろんレイリーの条件は満たされず安定であるが、振動を駆動するとヒートポンプ作用が現れる。

6 熱流の不安定性

温度勾配による気体の不安定化のメカニズムを、気体粒子に着目してラグランジュ的に説明した。この説明には仮定が多く、サイクル論による説明にはやはり限界がある。ここが流体力学に馴染んでいる者にとってはついて行きにくい所である。

不安定化現象を何とかオイラー的に考えてみたくなり、熱流の不安定性の考えに辿り着いた。温度勾配の下での静止気体中には熱流が定常的に流れている。熱流に何らかの局所的な攪乱が入れば、まず気体の温度に変化がおき、エネルギー流束ベクトルが変化する。温度変化はまた状態方程式を通して圧力および密度にも影響する。圧力の変化は運動方程式を通して気体を静止状態から運動させるとともに、その影響は音として気体中に伝播し拡がる。さらに気柱の固有振動がその成長を助長する場合、気柱全体があるモードで振動する。これが不安定化のシナリオである。

攪乱が成長するにつれ様々な非線形現象が出現する。非線形現象は大きく二つに分けることができる。一つは「波」としての音響的な非線形現象である。非線形性による高調波の発生と高次モードへのエネルギー輸送により、波形が基本モードの調和振動から歪み、振幅の増加が次第に抑えられる。衝撃波の発生も考えられる。ま

た、直流成分である質量輸送を伴う音響流が出現する。

後者の非線形現象は「渦」の出現によるものである。スタックや熱交換器に気体が入り出す際の流路の急縮小・急拡大に伴う噴流やはく離流れがある。これらは主に損失を与えるが、熱音響の分野ではこれらヘッドロスをマイナーロスと呼んでいる^{18,29)}。メジャーロスとは管路摩擦によるロスを指すが、マイナーロスは決してマイナーなことではない。こうした非線形性が初期の線形成長を抑え、最終的にある一定の振幅をもつ振動が出現する。これが実際に観測される熱音響振動であり、非線形振動である。

まず線形領域に議論を絞り、熱流が不安定化する条件について、流れの安定性と対比し眺めてみる。流れの安定性解析は約1世紀前にはじまり、オア・ゾンマーフェルト方程式の固有値問題により決定できることはよく知られている³⁰⁾。定常な速度分布に対して周波数分解した微小攪乱について線形化し、中立攪乱が存在するレイノルズ数と波数との間の臨界条件が求められてきた。

一方、不安定化した攪乱が乱流に至る遷移の非線形挙動も、弱非線形の場合には非線形波動の漸近解析手法を応用し詳しく研究が行われてきた。これらの研究は非圧縮性流れを対象に扱われ、圧縮性流体でのこのような組織的な研究については筆者は知らない。一方、熱が関与する問題では重力があれば浮力による不安定が生じる。この場合でも、局所的には非圧縮性を仮定するブシネスク近似が用いられてきた。ベナール対流における不安定性については詳しく研究が行われており、散逸系カオスの研究の発端になったことはご存じの通りである。

これに対し、熱音響現象の流体力学的な見方や取り扱いが行われてこなかった。ただ、近年の研究の原点ともいうべき方程式は、流体力学者であるロットが導いている。その後は流体力学の研究者の関与は少なく、熱音響現象は流体力学のコミュニティーでは世界的に見てもあまり知られていない。しかし現象自体はまさに熱流体力学の範疇にある。関心をもってもらうには、まず現象がいかに馴染みのものに近いかを示すのがよいと考え、表1に流れの安定性と比較した。熱流の安定性という見方はこれまで無いけれども、議論は殆ど並行してできる。こうした見方をすれば、流れの安定性の知見から抜け落ちている箇所が見えたり、新しい問題の解決に繋がると考えている。

熱流の安定性についての線形領域の研究は現在ほぼ完成している。やはり問題は非線形領域の解明であり、まだまだ研究の余地はある。熱機関への実用化には、出力と効率の向上が欠かせない。この解決は、上での述べたマイナーロスの正体を明らかにしないと不可能である。スタック出入り口や熱交換器の形状が流れによる

抵抗だけでなく、特に熱交換器周りの熱の流れに大きく影響する。こうした研究にはCFDやPIVは大変有力なツールであり、いよいよ流体力学の出番である。

解説の執筆を勧めて頂きました岐阜大学教授・田中光宏博士には紙面をお借りして御礼申し上げます。

引用文献

- 1) Swift, G. W.: *Thermoacoustics A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators*, Acoustical Society of America, (2002).
- 2) 富永 昭: 熱音響工学の基礎, 内田老鶴圃 (1998).
- 3) 杉本 信正: 境界層理論から見た熱音響振動とその安定性, *ながれ*, **24** (2005) 381–393.
- 4) 杉本 信正: 熱音響現象—熱と音と流れの相互作用—, *機械の研究*, **60**(4) (2008) 423–434.
- 5) 杉本 信正: 熱音響現象とこれを利用した新しい熱機関, *生産と技術*, **63**(2) (2011) 51–57.
- 6) Beyer, R. T.: *Sounds of Our Times*, Springer (1999).
- 7) Rijke, P. L.: Notice of a new method of causing a vibration of the air contained in a tube open at both ends, *Phil. Mag. Ser.IV*, **17** (1859) 419–422.
- 8) Feldman, JR., K. T.: Review of the literature on Rijke thermoacoustic phenomena, *J. Sound Vib.*, **7**(1) (1968) 83–89.
- 9) Raun, R. L., Beckstead, M. W., Finlinson, J. C., & Brooks, K. P.: A review of Rijke tubes, Rijke burners and related devices, *Prog. Energy Combust. Sci.*, **19** (1993) 313–364.
- 10) Lord Rayleigh: *The Theory of Sound*, Vol.II, Dover (1945).
- 11) Sondhauss, C.: Ueber die Schallschwingungen der Luft in erhitzten Glasröhren und in gedeckten Pfeifen von ungleicher Weite, *Ann. Phys.*, **79** (1850) 1–34.
- 12) Feldman, JR., K. T.: Review of the literature on Sondhauss thermoacoustic phenomena, *J. Sound Vib.*, **7**(1) (1968) 71–82.
- 13) Taconis, K. W., Beenakker, J. J. M., Nier, A. O. C., & Aldrich, L. T.: Measurements concerning the vapour-liquid equilibrium of solutions of He³ in He⁴ below 2.19°K, *Physica*, **15** (1949) 733–739.
- 14) Merkli, P. & Thomann, H.: Thermoacoustic effects in a resonance tube, *J. Fluid Mech.*, **70** (1975) 161–177.
- 15) Ceperley, P. H.: A pistonless Stirling engine—The traveling wave heat engine, *J. Acoust. Soc. Am.*, **66**(5) (1979) 1508–1513.
- 16) Ceperley, P. H.: Gain and efficiency of a traveling wave heat engine, *J. Acoust. Soc. Am.*, **72**(6) (1982)

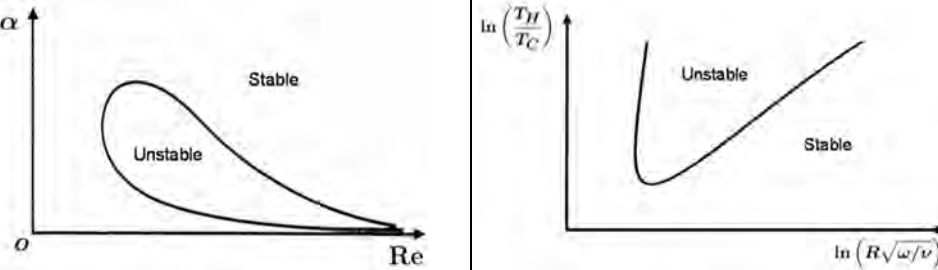
安定性の比較		
分類	流れの安定性	熱の流れの安定性
代表例	ポワズユ流, クエット流, 自由せん断流, 境界層流れ等	ソンドハウス管, タコニス振動, スタックや再生器内の振動等
線形領域	線形安定性理論	ロット方程式(1969, 1973) 圧縮性流体での粘性および熱伝導性の作用
	固有値問題	設定: 静止気体中の温度分布を与える 攪乱: 時間フーリエ成分 境界条件: 気柱の両端
	代表的な臨界曲線	 平面ポワズユ流の臨界曲線: 横軸はレイノルズ数, 縦軸は波数. タコニス振動の臨界曲線: 横軸は粘性拡散層の厚さに対する管半径, 縦軸は温度比.
	臨界状態	トルミン・シュリッヒティング波のような成長攪乱の「芽」の役割
非線形領域	現象と理論	● 振動の成長と3次元化 ● ランダウ方程式 ● 不安定モードの弱非線形理論 ● 超臨界分岐と亜臨界分岐 ● カオスから乱流へ ● 温度(浮力)の影響 ベナール対流

表 1 流れの安定性と熱の流れの安定性の比較

- 1688–1694.
- 17) Wheatley, J., Høfler, T., Swift, G. W. & Migliori, A.: An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine, *J. Acoust. Soc. Am.*, **74**(1) (1983) 153–170.
- 18) Swift, G. W.: Thermoacoustic engines, *J. Acoust. Soc. Am.*, **84**(4) (1988) 1145–1180.
- 19) ギャレット, S. L.: エンジンを再発明する, 知の創造 2 ネイチャーで見る科学の世界, 徳間書店 (2000) 193–201.
- 20) Garrett, S. L.: Thermoacoustic engines and refrigerators, *Am. J. Phys.*, **72**(5) (2004) 11–17.
- 21) Swift, G. W.: Analysis and performance of a large thermoacoustic engine, *J. Acoust. Soc. Am.*, **92**(3) (1992) 1551–1563.
- 22) Yazaki, T., Iwata, A., Maekawa, T. & Tominaga, A.: Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube, *Phys. Rev. Lett.*, **81**(15) (1998) 3128–3131.
- 23) Yazaki, T., Biwa, T. & Tominaga, A.: A pistonless Stirling cooler, *Appl. Phys. Lett.*, **80**(1) (2002) 157–159.
- 24) Backhaus, S. & Swift, G. W.: A thermoacoustic Stirling heat engine, *Nature*, **399** (1999) 335–338.
- 25) Backhaus, S. & Swift, G. W.: A thermoacoustic-Stirling heat engine: Detailed study, *J. Acoust. Soc. Am.*, **107**(6) (2000) 3148–3166.
- 26) 杉本 信正: 非線形音波における衝撃波の発生とその抑制, *日本機械学会誌*, **111**(5) (2008) 396–399.
- 27) Tijani, M. E. H., Zeegers, J. C. H. & de Waele, A. T. A. M.: Prandtl number and thermoacoustic refrigerators, *J. Acoust. Soc. Am.*, **112**(1) (2002) 134–143.
- 28) 山下 巖, 濱口和洋, 香川 澄, 平田宏一, 百瀬 豊: スターリングエンジンの理論と設計 (1999) 山海堂.
- 29) Fox, R. W. & McDonald, A. T.: Introduction to Fluid Mechanics, 4th ed.(1994) John Wiley & Sons.
- 30) 神部 勉 & Drazin, P. G.: 流体力学 安定性と乱流, (1998) 東京大学出版会.