

「わが国債券市場固有の現象と期間構造分析」

小峰みどり⁽¹⁾・山岸正明⁽²⁾・松本和幸⁽³⁾・二木高志⁽⁴⁾
司 淳⁽⁵⁾・長尾知幸⁽⁶⁾・砂川和彦⁽⁷⁾・佐野尚史⁽⁸⁾

要 約

今日、わが国の長期金利を代表する指標は長期国債の流通利回りであり、その動向に対してはきわめて高い関心が持たれている。また、オプション取引やイミュナイゼーションといったさまざまなリスク回避手段の運用面からも、その動向に対する関心は従来以上に高くなっていると言える。しかしながら、金利に関する理論およびその推計方法は主に欧米で開発されたものであり、この方面におけるわが国の対応はかなり立ち後れている。

たとえば、わが国の債券市場には固有の現象がいくつか見られるが、欧米の研究ではこれらの現象に対する配慮は当然見られない。わが国債券市場固有の現象としては、指標銘柄への集中取引あるいは直利指向などがある。本論では、これらの現象が金利に与える影響を分析するとともに、これらの影響を考慮に入れた金利の期間構造の分析を試みる。

節では分析に先だって、さまざまな金利概念を紹介する。わが国においては、クーポンの再投資を考慮しない単利方式の最終利回りが実務上主流であるが、欧米では従来よりクーポンの再投資を考慮した複利方式の最終利回りが用いられている。しかし、この複利最終利回りにも問題があり、金利尺度として適切であるとは言えない。複利利回りの1つの問題点は、残存期間中、每期同じ再投資レートで運用されるという時間概念の欠如である。もう1つの問題点は、理論的に同一の予想収益率を仮定した複数の利付債について、複利利回りを計算すると、その値はクーポンの値に左右されるという、収益率尺度という観点からの問題点である。複利利回りが持つこのような欠点を回避した金利尺度がスポット・レートである。スポット・レートはクーポンがゼロで期末に1度だけキャッシュ・インフローを生じる場合の複利利回り、つまり、割引債の複利利回りに他ならない。

節ではスポット・レートに関する各種の推計方法を比較する。スポット・レートの定義から直ちに分かるように、あらゆる期間に対応する割引債が市場に存在すれば、容易にスポット・レートの計測は可能である。ところが、実際には長期の割引債は存在しないので、利付債を用いて推計せざるを得ない。

利付債からスポット・レートを推計するに当たっては、3つのアプローチがある。第1

- * (1) (財)本証券経済研究所主任研究員、立正大学経済学部非常勤講師
(2) 大蔵省財政金融研究所主任研究官
(3) 大蔵省財政金融研究所主任研究官
(4) 前大蔵省財政金融研究所研究官
(5) 大蔵省財政金融研究所研究員(日興リサーチセンター)
(6) 前大蔵省財政金融研究所研究員(三菱信託銀行)
(7) 前大蔵省財政金融研究所研究員(東海銀行)
(8) 前大蔵省財政金融研究所研究員(大和銀総合研究所)

のアプローチは、さまざまな満期構成の利付債の価格から直接スポット・レートを計測する方法である。これには、われわれが用いた逐次代入方式とCarleton & Cooperによる回帰方式がある。第2のアプローチは、スポット・レートと密接な関係を持つディスカウント・ファンクションに特定の形状を持つスプラインを仮定し、推計する方法である。McCulloch, Vasicek & Fong等がこの方法を用いた推計を行っている。第3のアプローチは、第1と第2のアプローチの組み合わせである。

これまで各種の推計方法によって実際のスポット・レートを推計し、その形状の比較を試みたものはあるが、予めスポット・レートが分かっているという条件の下で各種の推計方法の比較を試みたものはない。本論では、スポット・レートが単調に増加するケースと単調に減少するケースに関して、推計方法の比較を試みた。スポット・レートを所与とすることにより、推計方法の特徴が明らかになると同時に、その優劣を直接判断することが可能となる。その結果、あらかじめスプラインを与える方法による推計結果はスプラインの形状に大きく左右され、真のスポット・レートとかけ離れた結果を導く可能性が高いということが明らかになった。推計されたスポット・レートに基づいて割高、割安銘柄を判定するということも行われているようであるが、ここでの結果は、割高、割安に見える現象は与えられたスプラインが不適切であることの反映に過ぎないという可能性を強く示唆するものである。

節では、わが国債券市場固有の現象である指標銘柄と直利指向の影響について分析する。指標銘柄に関しては、指標銘柄以外の銘柄から推定されるスポット・レートをもとに指標銘柄の理論価格を導いた。この理論価格と現実の市場価格の差は指標銘柄の高い流動性に対するプレミアムであると解釈することができるが、別の見方をすれば、裁定による収益機会が放置されているということでもある。この事実は広い意味での取引コストの存在を示唆する。最近、金融機関に対して国債の貸借取引および空売りが解禁されたため、裁定取引が活発になる可能性もあるが、どれだけプレミアムが縮まるかは流動性に対する選好の程度と取引コスト低下の程度に依存する。とはいえ、ここでの分析対象期間に関しては、指標銘柄の価格には流動性プレミアムが含まれており、他の銘柄とは別の基準に基づいて価格形成がなされていることが明らかになった。

直利指向に関する検証結果は、分析の対象期間においては、直利指向がほとんど存在しないことを明らかにした。これは、対象期間が低金利期であるということに大きく依存していると思われる。その理由としては、低金利期には高クーポン債のオーバー・パーの傾向が強くなるため、償還差損が忌避される。さらに、低金利期にはインカム・ゲインに対し、キャピタル・ゲインが相対的に重視されるということが挙げられる。ここでの計測結果はこのような低金利期に固有の投資家行動に強く結びついた結果であると考えられるが、最近の市場には、直利指向の是正につながるとされる変化がいくつか見られる。1つは、国際化の影響で総合収益を重視する投資家が増えたということである。もう1つは経理基準の変更である。もし、これらのインパクトがわが国固有の投資家行動を是正するほど大きいものであるとすれば、高金利期になっても直利指向が生じない可能性もある。はたして、これらがわが国債券市場に質的な変貌をもたらしたのか否かの判定は、次の高金利期の到来まで待たねばなるまい。

節では、節および節での結果をふまえて、わが国債券市場におけるスポット・レートの期間構造の計測を試みる。用いた推計方法は逐次代入方式、Carleton & Cooper

方式，McCulloch方式，Vasicek & Fong方式，Hougllet方式の5種類である。推計結果の比較に際しては，通常用いられる決定係数による比較だけでなく，複利利回りの形状との比較も重視した。節で紹介するクーポン効果から明らかなように，スポット・レートと複利利回りの間には一定の関係が見られる。このような比較を行った結果，ここでもスプラインを当てはめる方法の問題点が浮き彫りになった。この方法は関数型さえ決めれば，スポット・レートを簡単に推計できるためよく使われるが，どのような関数を仮定するかによって，計測結果が大きく左右される。また，初めから1本の関数に集約させることによって，直利指向や指標銘柄の集中売買といったわが国固有の要因が見失われるという危険性を持つ。さらに，スポット・レートの形状は，期間によってかなりばらつきがあると予想されるため，どの期に関しても同じ関数型がよいとは事前的には言えない。

これらの理由から，われわれは事前に関数型を仮定せずにスポット・レートを直接推計すべきであるとする。幸い，最近のわが国の利付国債に関しては分析に足るだけの十分なデータが揃っているため，恣意的な仮定を排除した推計が可能である。

．はじめに

国債の流動化が図られた昭和52年以降，その高い市場性と信用度をバックに国債の流通利回りは長期自由金利体系の中心をなし，その水準は長期金利を代表する指標として市場の注目を集めている。しかし，昭和52年から今日に至るまでのおよそ10年間，市場を取り巻く環境は必ずしも一様であったとはいえない。とくに，昭和60年後半を境とする低金利相場下で，国債市場にはこれまでに見られなかったいくつかの注目すべき現象，たとえば，金利変動の増大，ディーリング商いの拡大による取引売買高の急増，指標銘柄への集中化等の現象が現れている。

これらの現象を背景として，金利の動向に対する関心は従来以上に高くなっている。しかしながら，金利に関する理論およびその推計方法は主に欧米で開発され，この方面におけるわが国の対応はかなり立ち後れている。

金利に関する分析の方向は大きく2つに分かれる。1つは，一般的な金利水準の決定要因をマクロ的な視点から分析するものであり，もう1つは金利の属性に着目した，属性による金利構造の分析である。後者の中には，長

期，中期，短期といった期間の相違による金利の期間構造，あるいはリスク水準の違いによる金利のリスク構造等が含まれる。

一般的には，欧米で開発された方法論を用いて金利の計測は行われているが，実務段階では未だに日本式単利が用いられているのが実状である。また，指標銘柄への集中化あるいは直利指向等のわが国固有の要因を考慮すると，欧米の理論に立脚した方法論をそのまま援用することには疑問が残る。

そこで，われわれは，わが国固有の要因が金利に与える影響を分析するとともに，それらの影響を考慮に入れた分析を試みることにした。

節では，さまざまな金利概念を整理し，日本式利回りと複利利回りの関係，複利利回りとクーポン・レートの関係など，分析をすすめる上で重要と思われる事柄について説明する。節では，期間構造の分析に用いられる各種の推計方法の特徴を明らかにし，それらの比較を試みる。節では，節での結果をふまえて，指標銘柄および直利指向等，わが国固有の要因が金利に与える影響について

分析する。節では、わが国の特色を考慮に いて、期間構造の推計を試みる。

金利の諸概念

一口に金利と言っても、様々な金利概念がある。わが国の国債の金利構造を観察するに先だって、これらの概念を整理する。

1. 日本式最終利回り

従来より、わが国で最終利回りと言う場合、クーポン収入による直接利回りと償還差損益によるキャピタル利回りとを合計した単利方式によるものを指す。日本式最終利回り $R(J)$ の算出は以下の通りである。

$$R(J) = \frac{C + (F - P) / (n - s)}{P}$$

C : 額面当りクーポン

P : 経過利息を考慮しない裸値

F : 額面単価 (日本国債は100円)

n - s : 残存年 (S は経過日数の年表示)

一般にわが国では、国債の流通利回りと言う場合、実務上、発行量が多く取引量が多い指標銘柄を単利で表したものを指すことが多い。クーポンの再投資を考慮していない欠点があるものの、伝統的に期間損益を重視する、すなわち直利指向の強いわが国の投資家には、最もポピュラーな利回り表示である。

2. 欧米式最終利回り (yield to maturity)

従来より欧米で用いられている最終利回りの表示は、yield to maturityと言われる複利方式によるものである。これは、内部収益率 (internal rate of return) と、投資理論の中で言われているもので、現在ある一定額を投資した場合、将来にわたって一定の期間ごとに、入って来るキャッシュ・フローが分かれば算出できる。この考え方を using、欧米式最終利回りは、以下の式を満た

す割引率 R を算出することにより求められる。なお、クーポンは半年ごとに支払われるものとする。

$$P + \frac{C}{2}s = \frac{C}{2} \sum_{t=1}^s \frac{1}{(1 + \frac{R}{2})^{2(t-s)}} + \frac{F}{(1 + \frac{R}{2})^{2(n-s)}}$$

C : 額面当りクーポン

P : 裸値

F : 額面単価 (日本国債は100円)

n - s : 残存年 (S は経過日数の年表示)

欧米式最終利回りは、クーポンの再投資を考慮していると言う点で、日本式最終利回りの欠点が補填されている。

3. 修正単利

日本式最終利回りに複利計算で用いたキャッシュ・フローを対応させて計算したのが、我々がここで便宜上「修正単利」と呼ぶものである。修正単利 $R(M)$ の算出は、以下の通りである。なお、クーポンは半年ごとに支払われるものとする。

$$R(M) = \frac{(F + \frac{C}{2}N - P - Cs) / (n - s)}{P + Cs}$$

F : 額面単価 (日本国債は100円)

C : 額面当りクーポン

N : クーボンの支払い回数

P : 裸値

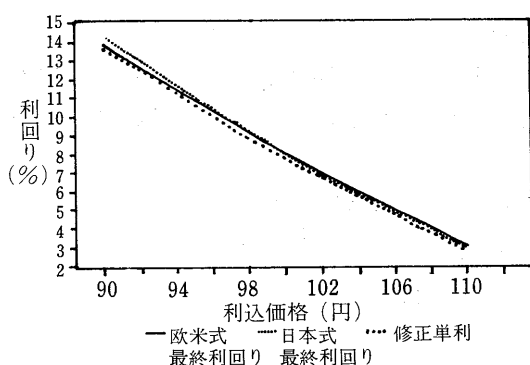
n - s : 残存年 (S は経過日数の年表示)

各種利回りの傾向を見るために、クーポン・レート 8 %、残存年数 2.05 年の債券について、価格がアンダー・パー、オーバー・パーの場合、日本式最終利回り・欧米式最終利回り・修正単利がいかに変化するか比較したの

が図1である(注1)。

これらの利回りを比較すると、ディープ・アンダー・パーの場合には、日本式最終利回りが最も高く、欧米式最終利回りが最も低くなる。一方、オーバー・パーの場合には、欧米式最終利回りが最も高く、修正単利が最も低くなる。ディープ・アンダー・パーとオーバー・パーの間の価格帯においては、日本式単利が最も高く、修正単利が最も低くなる。

図1 債券価格と各種の利回りの関係



利込値	経過利息	利込値	欧米式最終利回り	日本式最終利回り	修正単利
90.00	3.5616	93.57	13.74%	14.29%	13.75%
96.44	3.5616	100.00	9.96%	10.09%	9.73%
100.00	3.5616	103.56	8.00%	8.00%	7.72%
110.00	3.5616	113.57	2.95%	2.85%	2.76%

表1 最終利回り

	残存年	利込価格	最終利回り
銘柄A	2年	100円	$R_A\%$
銘柄B	3年	99円	$R_B\%$

$$100円 = \frac{10円}{1 + R_A} + \frac{110円}{(1 + R_A)^2}$$

$$99円 = \frac{10円}{1 + R_B} + \frac{10円}{(1 + R_B)^2} + \frac{110円}{(1 + R_B)^3}$$

4. スポット・レート

スポット・レートの内容を論じる前に、欧米式最終利回り(以下、最終利回りと呼ぶ)の理論的欠陥を表1の簡単な例で説明する。

表1は利込価格・クーポン・額面単価が所与の場合、各銘柄ごとに最終利回りが計算されるプロセスを示している。A・B両銘柄共クーポン・レートは10%で、A銘柄は残存期間2年、B銘柄は残存期間3年とおいた。銘柄Aは1年後に10円、2年後に110円のキャッシュ・フローがあり、銘柄Bは1年後に10円、2年後に10円、3年後に110円のキャッシュ・フローが発生する。複利利回りでは、同一銘柄に関しては、各期同じレートで割り引かれる。例えば1年後10円のキャッシュ・フローを、銘柄Aの場合は $R_A (=10.00\%)$ 、銘柄Bの場合は $R_B (=10.41\%)$ で割り引くため、同じ1年後の10円でもその現在価値は銘柄間で異なるという論理的不整合(すなわち時間的尺度の欠如)が生じることになる。この論理的不整合を修正したのが、表2である。

表2 スポット・レート

$$100円 = \frac{10円}{1 + r_1} + \frac{110円}{(1 + r_2)^2}$$

$$99円 = \frac{10円}{1 + r_1} + \frac{10円}{(1 + r_2)^2} + \frac{110円}{(1 + r_3)^3}$$

表2では、1年後に発生するキャッシュ・フローは銘柄によらず、同一のレート r_1 で割り引かれると考える。同様に、2年後に発生するキャッシュ・フローは r_2 で割り引かれる。

表3の例は、銘柄間で割引率が同一になることの合理性を示すものである。表3において、銘柄aを1単位空売りし(保有している場合は、現物の売却)、銘柄bを2単位購入

(注1) 我々の比較は経過利息の効果を考慮したものであるが、経過利息を考慮しない日本式最終利回りと欧米式最終利回りの比較については、たとえば小林・森田(1989)を参照。

表3 キャッシュ・フローの合成

	残存年	クーポン	1年後キャッシュ・フロー	2年後のキャッシュ・フロー
銘柄a	2年	10%	10円	110円
銘柄b	2年	8%	8円	108円
銘柄c	2年	6%	6円	106円

することにより、銘柄cと同じキャッシュ・フローをつくりだすことができる。同様に、銘柄aと銘柄cで銘柄b、銘柄bと銘柄cで銘柄aと同じキャッシュ・フローができあがる。この時、もし銘柄間で割引率が異なれば、同一のキャッシュ・フローに対し、投資額が異なることになり、裁定取引の余地が生じる、裁定の余地が無い状態では、1年後の割引率、2年後の割引率は、3銘柄各々同じになる。この割引率がスポット・レートである。

スポット・レートは、期末に1度だけキャッシュ・フローを発生させる取引から計算される利子率である。従って、スポット・レートは割引債の最終利回りとも言える。

利付債は見方を変えれば、クーポン・元本を各々償還金額とする割引債の集合体と見ることができるので、債券価格は一般に、以下のように表すことができる。なお、簡略化のため、クーポン支払いは年1回とした。

$$P + Cs = C \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1 + {}_0r_{t-s})^{(t-s)}} + \frac{F}{(1 + {}_0r_{n-s})^{(n-s)}} \quad (1)$$

C：額面当りクーポン価格

P：裸値

F：額面単価（日本国債は100円）

n - s：残存年（Sは経過日数の年表示）

${}_0r_{t-s}$ ：現時点から（t - s）年後までの
スポット・レート

またここで、 $1 / (1 + {}_0r_{t-s})^{t-s} = d_{t-s}$ とおくと、(1)式は、次のように置き換えられる。

$$P + Cs = C \sum_{t=1}^n d_{t-s} + Fd_{n-s} \quad (2)$$

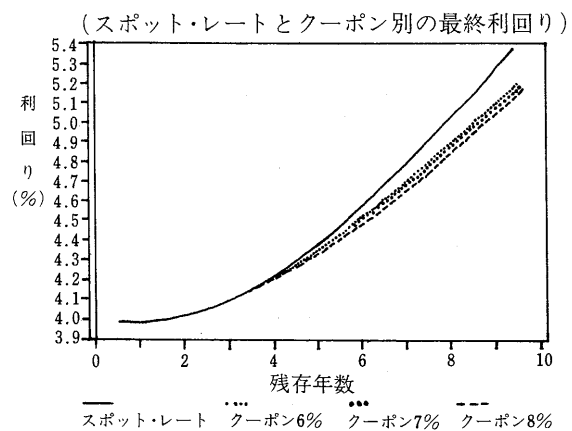
なお、 d_{t-s} は現時点から（t - s）年後までの割引係数（ディスカウント・ファク

ター）と呼ばれており、これは後に述べるスポット・レートの推計作業のベースになるものである。スポット・レートは、定義から明らかなようにクーポン効果を受けることが無く、かつ正確な時間的尺度を持った利回りと言えよう。わが国の金利構造を正確に把握するためには、スポット・レートの導出が不可欠となるが、残存期間等の制約もあり、後述するように様々な推計方法が工夫されている。

5. クーポン効果について

スポット・レートを与えた上で、クーポンの差による最終利回りの違いを見ることにす

図2 クーポン効果



残存年	スポット・レート	ディスカウント・ファンクション	クーポン8%	クーポン7%	クーポン6%
0.5	3.98 (%)	0.9806	3.98 (%)	3.98 (%)	3.98 (%)
1	3.97	0.9617	3.97	3.97	3.97
1.5	3.98	0.9430	3.98	3.98	3.98
2	4.01	0.9243	4.01	4.01	4.01
2.5	4.04	0.9055	4.04	4.04	4.04
3	4.09	0.8866	4.08	4.08	4.08
3.5	4.14	0.8673	4.13	4.13	4.13
4	4.21	0.8477	4.19	4.19	4.20
4.5	4.29	0.8277	4.26	4.26	4.26
5	4.37	0.8072	4.33	4.34	4.34
5.5	4.46	0.7863	4.41	4.42	4.42
6	4.56	0.7650	4.49	4.50	4.51
6.5	4.66	0.7433	4.58	4.59	4.60
7	4.77	0.7213	4.67	4.68	4.69
7.5	4.89	0.6989	4.76	4.77	4.79
8	5.00	0.6764	4.86	4.87	4.89
8.5	5.12	0.6537	4.95	4.97	4.99
9	5.25	0.6309	5.05	5.07	5.09
9.5	5.37	0.6081	5.14	5.16	5.19

る。図2の結果は、スポット・レートが単調増加の場合、クーポンが高いものほど最終利回りが低くなり、クーポンが低いものほど最終利回りが高くなることを示している。価格はクーポン・元本をスポット・レートで割り引くことにより求められるので、現在価値基準で見れば、割安・割高銘柄は存在しない。それにも関わらず、これらの銘柄に対し、最終利回りを計算するとクーポンの低いものは高く、クーポンの高いものは低く計算される。これがまさにクーポン効果と言われるものである。なお、スポット・レートが単調減少の場合には、反対にクーポンの低いものは低く、高いものは高く計算される。クーポン効果は、純粋に数学的な現象であり、一般に言われている直利指向とは、全く異なる概念である。

本例で言えることは、クーポンの違いに

よって最終利回りは異なるが、スポット・レートは一組しか存在しないということである。これがスポット・レートによるクーポン効果の排除の意味である。

6. フォワード・レートと短期の期待スポット・レート

表3の例で、 r_2 と r_3 の関係を考えると、 $(1+r_3)^3 = (1+r_2)^2(1+X)$ から、 $X = 11.32\%$ が算出される。これが、2年後から3年後にかけてのフォワード・レート(${}_2f_3$ と表す)である。意味するところは、現時点で2年後から3年後にかけての(一種の)貸付契約が、市場において合意されているということである。すなわち、フォワード・レートは現時点で市場において合意されている将来の貸付契約の利率である(注2)。

・推計方法の比較

スポット・レートの推計に関しては、これまでいくつかの方法が試みられているが、どの推計方法が優れているかを判定する基準は必ずしも明らかでない。ここでは、各種の推計方法の特徴を明らかにすることによって、それらの比較を試みる。そのために、まず、スポット・レートの値をあらかじめ与えることにする。それから価格を導き、その価格をデータとして、各種の方法でスポット・レートの推計を試みる。

この場合、スポット・レートの値は既知なので、それと推計値を比較することにより、推計方法の特徴を見ることができる。また、さらに重要なことには、このような方法により、推計方法の良さを判定することが可能に

なる。

現実のデータは満期までの期間以外の要因、たとえば直利指向等の影響を反映している可能性がある。したがって、現実のデータを使った分析では、純粋に推計方法の良否を判定するのは困難である。あらかじめスポット・レートの系列を与えた分析では、このような問題点を回避した比較が可能である。

1. 推計方法

スポット・レートの推計にあたっては、直接スポット・レートを推計するのではなく、まず、ディスカウント・ファクター(あるいはディスカウント・ファンクション)を推計し

(注2) 金利と期間の長さを問題にする期間構造に関しては、純粋期待仮説、流動性仮説、特定期間選好仮説などがある。これらの仮説については、たとえばE. J. Elton & M. J. Gruber(1987)を参照。

てから、スポット・レートを算出する方法が一般に用いられている。ディスカウント・ファクターを推計するにあたっては、3つの基本的なアプローチがある。第1のアプローチは、最初にスプライン(区分的多項式, spline)を想定せずに、各期間のディスカウント・ファクターを直接推計しようとする手法である。第2のアプローチは、ディスカウント・ファンクションをある形状を持ったスプラインで近似しようとする手法である。これは、McCulloch以降ほとんどの推計方法に共通のアイデアであるといつてよい。第3のアプローチは、第1と第2のアプローチを組み合わせたものであり、まず、計算可能な期間についてスポット・レートあるいはディスカウント・ファクターを直接推計した後に、スプラインを当てはめようとするものである。以下ではそれぞれのアプローチについて簡単に説明する。

(1) ディスカウント・ファクターを直接推計する方法

第1のアプローチである直接スポット・レートを推計する方法のうち、もっとも基本的なものはさまざまな満期構成の割引債からスポット・レートを計算するという方法である。節で説明したように、割引債の利回りはスポット・レートそのものなので、これがもっとも望ましい方法といえる。しかし、現実には償還期間の長い割引債は存在しないので、期間の長さという点でこの方法には限界がある。

次に考えられるのは、利付債を使って直接推計する方法である。節で触れた通り、 n 期に償還される債券(国債)の市場価格 P (利込み値)は

$$P = C \sum_{t=1}^n d_t + Fd_n$$

$$d_t = \frac{1}{(1 + R_t)^t}$$

P : 価格(利込み値)

C : クーボン

F : 額面単価

d_t : t 期におけるディスカウント・ファクター

R_t : t 期におけるスポット・レート

で表される。

仮に1期から i 期まで、每期満期となる債券が次のように存在したとする。

$$P_1 = C_1 d_1 + Fd_1$$

$$P_2 = C_2 d_1 + C_2 d_2 + Fd_2$$

$$\vdots$$

$$P_i = C_i d_1 + C_i d_2 + \dots + C_i d_i + Fd_i$$

この場合、 P_1 、 F 、 C_1 は市場で既知なので d_1 は単純に求められ、これを順次代入していくことによって d_2 、 d_3 、...、 d_i が求まる。

この方法は、ディスカウントの期間が同じ(=利払い月)で満期日が6ヵ月間隔の銘柄が連続してあれば使うことができる。この方法では期間の短いディスカウント・ファンクションを求め、それを長期のものに順に代入するという手続きをとるので、以後、この方法を「逐次代入方式」と呼ぶことにする。割引債から直接求める場合と同様、逐次代入方式による結果は定義により、各利払い月に対応する真のスポット・レートを算出する。この意味で、逐次代入方式は理論上理想的な方法であるといえる。この方法を実際のデータに適用する際の問題点は、満期日が6ヵ月間隔の銘柄が必要であるということと、同一の満期日の銘柄が複数あっても1つしか使われないということにある。

ディスカウント・ファンクションを直接求めるもう一つの方法は、Carleton & Cooper (1976)の推計方法である。Carleton & Cooper は、同一の満期日の銘柄が複数あるケースを対象として、最小2乗法によって、ディスカウント・ファンクションを推計している。逐次代入方式では各満期日に1銘柄が対応し、

市場価格は完全に(2)式で表わされると考えるが、Carleton & Cooperは市場価格に誤差項をつけ加えることにより、各満期日に複数の銘柄を対応させるモデルを考えている。この方法は、より多くの銘柄を使うという点で好ましいといえるが、節でとり上げる指標銘柄や直利指向といったわが国固有の問題を考えると、スポット・レートの違いを残差項で片づけてしまうことに問題が残る。また、実際には同じ満期日の銘柄が複数あるケースは希であり、推計値の個数の割にデータの個数が少ないという計量上の問題点もある。

(2) スプラインによる近似の方法

ディスカウント・ファンクションの形状をスプラインによって近似しようとするアプローチでは、まず、ディスカウント・ファンクションを近似するスプラインを想定する。そして、現存する債券のデータを使ってスプライン関数の係数を最小2乗法によって推計する。こうして推計されたディスカウント・ファンクターからスポット・レートが算出される。

ディスカウント・ファンクション $d(t)$ を近似するスプライン空間の基底を $f_j(t)$ ($j = 1, \dots, k$) とすると、

$$d(t) = a_0 + a_1 f_1(t) + \dots + a_k f_k(t)$$

と表される。この式を債券価格を表す式

$$P = Cd(1) + Cd(2) + \dots + Cd(n) + Fd(n)$$

P : 市場での債券価格

C : クーポン

F : 額面単価

に代入して整理すると、

$$P = a_0 n(C+F) + a_1 \left\{ C \sum_{t=1}^n f_1(t) + F f_1(n) \right\} + \dots + a_k \left\{ C \sum_{t=1}^n f_k(t) + F f_k(n) \right\} \quad (3)$$

となる。この式はすべての銘柄について成り立つので、誤差項を加えて連立方程式を立てる。これを最小2乗法で回帰分析すれば、(3)式のディスカウント・ファンクションの係数を推定することができる。

さて、ここで問題となるのは、 $f_j(t)$ にどのようなスプラインを与えるかであるが、McCullochは区分的二次多項式(McCulloch(1971))あるいは、区分的三次多項式(McCulloch(1975))を考えた。これに対し、Vasicek & Fong(1982)はディスカウント・ファンクションをグラフ化した形状が指数関数に似ている点に着目し、指数スプラインによってディスカウント・ファンクションを定式化できると考えた。

スプラインを用いる方法のよい点は、いったん関数型を決めてしまえば、容易にスポット・レートを推計できるということである。また、連続関数を考えることによって、利払い月にこだわらずすべてのデータを使うことができるという利点もある。このように、スプラインによる推計は一見、とても魅力的に思われるが、初めに関数型を決めるということはそれだけ大きな制約を課すということであり、安易な使用は真のスポット・レートからかけ離れた結果をもたらすということになりかねない。

(3) 組合せのアプローチ

スプラインを用いる方法のメリットとしてよく言われることは、任意時点でのディスカウント・ファクターが得られるということである。それと比較して、ディスカウント・ファクターを直接推計する方法では、データが存在する時点でのスポット・レートは得られるが、任意時点でのスポット・レートが得られないことが欠点であると言われる。しかし、これは本質的な問題とは言えない。なぜなら、スプラインを用いる方法では、連続な関数を仮定するため自動的に任意時点でのディスカウント・ファクターが得られるにすぎず、直接推計されたスポット・レートに連続な関数をあてはめれば直接推計でも任意時点のスポット・レートを推定することができる。ディスカウント・ファンクションにスプラインを当てはめる方法に比べ、この方法の

方が好ましいと思われるのは、少なくともいくつかの時点に関しては真のスポット・レートがわかっており、その形状から適当なスプラインを予想できるということである。なんら事前の情報のない状態で適当にスプラインを当てはめた場合には、真のスポット・レートからかけ離れた結果がもたらされるというリスクがあるが、この方法ではそのリスクははるかに小さくなると言えよう。

われわれは、任意時点のスポット・レートを推計する方法としては、この直接推計されたスポット・レートに連続な関数を当てはめるという方法が好ましいと考えるが、Hougllet (1969) は直接推計したディスカウント・ファクターにスプラインを当てはめるという方法を採用している。さらに、Houglletにおいて特徴的なことは、ディスカウント・ファクターを直接推計する時に、実際にキャッシュ・フローが生じる時点でのディスカウント・ファクターを求めるのではなく、あらかじめ任意に決めた時点でのディスカウント・ファクターを推計したことである。ディスカウント・ファクターを直接推計する時点は、ディスカウント・ファンクションを推計する全期間をいくつかの区間に分けた時の区間の結合点(バーテックス)とした。区間の分け方は、債券の残存期間の分布状況、フォワード・レートの性質などを考慮して決定する。結合点上で、実際の債券価格のデータが得られないという問題に対しては、結合点前後のデータを加重平均して結合点上でのデータに変換するという方法で対応した。その際に、各期間においてフォワード・レートは一定であると仮定されている。加えて、フォワード・レートにはスムージングの制約条件が付けられている。すなわち、隣接する区間における

フォワード・レートは、緩やかにある程度連続的に変化すべきであるとの条件が付けられている。

任意の時点でのディスカウント・ファンクションは、結合点を適当なスプラインで結んで求めるわけだが、Houglletはスプラインとして区分的指数関数(piecewise exponential)を使った。しかし、指数関数を使うことによって実際の推計は非線形となり、かなり複雑な計算が必要となる欠陥が生じることになった^(注3)。

以上、いくつかの推計方法を紹介したが、われわれが比較のために採用した推計方法は、McCulloch, Vasicek & FongおよびHouglletである。逐次代入方式による推計結果は、定義により、真のスポット・レートと一致するのでとりあげなかった。また、Carleton & Cooperの方法は、満期までの期間が同じ銘柄が複数ある場合に初めて有効な手法なので、この方法もとりあげなかった。

2. データ

ここでは、スポット・レートが期間に関して、単調増加するケースと単調減少するケースを想定した。表4が単調増加の場合のスポット・レートと、それから導かれた価格である。表の第1列目は、満期までの期間で、半年毎に半年から9年半までである。第2列目は、各期間に対応するスポット・レートである。第3列目は、クーポン・レート、第4列目は、第1列目から第3列目までの情報を所与として導かれた価格である。なお、償還価格は100円である。表5は単調減少のケースである。

(注3) Houglletのディスカウント・ファクターの推計方法も、最小2乗法を用いる点では、Carleton & Cooperの推計方法と変わらない。しかし、Houglletにおいて特徴的なことは、ディスカウント・ファクターを直接推計する時に、実際にキャッシュ・フローが生じる時点でのディスカウント・ファクターを求めるのではなく、あらかじめ任意に決めた時点でのディスカウント・ファクターを推計したことである。

3. 推計結果

図3は表4の価格データを基にして各手法で推計したスポット・レートを示している。また、図4は、表5の価格データに基づくスポット・レートの推計値である。図中の点線はあらかじめ与えた真のスポット・レートを示している。

これらの図から読み取れることは、McCullochおよびVasicek & Fongで推計されたスポット・レートの形状は、これらの方法で初めに仮定するディスカウント・ファンクションの形状に大きく左右され、真のスポット・レートからかなりかけ離れた形状になるということである。それらに比べると、Houglletの結果は期間の短い部分を除いてはかなりフィットが良い。ただし、Houglletの場合は各バーテックス間でのフォワード・レートは一定という仮定をおいているため、バーテックスを境としてその前後の形状が極端に変化する傾向がある。

表6および表7は各推計方法に関する推計結果をまとめたものである。推計方法の良さを判断する基準としてよく用いられる尺度は、決定係数である。各推計結果の決定係数を見ると、それらの値が極めて高いことが分かる。もし、推計方法の良さを決定係数の高さという点からのみ判断するのであれば、どの推計値も申し分ないと言えるであろう。しかし、図で見ると推計結果は真のスポット・レートから大きく乖離している。たとえば、図4のVasicek & Fongの9年のスポット・レートの推計値を見ると、その値は真の値より2%ポイントも低い。これでも良い推計値と言えるであろうか。

以上の結果から言えることは、ディスカウント・ファンクションの決定係数のみで推計方法の良さを判断するのは、危険だということである。

また、推計結果を使って、過大評価、過小評価の銘柄を見つけようという試みもなされているが、スプラインによる近似はアド・

ホックな関数型を仮定することによって生み出される誤差の大きいことを示している。推定結果に基づく過大評価、過小評価は真の乖離ではなく、この誤差を反映している可能性が強い。

スプラインによる近似に比べ、直接スポット・レートを求める方法は、計算が大変であるということで敬遠されるきらいがあるが、価格が間違っていない限り、逐次代入方式で導かれるスポット・レートは真のスポット・

表4 スポット・レートが単調増加のケース

残存年	スポット・レート (%)	クーポン・レート (%)	価格
0.5	4.04	6.0	100.98
1.0	4.06	6.0	101.92
1.5	4.09	6.0	102.81
2.0	4.13	7.0	105.54
2.5	4.18	7.0	106.75
3.0	4.22	7.0	107.91
3.5	4.25	8.0	112.27
4.0	4.26	8.0	113.84
4.5	4.29	7.0	111.23
5.0	4.31	7.0	112.27
5.5	4.35	6.0	108.31
6.0	4.40	6.0	108.74
6.5	4.43	6.0	109.19
7.0	4.48	7.0	115.53
7.5	4.52	7.0	116.24
8.0	4.57	7.0	116.85
8.5	4.63	8.0	124.43
9.0	4.69	8.0	125.21
9.5	4.77	8.0	125.81

表5 スポット・レートが単調減少のケース

残存年	スポット・レート (%)	クーポン・レート (%)	価格
0.5	7.00	8.0	100.54
1.0	6.50	8.0	101.52
1.5	6.10	8.0	102.78
2.0	5.77	7.0	102.39
2.5	5.47	7.0	103.60
3.0	5.22	7.0	104.91
3.5	5.02	6.0	103.12
4.0	4.88	6.0	104.00
4.5	4.78	6.0	104.83
5.0	4.69	7.0	110.05
5.5	4.61	7.0	111.31
6.0	4.54	7.0	112.56
6.5	4.48	8.0	119.30
7.0	4.40	8.0	121.02
7.5	4.30	8.0	122.89
8.0	4.25	7.0	117.91
8.5	4.22	7.0	119.06
9.0	4.18	6.0	112.98
9.5	4.16	6.0	113.74

図3 スポット・レートが単調増加のケース

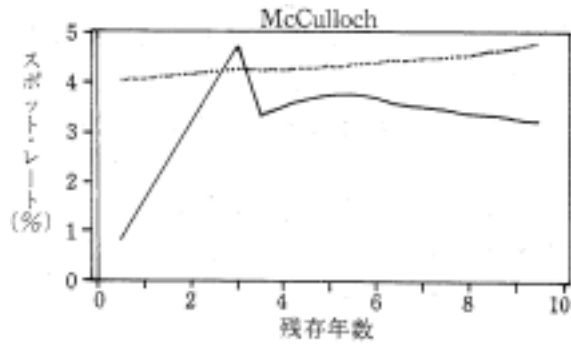
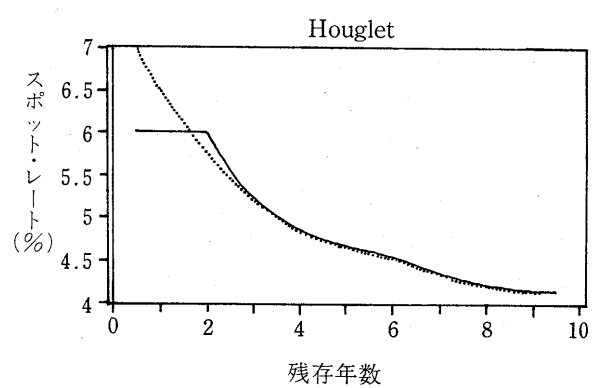
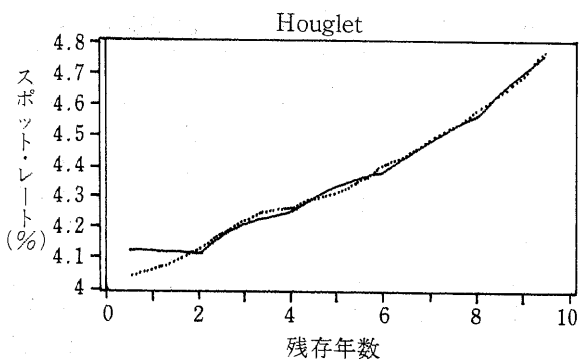
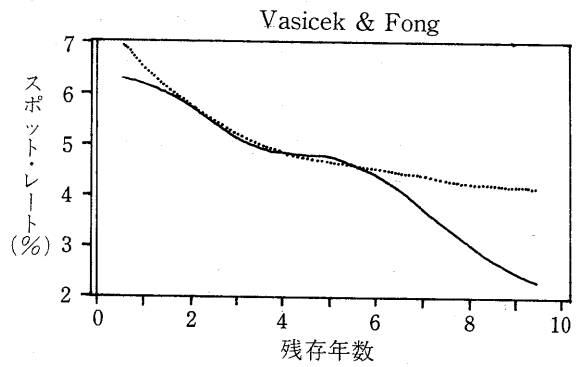
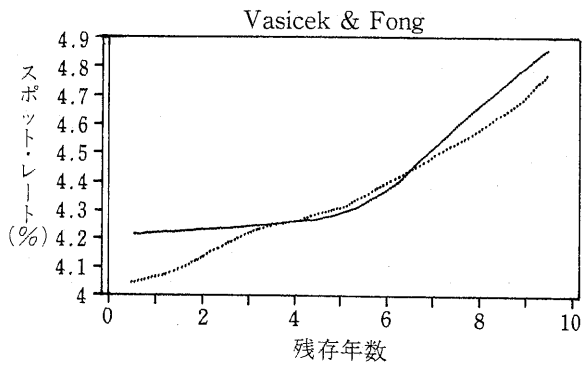
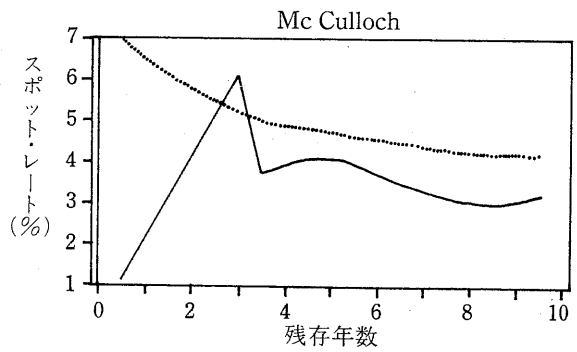


図4 スポット・レートが単調減少のケース



— 推計値
 真のスポット・レート

— 推計値
 真のスポット・レート

レートに一致する。この事実は計算の煩雑さと引き換えに軽視されてよい問題ではない。

ここでの結果をふまえて、次節では、わが国固有の指標銘柄および直利指向の存在が債

券価格に与える影響を、逐次代入方式によるスポット・レートの推計値に基づいて分析する。

表6 推計結果(単調増加のケース)

	McCulloch	Vasicek & Fong	Hougllet
決定係数	0.99300	0.99952	0.99999
係数1	-0.034 (-15.2)	0.041 (190.3)	0.923 (3567.8)
係数2	0.004 (2.5)	-0.019 (-2.9)	0.846 (3069.6)
係数3	0.008 (5.8)	-0.007 (-0.5)	0.773 (2776.8)
係数4	-0.021 (-1.5)	-0.305 (-2.5)	0.700 (2400.9)
係数5	- (-)	- (-)	0.625 (1247.4)

() 内は t 値

表7 推計結果(単調減少のケース)

	McCulloch	Vasicek & Fong	Hougllet
決定係数	0.96900	0.99684	0.99975
係数1	-0.044 (-11.4)	0.061 (61.8)	0.890 (1265.1)
係数2	0.009 (3.4)	0.504 (26.0)	0.827 (748.0)
係数3	0.016 (6.2)	-0.428 (-23.0)	0.765 (670.8)
係数4	-0.070 (-2.8)	1.336 (8.0)	0.717 (613.9)
係数5	- (-)	- (-)	0.667 (316.7)

() 内は t 値

．指標銘柄の効果と直利指向

1. 指標銘柄の効果

指標銘柄とは、その時々で最も取引が多く行なわれ、国債相場の指標性を有する銘柄と定義できる。このように集中して取引が行なわれる銘柄は、米国債には存在しないため、日本独特のものといえよう。指標銘柄は、比較的直近に発行された国債で、発行量の多い銘柄の中から、市場参加者により自然発生的に決められ、その時々为国債相場の「指標」となる。市場が自然発生的に決めるという点・では、この指標銘柄が決定されるプロセスは、同じく国債市場において指標性を有する債券先物の限月交替が決定されるプロセスに似ている。

指標銘柄は昭和59年のバンク・ディリング以降、国債の流通市場に発生したが、昭和61年頃から、周辺銘柄よりも最終利回りが低くなるいわゆる「利回り格差」の現象が始ま

り、昭和62年5月には、指標銘柄（89回債）の最終利回りが突出して低くなり、公定歩合の2.5%に迫るといふ異常とも思われる現象が起こった。従来、利回り格差の議論は、最終利回りを用いて行なわれてきたが、前述の通りクーポン効果の存在から、最終利回りでは厳密な意味での指標銘柄プレミアムを算出し比較することはできない。そこで、我々はスポット・レートを用いて理論価格を算出することにより、その価格付けの特殊性を分析することにした。なお、この昭和62年は、89回債最終利回りが引値ベースで5月13日に2.580%をつけた後、10月6日に6.250%まで上昇するという、ボラティリティーの高い、すなわち指標銘柄の特徴が強く出た年であったことから、この年をサンプル期間として指標銘柄の特殊性を分析することとする。

スポット・レートは定義から明らかなよう

に、残存期間が同じでクーポンの異なる2銘柄があれば求められる。スポット・レートが分かれば、この2銘柄と同じ残存期間を持つ2銘柄以外の銘柄の理論価格を求めることができる。幸いにして、89回債と残存期間が同じ銘柄が83、84、88回と存在するため、表8の通り、これら3銘柄を用いて89回債の理論価格を算出した。これを見ると、12ケ月中8ケ月について、実際の価格付けが割高に行なわれている。なお、割安に評価されている月においても、その割安の度合はきわめて小さい。これは、指標銘柄が、その残存期間に対応する通常のスポット・レートによっては割り引かれておらず、当該残存期間においては全く異なるスポット・レートにより割り引かれていることを意味する。この異なるスポット・レートの存在こそ、指標銘柄の特殊性を表わすものといえよう。

表8の例においては、89回債の市場価格が理論価格を越えている限り、83、84、88回債を用いて、裁定取引を行なうことが可能となる。

ここで、83回債と84回債を合成して、89回債の理論価格になるような銘柄を人為的につくり出すことが可能である。すなわち、83回債をx単位、84回債をy単位用いることにすると、

$$89\text{回債クーポン}5.1 = 6.1x + 6.0y$$

$$89\text{回債額面}100 = 100x + 100y$$

$x = -9$ 、 $y = 10$ が求められ、83回債を9単位空売りし、84回債を10単位購入することにより、89回債の理論価格となるような銘柄

を1単位購入したのと同じ効果を得ることができる。ここで、同時に89回債を空売りすれば、実際の市場価格116円88銭と理論価格111円87銭の差5円1銭が、裁定利益として得られることになる。

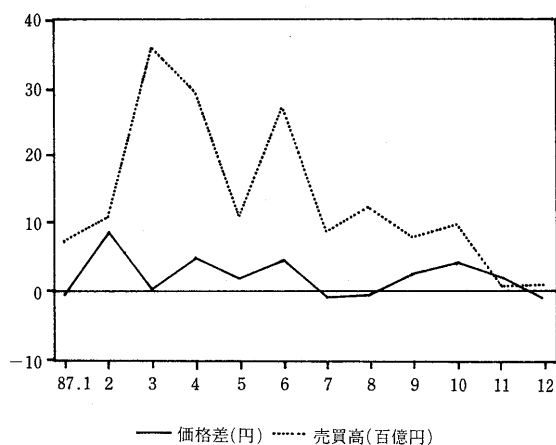
平成元年5月31日から証券会社と銀行の商品勘定の貸借取引と空売りが解禁されたため、スポット・レート並びにディスカウント・ファクターから理論価格を算出して、このような裁定取引が行なわれる可能性も十分考えられよう。

指標銘柄は、最終利回りだけで見れば、償還期日まで持ちきった場合、周辺銘柄よりもリターンは小さい。それにも関わらず、昭和62年に盛んに売買されたのは、プラザ合意以降の円高に伴う一貫した金融緩和の流れの中で、インカム・ゲインの妙味が小さくなる一方、金利低下期待がキャピタル・ゲイン獲得の機会を提供し続けたことが原因といえよう。当然、指標銘柄という取引対象が市場により公然と設定されることにより、その流動性がある程度保証されるわけで、それ自体がまた投資家を引きつける結果となっている（注4）。ちなみに、図5は指標銘柄の東京証券取引所における売買高と、表8で得られた価格差を示したものである。売買高と価格差の間には、若干の正の相関が観察される。しかしながら、指標銘柄自体も、金融緩和期に発生したものであることから、高金利期にも割高な価格形成が行なわれるのか、あるいは指標銘柄自体発生しうるのか等の疑問は残ろう。また、債券貸借取引が解禁されたため、指標銘柄以外

表8 指標銘柄の市場価格と理論価格

		87／1／31	87／2／28	87／3／31	87／4／30	87／5／30
89回債市場価格(利込み)		102.00	103.73	107.92	116.89	115.62
89回債理論価格		102.43	95.12	107.64	111.88	113.73
価格差		-0.43	8.61	0.28	5.01	1.89
87／6／30	87／7／31	87／8／31	87／9／30	87／10／31	87／11／30	87／12／28
108.40	101.87	105.27	97.78	105.25	102.56	101.48
103.91	102.73	105.79	95.24	101.37	100.56	102.72
4.49	-0.86	-0.52	2.54	3.88	2.00	-1.24

図5 指標銘柄の流動性と価格差



の銘柄の流動性が高まり、指標銘柄の価格形成の特殊性に変化が起こることも考えられよう。

2. 直利指向仮説の実証

わが国証券市場の特徴の1つである直利指向とは、期間収益を重視する投資家の間では、償還差益よりもクーポン収益が好まれるため、高クーポン債の人気の高いというものである。直利の定義はクーポンを価格で割ったものなので、その意味からすれば、市場で通常、直利指向と言われている現象は高クーポン指向と呼ばれるべきものであろう。

この高クーポン指向に関しては、黒田(1982)および小峰(1985)がそれぞれ1977年から1980年、1982年から1985年のデータに基づいて分析している。黒田は最終利回りを用いているという点で問題はあるが、両者とも高クーポン指向の存在を指摘している。

今回、実証の対象とした期間は、1986年6月から1988年6月である。実証方法は、小峰と同じ方法を採用した。方法の手続きは、まず、償還日が等しく、クーポンの違う債券を対象として、一方の債券のクーポンより低い(あるいは高い)債券だけを用いてスポット・レートを導く。次に、クーポンの高い(低い)債券と等しいキャッシュ・フローを発生する債券について、先に導いたスポット・レートを使って理論価格を導く。この理論価格とクーポンの高い(低い)債券の市場価格とを比較する。その結果、もし、市場価格の方が高(低)ければ、高クーポン債の方が相対的に好まれているということになる。

この方法の意味は、現実にある債券を使って高(低)クーポン債と同じキャッシュ・フローを作ることが可能だということである。そのようにして作られた債券の理論価格と同じキャッシュ・フローの債券の市場価格の間に差があるとすれば、裁定の機会があるにもかかわらず、市場はそれを放置しているとい

(注4) 金融機関の売却制限や決済期日等の諸規制の動向が、多少なりとも流動性に影響を及ぼしていると思われる。

・金融機関の売却制限緩和について

昭和52年4月 引受から1年経過の後、売却可。

昭和56年4月 引受から三ヶ月経過の後、売却可。

昭和58年4月 公共債の窓口販売開始。

昭和59年6月 ディーリング業務開始。

昭和60年6月 フル・ディーリング業務開始。

商品勘定について、引受から一ヶ月経過の後、売却可。

昭和61年4月 商品勘定については、引受の翌月から売却可。

投資勘定については、引受から一ヶ月経過の後、売却可。

昭和62年9月 商品勘定については、売却制限を徹底。

投資勘定については、引受の翌月から売却可。

・決済期日の変更について

昭和62年8月 毎月10日・20日・月末から、毎月5日・10日・15日・20日・25日・月末へ変更。

うことになる。その不合理性の原因として考えられるのが高クーポン指向というわけである。

表9が分析の結果である。1列目は価格の観測時点である。2列目は対象とする債券の償還月である。3列目のC1は推計値を求めるのに使った債券のクーポン・レート、4列目のC2は比較の対象とした債券のクーポン・レートである。P*は推計された価格で、Pは実際の市場価格である。7列目は推計価格と市場価格の差を示している。この値をみると、直利指向の存在を示唆する方向に乖離していたのは11ケース中わずかに3ケースのみである。その乖離の程度も1ケースを除いては±4ペーシス・ポイントの範囲内で、この期間に関しては直利指向はほとんど無いといえる。表10は1980年代前半を対象とした小峰（1985）の結果である。1980年代前半の結果と比較しても、明らかに市場が変化しているということが読み取れる。

この原因は、今回分析の対象とした期間が低金利期であるということに大きく依存しているように思われる。その理由としては以下の2点が考えられる。低金利期には高クーポン債のオーバー・パーの傾向が強くなるため、償還差損が嫌われる。もう1点は、低金利期

にはインカム・ゲインに対し、キャピタル・ゲインが相対的に重視される、ということである。このことは、低金利期においては、相対的に価格のボラティリティが高い低クーポン債が好まれるということであり、残存期間が長く比較的クーポンの低い指標銘柄を中心としたディーリング取引が盛んになることによっても裏付けられよう。一方、高金利期においては、逆にインカム・ゲインが相対的に重視される。

我々が分析の対象とした期間に関しては、低金利期であったということが直利指向の是正に大きく寄与したものと考えられるが、最近の市場には、これ以外にも直利指向の是正を促すと思われる要因がある。まず第1は、総合収益を重視する投資家が増えたということである。第2は、経理基準の変更に伴って、償還損益を業務損益に計上しなければならなくなるということである。経理基準の変更および総合収益の重視という傾向は金利水準のいかに左右される要因ではないので、これを境に、わが国固有の直利指向が消滅する可能性もある。しかし、完全になくなるかどうかの判定は、高クーポン指向の生じやすい高金利期の到来まで待たねばなるまい。

表9 直利指向仮説の検証(低金利期)

観測時点	償還月	C1	C2	P*	P	P*-P	直利指向
61.6	62.5	8×2	7.4	103.08	103.04	0.04	*
61.6	62.8	8×2+7.2	6.9	104.74	104.74	0.00	
61.12	62.5	7.4	8.0	102.18	102.18	0.00	
62.6	62.8	6.9	7.2	103.04	103.03	0.01	
62.6	64.8	6.1×2+6.6+6.9+7.2	7.7	110.87	110.85	0.02	
62.6	65.2	6.1×2+6.6+6.9+7.2+7.7	8.0	113.43	113.41	0.02	*
62.12	64.8	6.1×2+6.6+7.2	7.7	108.63	108.73	-0.10	
62.12	65.2	6.1×2+6.6+7.2+7.7	8.0	111.14	111.14	0.00	
63.6	64.2	6.1×2	6.5	104.03	104.02	0.01	
63.6	64.8	6.1×2+7.2	7.7	106.70	106.66	0.04	
63.6	65.2	6.1×2+7.2+7.7	8.0	108.89	108.89	-0.04	*

* 直利指向仮説を支持する。

表10 直利指向仮説の検証(高金利期)

観測時点	償還月	C1	C2	P*	P	P*-P	直利指向
昭和60年5月	62年2月	8×4	7.4	103.932	103.580	.352	*
60年5月	62年5月	8×4	7.4	102.410	102.100	.310	*
60年5月	62年8月	8×4+7.2	6.9	102.736	102.695	.041	*
60年2月	62年2月	8×4	7.4	101.550	101.510	.40	*
60年2月	62年5月	8×5	7.4	103.565	103.450	.115	*
60年2月	62年8月	8×4+7.2	6.9	100.310	100.310		
59年11月	62年2月	8×5	7.4	104.210	104.310	-.100	
59年11月	62年5月	8×5	7.4	102.661	102.720	-0.59	
59年11月	62年8月	8×5+7.2	6.9	103.259	103.185	.074	*
59年8月	62年2月	8×5	7.4	101.896	101.280	.616	*
59年8月	62年5月	8×6	7.4	103.893	103.360	.533	*
59年8月	62年8月	8×5+7.2	6.9	100.156	100.070	.086	*
59年5月	62年2月	7.75+8×5	7.4	102.873	103.090	-.217	
59年5月	62年5月	8×6	7.4	101.110	100.510	.600	*
59年5月	62年8月	7.75+8×5+7.2	6.9	100.728	100.495	.233	*
59年2月	62年2月	7.75+8×5	7.4	101.968	101.690	.278	*
59年2月	62年5月	7.75+8×6	7.4	103.949	103.620	.329	*
59年2月	62年8月	7.75+8×5+7.2	6.9	100.136	100.140	-.004	
58年11月	62年2月	7.75×2+8×5	7.4	103.514	102.640	.874	*
58年11月	62年5月	7.75+8×6	7.4	101.757	101.110	.647	*
58年8月	62年2月	7.75×2+8×5	7.4	100.469	99.610	.859	*
58年8月	62年8月	7.75×2+8×5+7.2	6.9	97.783	97.330	.453	*
58年5月	58年8月	6.5	7.0	101.851	101.850	.001	
58年2月	58年8月	6.5	7.0	100.072	100.050	.022	
57年11月	58年8月	6.5×2	7.0	101.287	101.300	-.013	*
57年8月	58年8月	6.5×2	7.0	99.192	99.180	.012	
57年5月	58年8月	6.5×3	7.0	100.715	101.190	-.475	*
57年2月	58年8月	6.5×3	7.0	99.619	99.660	-.041	*

* 直利指向仮説を支持する。

出所：小峰みどり（1985）

V. 計 測

第 節でMcCulloch, Vasicek&Fong, Carleton&Cooper及びHougletによるスポット・レートの推計方法を簡単に紹介した。ここでは以上の4つの推計方法に逐次代入方式という最も基本的な推計方法を加えた5つの方法を用いて、わが国の債券市場を対象に実際に推計を行い、その結果を比較検討する。

その前にいくつか整理しておく。まず、データとしては、スポット・レートの性格から割引債を用いることが望ましいと思われるが、わが国の割引国債は発行規模が小さく、また、割引金融債や政府短期証券では期間1年以下であり、いずれもデータとしての利用は難しい。そこで、債務不履行リスクが実質

的に無視でき、発行額、現存額ともに非常に大きく債券市場の中心を占めている長期利付国債を対象とすることとした。長期利付国債は、昭和47年度から期間10年ものが原則として毎月発行されており、豊富なデータを提供してくれる。実際の債券市場にはさまざまな債券が存在し、それぞれ税や取引コスト、市場での流動性が異なるが、ここではこれらの影響は考慮に入れていない。推計は昭和61年12月28日、62年6月30日、62年12月28日、63年6月30日の4時点で行った。また、債券価格は経過利息も考慮した利込み値を採用した。4時点において5つの推計方法を用いて、スポット・レート推計した結果が図6(巻末)であり、表11(巻末)は各々の手法による推計値の当てはまり具合を示している。

1. 逐次代入方式

逐次代入方式で推計する際には、ディスカウントの期間が同じ(＝利払い月が同じ)で満期日が6ヶ月間隔の銘柄を一つずつ連続するように選ぶ必要がある。しかし、実際には長期利付国債は昭和57年以前は2・8月利払いと5・11月利払いのものが発行されていたが、それ以降は1・7月利払いと6・12月利払いのものが中心となっている。このため、全期間のスポット・レートを推計するためには、利払い月の異なるものを接続させる必要があり、この場合、利払い月の近いものを組み合わせることが望ましいと思われる。その組合せとしては2・8月と1・7月、5・11月と6・12月の利払い月のものが考えられる。しかし、推計時点における指標銘柄89回債、105回債はいずれも6・12月利払いであり、指標銘柄による影響を避けるため、2・8月

と1・7月の利払いのものを採用した。

推計されたスポット・レートと複利利回りを比較すると、両者のカーブの形状は似通っており、節で説明したクーポン効果から示唆される関係に一致する(注5)。そもそもスポット・レートは、債券価格を通じて複利利回りの形成に関わっているものであることを考えると、スポット・レートが複利利回りから大きく乖離せず、形状が似通っていることが理想的であるといえる。またこの方法は、スプラインで近似する方法に比べて簡便であり、データが持つ情報を歪めることが少ないという利点もある。しかし、利用できるデータの個数が制限され、かなりの数の情報が棄却されるという問題はある。

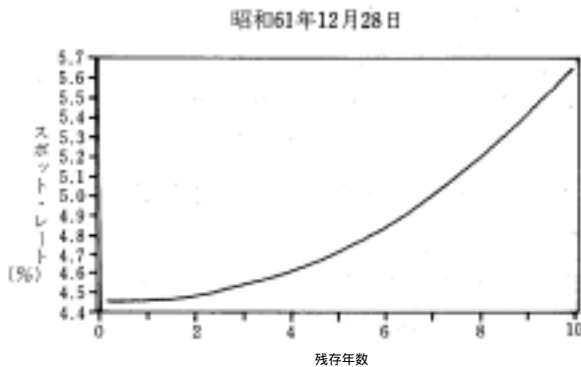
このようにして推計されたスポット・レートは、あくまでデータの存在する部分だけの離散的な数値であり、任意の時点におけるスポット・レートは得られない。しかし実際には数多くの債券があり、さまざまな時点でのスポット・レートが存在する。この問題に対しては、以下のようにスポット・レート(R_t)を t (残存年数)の関数と仮定して回帰させるという方法で、離散的なスポット・レートを期間に関する連続関数に変換することが考えられる。

$$R_t = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t$$

この α 、 β 、 γ を推計することによって、あらゆる時点のスポット・レートを求めることができるようになる。図7に示したのが、昭和61年12月28日の1時点に関してこれを行った結果である。ここではこの期のスポット・レートの形状に三次関数がもっとも近いと判断しこれを使ったが、さらに高次の関数等を使うことも考えられる(注6)。

(注5) 債券の価格付けが市場で正しく行われている状況においては、スポット・レート曲線が単調な右上がりの場合、上からスポット・レート曲線、ロー・クーポン債の複利利回り曲線、ハイ・クーポン債の複利利回り曲線という順になり、スポット・レート曲線が単調な右下がりの場合には、逆の順序になる。また水平な場合は、三つの曲線が一致するという理論的關係がある。これは複利利回り計算上の数学的な理由から生じる問題であるため、直利指向のない状況でもおこり、これが「クーポン効果」と呼ばれるものである。

図7 逐次代入方式によるスポット・レート



2. Carleton & Cooperによる推計方法

この方法も逐次代入方式と同様にスプラインを仮定せず、直接ディスカウント・ファクターを推計しようとするものである。ここでは2・8月利払いの国債と1・7月利払いの国債について、それぞれ別々に最小2乗法(OLS)で回帰した。この方法では逐次代入方式とは異なり、同一利払い月のものであればたとえ満期日が同一であっても、データのほとんどが利用できるというメリットがある。ただし、Carleton & Cooper(1976)で提案されているこの方法は、逐次代入方式と同様に、離散的なディスカウント・ファクターを求めるにとどまっている。そこで、我々は任意の時点におけるスポット・レートを求めるため、逐次代入方式と同様に、次のような三次関数を仮定して連続型に変換させることにした。

$$d_t = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$$

ただし $\delta = 1$ ($t = 0$ のときディスカウント・ファクターは1となるため)

ここでは、スポット・レートを回帰するより、単調減少性を持つディスカウント・ファクターを回帰するほうがフィットが良いことから、これを用いている。推計したスポット

・レート曲線をみると、複利利回り曲線にかなり近い形状をしていることがわかる。このCarleton & Cooperによる方法は、直接ディスカウント・ファクターを求めるため、データの加工を必要とせず、恐意性が入り込みにくいという点で評価できる。試みとして、加重最小2乗法(WLS)を行ってみたが、大きな改善は見られなかった^(注7)。

3. McCullochによる推計方法

この方法は先にあげた二つの推計方法とは異なり、全期間をいくつかの区間に分割して、ディスカウント・ファクターをある形状の多項式スプラインで近似させるものである。この推計方法では、全ての国債をデータとして利用できるが、ここでは他の方法と条件を統一させるため、2・8月と1・7月の利払いのものだけを用いている(後の二つの推計方法についても同様)。McCullochはデータの個数の平方根に最も近い整数値に区間を分割し、それぞれの区間でスプラインを仮定している。ここでもこれに従い、各区間が等しい幅になるようにデータの最長残存年を分割し(計算の結果4時点とも分割数は5となった)、区分的三次多項式を用いて最小2乗法で推計した。推計したスポット・レート曲線の形状をみると、上の二つの推計方法とは異なり、複利利回り曲線の形状とかけはなれており、また4時点におけるスポット・レート・カーブがほとんど同じ形状を示すことがわかる。また図には示していないが、このスポット・レート・カーブからフォワード・レートを導出すると、かなり上下に大きく振れ、現実性を欠いた数値になる。これは、各区間でうまくディスカウント・ファクターにスプラインを近似させても、それが全区間ではフォワード・レートを十分に説明できてい

(注6) 二次関数との比較では、三次関数のほうがフィットが優れていた。

(注7) ここでの加重最小2乗法のウェイトは、Vasicek & Fongによって提案されている $(dP/dy)^2$ (P:利込み値, y:複利利回り)を用いている。

以下の各推計方法で行っている加重最小2乗法のウェイトも同様である。

ないことを意味する。さらに残差平方和をみると、4つの推計方法の中で最も悪い値を示す。このような平均化されたディスカウント・ファクターに誤差があると、限界的なフォワード・レートには、さらに大きな誤差が生じることになる。McCulloch自身は最小2乗法で回帰することを提案しているが、ここでも誤差項を調整することを目的に、Carleton & Cooperで行ったのと同様の加重最小2乗法を実験的に使ってみた。その結果は、形状がさらに悪くなり残差平方和も大きくなる、というあまり芳しくないものとなった。

4. Vasicek & Fongによる推計方法

McCullochが区分的多項式でディスカウント・ファクターを近似させるのに対し、この方法は指数関数で近似させようとするものである。推計を行う際問題となるのは、Vasicek & Fongはその論文のなかで推計方法の全てを明らかにしていないことである。つまり、推計に用いるべきスプラインを決定する必要があるが、その基底が明確にされていない。これについて、Sheaは独自の解釈を加え実際に推計を行っている。ここでは、Sheaが薦めているB - スプライン（補論参照）を用いることにした。そしてMcCullochと同様に、節点（knot）の数を5として、加重最小2乗法により推計している。残差はまずまずではあるが、複利利回りと大きくかけ離れる部分では、スプラインを仮定することによる誤差が大きく出ていると思われる。各推計時点のスポット・レートの曲線の形状が似通っているという、McCullochによる推計方法と共通の問題がある。また、最小2乗法を適用しても、結果にはほとんど変化がなかった。

5. Hougletによる推計方法

この推計方法で問題となるのは、区間の分割方法である。Hougletは最長期間30年というような長期債券と短期債券をデータとして

用いており、相対的にみて最近期に情報が集中することから情報の均等化を目的に、現時点に近いほど区間が短く、遠いほど区間が長くなるように分けている。しかし、我々は10年の国債のみを用いており、データの分散も均一であることから、等間隔に分割した。分割数は、McCullochによる推計方法で行ったものと同じものを使った（4時点とも10年を5で除した2年で区切っている）。また、Hougletは債券間のデフォルト・リスクの違いや直利効果を調整するために、『証券特性ベクトル』というものを使っているが、我々は最小2乗法と加重最小2乗法を用いて推計を行った。先述したとおり、Hougletは、パーテックスを境に隣接するフォワード・レートが近い値になるようスムージングすることを提案しているが、実際にスムージングのあるケースとないケースの両方行ったところ、その効果は全くみられなかった。図6にはスムージングを行わずに加重最小2乗法で推計したものを示しているが、結果をみると複利利回り曲線の形状に近いものとなっており、残差平方和についてもまずまずの値を示している。しかし、この方法は各パーテックス間のフォワード・レートを一定と仮定するため、ここではフォワード・レートが2年間変化しないことになり、理論の説明力に疑問が生じる（Houglet自身の推計でも四半期間同一である）。

以上5つの方法に基づく推計結果を紹介したが、全体的にみて、スプラインを仮定する方法は利用できるデータの範囲は広いが、マーケットの情報を平均化してしまうという共通の欠点があるといえる。そのため、同じ方法で推計されたスポット・レートは、どの時点においても数値、形状ともに非常に似通ったものになっている。これに対し、直接ディスカウント・ファクターを求める逐次代入方式、Carleton & Cooperの推計方法では、各期で異なる形状を示し、複利利回りとの関係においてもかなり理想的なものとなってい

る。また、スポット・レートから導かれるフォワード・レートについてもかなり安定的である。

そもそもスポット・レート概念は海外で生まれたものであり、独自性の強い日本の債券市場を対象にする場合には、データの利用

方法や推計方法に相当な工夫を要するものと思われる。複数の異なる種類の債券に調整を加えてデータとして利用することや、また加重最小2乗法のウエイト付けの方法を変えたり、最尤法を使ったりすること等によって、推計結果がかなり変わってこよう。

VI．おわりに

我々の分析結果は、金利の期間構造を推計するに当たって考慮すべき問題点を2つ指摘している。1つはわが国固有の要因に基づくものであり、もう1つは推計方法に関するものである。

第1の点に関しては、期間構造を推計する場合、対象とする債券は満期までの期間の長さという点を除いて同質でなければならないが、わが国債券市場には、この条件を阻害すると思われる要因がいくつか見られる。そのうちで、もっとも影響が大きいと思われる要因は、指標銘柄に対する集中取引である。節の指標銘柄の分析結果は、指標銘柄が明らかに割高になっており、銘柄間の裁定が十分に働いていないことを示している。このことは、市場が指標銘柄に関しては、他の銘柄に対するのとは異なる評価基準を持っている、つまり、価格形成に際して他の銘柄に用いるのとは別の割引率すなわちスポット・レートをを用いているということに他ならない。

もう1つの重要な現象は、直利指向である。いわゆる直利指向とは高クーポン債が相対的に好まれるという現象である。直利指向が存在するということは、投資家の用いる割引率が、高クーポン債と低クーポン債で異なるということである。幸い、われわれが対象とした低金利期の分析では、直利指向はほとんどないとの結果が得られた。したがって、この期間に関しては、直利指向の影響を考慮する必要はあまりないといえよう。しかし、高金

利期を対象とした分析結果は、直利指向の存在を示唆しているもので、そのような期間を対象とする場合には、クーポンの大きさにより銘柄を分けて分析する等の工夫が必要である。

これらの事実は、わが国の長期国債の金利構造は、1本のスポット・レート曲線ではなく、複数の曲線群で構成されていることを示唆するものである。しかしながら、最近の債券市場に見られる貸借取引と空売りの解禁、金融機関における経理基準の変更といった措置、および、総合収益を重視する投資家の台頭といった現象は、わが国債券市場の構造を変え、価格形成の歪みのある程度是正するものと期待される。

期間構造推計の第2の問題点は、推計方法に関するものである。節で紹介したように最も一般的な推計方法は、ディスカウント・ファンクションにあらかじめ関数型を当てはめ、スポット・レート曲線を推計するものである。この方法は関数型さえ決めれば、スポット・レートを簡単に推計できるため、よく使われるが、節の分析結果が示すように、関数型としてどのような関数を仮定するかによって、計測結果が大きく左右されるという欠点を持つ。また、初めから1本の関数型に集約させることによって、第1の問題点で指摘したような、わが国固有の要因を見失わせるという危険性を持つ。

ディスカウント・ファンクションに関数を当てはめる場合のもう1つの問題点は、ス

ポット・レートの評価がディスカウント・ファンクションの決定係数に基づいていることである。節の結果が示すように、どのような関数を当てはめても、ほとんどのケースで決定係数の値は非常に高い。それにもかかわらず、そこから導かれるスポット・レート関数の形状は、どのような関数を仮定したかに依存し、それぞれ異なる。

また、スポット・レートの形状は、期間によって、かなりばらつきがあると予想されるので、どの期に関しても同じ関数型がよいとは事前的に言えない。

これらの理由から、われわれは事前に関数型を仮定せずに、スポット・レートを直接推計することを試みた。逐次代入方式による推計がそれである。図6に示したように、その結果は節のクーポン効果のところで説明した、複利利回りとスポット・レートの理論的な関係から予想される結果と一致するものであった。

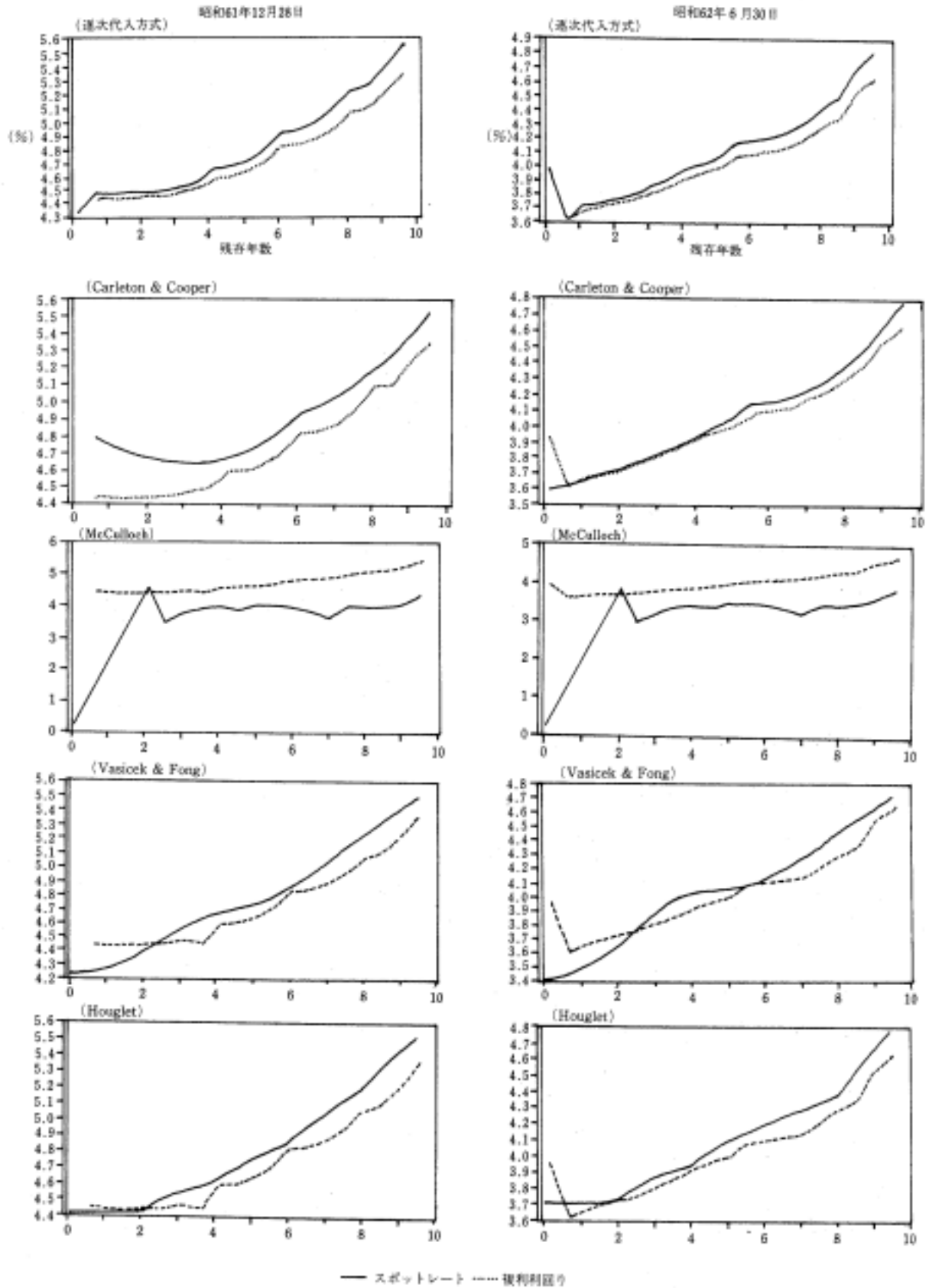
この方法の問題点として指摘されることの1つに、スポット・レートが離散的にしか計測できないという問題がある。われわれは、推計されたスポット・レートに連続な関数を当てはめることにより、任意時点のスポット・レートを得た。この方法の方が、ディスカウント・ファンクションにスプラインを仮定する方法に比べ緩やかな仮定に基づいており、それだけ悪意性の少ない推計が可能である。もう1つの問題点として指摘されることは、償還の近い債券の価格が誤差を含んでいる場合には、その誤差の効果が期間の長いスポット・レートにまで反映されるというものである。

これは、初めから市場価格には誤差が含まれるとする考え方であるが、たとえ含まれるにせよそれは識別不可能なものである。もし、それをスプラインによる推計から識別可能と考えるのであれば、それは誤解である。スポット・レートとは、割引債の利回りに他ならない。市場価格が誤差を含んでいる可能性を考えるのであれば、割引債から導かれるスポット・レートも間違っているということになるであろう。われわれは同じ期に支払われるキャッシュ・イン・フローは同一のレートで割り引かれ、市場価格は均衡価格であるとみなした。これは裁定の機会がないということと等しく、割安、割高といった銘柄がないということの意味する。

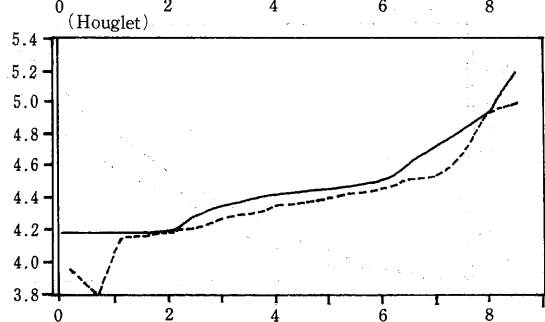
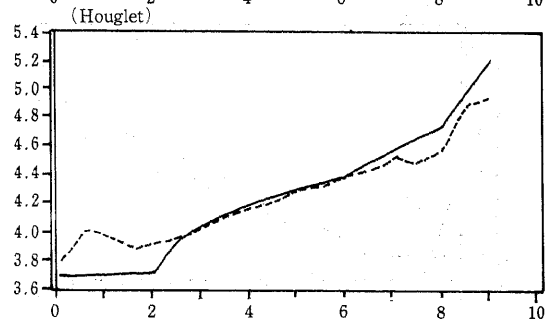
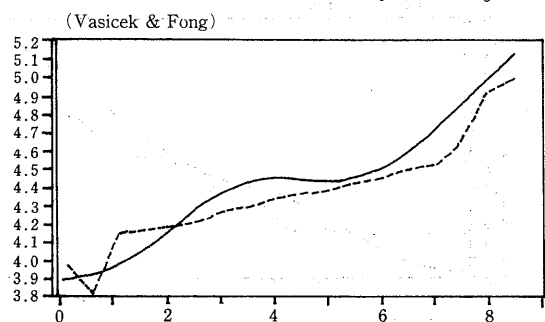
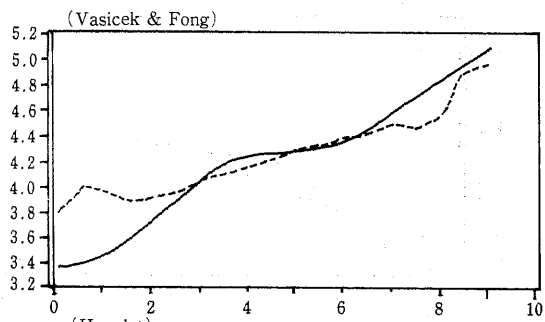
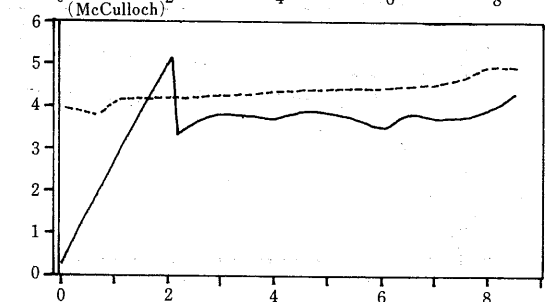
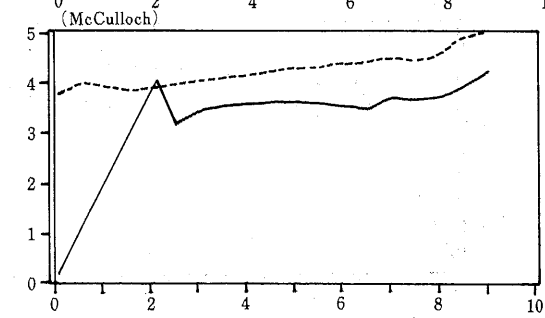
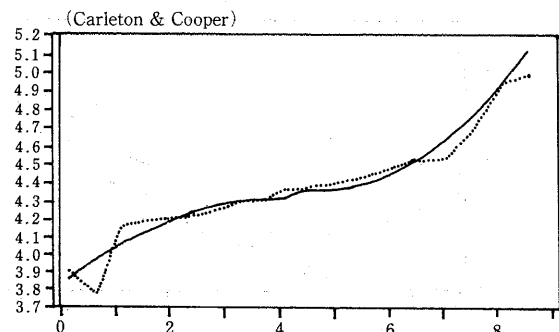
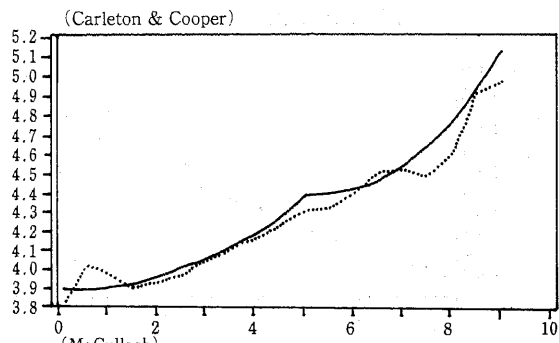
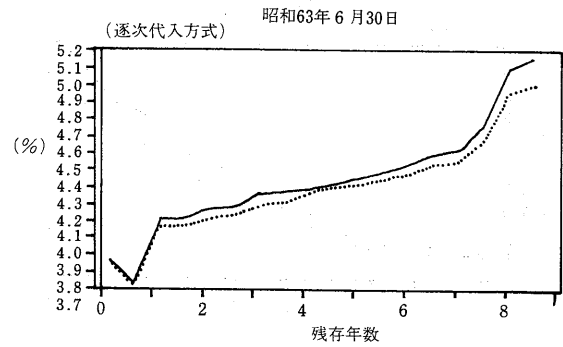
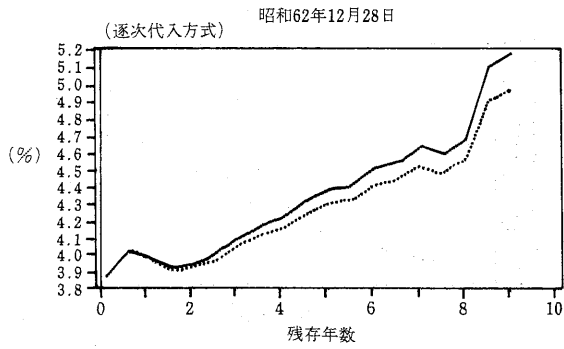
なお、ここでは、指標銘柄を含めずに推計したが、この方法によれば、たとえ指標銘柄を含めても指標銘柄の満期より短い期間のスポット・レートはその影響を受けずに推計される。

債券市場は新しい局面を迎えつつあると言われている。1987年に1京円に近づくまで、債券の売買高はほぼ一本調子で伸びてきたが、ここにきて伸び悩みが見られる。その原因としては、国債発行量の減少と、金融機関が売買高のみを目的とした売買高競争に慎重になってきたことが挙げられる。債券投資は量から質への時代へ、そして多様化の時代へと移行しつつあるように思われる。今後、新しい投資手法を摸索する上で、スポット・レートに基づく正確な金利の把握がますます重要になってくるであろう。

図6 わが国債券市場の期間構造



「わが国債券市場固有の現象と期間構造分析」



— スポットレート 複利利回り

表11 推計結果

(1) Carleton & Cooper Model : $P = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$

61. 12. 28

a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	a 6	a 7	a 8	a 9	a 10	a 11	a 12	a 13	a 14	a 15	a 16	a 17	a 18	a 19	a 20	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
1.121	0.969	0.947	0.926	0.905	0.885	0.865	0.845	0.825	0.805	0.784	0.766	0.744	0.724	0.703	0.682	0.661	0.639	0.617	0.593	0.999	3.4416
(0.44)	(11.22)	(12.10)	(13.18)	(12.91)	(11.07)	(10.68)	(10.02)	(11.06)	(10.95)	(11.51)	(0.28)	(7.32)	(7.63)	(7.68)	(7.94)	(8.09)	(8.74)	(9.12)	(9.70)		

() 内は t 値

62. 6. 30

a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	a 6	a 7	a 8	a 9	a 10	a 11	a 12	a 13	a 14	a 15	a 16	a 17	a 18	a 19	a 20	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
0.995	0.977	0.959	0.941	0.923	0.905	0.887	0.869	0.850	0.831	0.816	0.796	0.779	0.762	0.744	0.725	0.705	0.684	0.661	0.636	0.999	0.8210
(482.0)	(334.1)	(327.0)	(453.7)	(445.3)	(439.0)	(305.5)	(420.6)	(291.8)	(285.2)	(0.56)	(17.02)	(17.83)	(18.10)	(18.79)	(19.27)	(20.96)	(21.97)	(23.51)	(26.68)		

62. 12. 28

a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	a 6	a 7	a 8	a 9	a 10	a 11	a 12	a 13	a 14	a 15	a 16	a 17	a 18	a 19	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
0.994	0.975	0.956	0.937	0.919	0.900	0.881	0.861	0.841	0.824	0.802	0.785	0.766	0.748	0.728	0.706	0.683	0.658	0.632	0.998	3.1848
(162.7)	(159.1)	(220.6)	(217.1)	(213.2)	(148.4)	(203.8)	(141.5)	(138.1)	(0.30)	(8.02)	(8.40)	(8.51)	(8.84)	(8.98)	(9.82)	(10.25)	(10.94)	(12.41)		

63. 6. 30

a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	a 6	a 7	a 8	a 9	a 10	a 11	a 12	a 13	a 14	a 15	a 16	a 17	a 18	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
0.994	0.974	0.954	0.934	0.914	0.894	0.874	0.855	0.840	0.821	0.803	0.785	0.766	0.745	0.724	0.700	0.675	0.647	0.998	1.4777
(238.4)	(330.3)	(324.7)	(318.2)	(221.3)	(304.5)	(211.1)	(206.1)	(0.47)	(12.33)	(12.90)	(13.09)	(13.61)	(13.91)	(15.12)	(15.79)	(16.87)	(19.08)		

(2) McCulloch Model ($k_1=0$) : $d(t) = 1 + a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + a_3 f_3(t) + a_4 f_4(t) + a_5 f_5(t)$

61. 12. 28

k=5

	a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和		1	0.0000
	-0.048	0.006	0.008	0.002	-0.044	0.996	23.16		2	2.3918
	(-16.68)	(2.84)	(6.54)	(1.19)	(-2.57)				3	4.7835
W*	-0.057	0.011	0.010	0.001	-0.040	0.752	33.55		4	7.1753
	(-10.87)	(2.87)	(2.32)	(-0.05)	(-0.53)				5	9.5670

*Wは加重した推計結果。() 内は t 値

62. 6. 30

k=5

	a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和		1	0.0000
	-0.040	0.004	0.006	0.003	-0.049	0.997	16.02		2	2.3898
	(-18.36)	(2.62)	(6.10)	(2.07)	(-3.49)				3	4.7795
W	-0.048	0.009	0.007	0.001	-0.046	0.188	23.76		4	7.1693
	(-7.18)	(1.67)	(1.25)	(0.093)	(-0.42)				5	9.5590

62. 12. 28

k = 5

	a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和		1	0.0000
	-0.043	0.003	0.006	0.002	-0.051	0.997	15.35		2	2.2658
	(-17.60)	(1.79)	(4.59)	(1.03)	(-3.17)				3	4.5315
W	-0.048	0.007	0.007	0.001	-0.047	0.825	18.23		4	6.7973
	(-9.42)	(1.48)	(1.37)	(-0.08)	(-0.57)				5	9.0630

63. 6. 30

k = 5

	a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和		1	0.0000
	-0.058	0.009	0.010	0.001	-0.067	0.996	16.21		2	2.1398
	(-15.11)	(3.80)	(7.02)	(0.60)	(-3.54)				3	4.2795
W	-0.070	0.017	0.013	0.002	-0.069	0.493	24.13		4	6.4193
	(-9.80)	(3.25)	(2.33)	(-0.16)	(-0.68)				5	8.5590

(3) Vasicek & Fong Model : $d(X) = 1 - X_t + a_2 M_1(X) + a_3 M_2(X) + a_4 M_3(X)$
 (B-スプライン使用) $X = 1 - e^{-a_1 t}$

61. 12. 28

	a 1	a 2	a 3	a 4	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
	0.04279	-0.10245	-0.02992	-0.29672	0.999	0.6341
	(85.95)	(-3.50)	(-1.30)	(-7.94)		
W*	0.04145	-0.19388	0.07123	-0.34681	0.999	0.7587
	(50.53)	(-4.08)	(2.12)	(-6.91)		

*Wは加重した推計結果。() 内は t 値

62. 6. 30

	a 1	a 2	a 3	a 4	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
	0.03521	-0.22575	0.11471	-0.38946	0.997	2.1419
	(43.64)	(-3.740)	(2.35)	(-4.81)		
W	0.03353	-0.37595	0.28143	-0.47633	0.994	2.3773
	(17.84)	(-2.67)	(3.03)	(-4.38)		

62. 12. 28

	a 1	a 2	a 3	a 4	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
	0.03499	-0.40291	0.31889	-0.63883	0.987	8.1821
	(40.55)	(-7.22)	(5.98)	(-0.57)		
W	0.03313	-0.56390	0.47522	-0.71748	0.987	8.4989
	(13.35)	(-2.87)	(3.72)	(-3.73)		

63. 6. 30

	a 1	a 2	a 3	a 4	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
	0.03965	-0.21908	0.25558	-0.64877	0.997	1.4091
	(55.97)	(-4.65)	(6.03)	(-8.49)		
W	0.03830	-0.32600	0.38315	-0.72614	0.996	1.5680
	(24.89)	(-3.31)	(5.44)	(-7.49)		

(4) Houglet Model : $P = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5$

61. 12. 28

	a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
	0.917	0.836	0.753	0.668	0.579	0.999	0.5811
	(1577.9)	(1205.1)	(1023.2)	(1050.4)	(487.2)		
W*	0.917	0.835	0.753	0.668	0.579	0.999	0.5921
	(739.8)	(916.9)	(933.0)	(997.8)	(450.4)		

*Wは加重した推計結果。()内は t 値

62. 6. 30

	a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
	0.930	0.857	0.782	0.711	0.620	0.999	0.8197
	(1274.9)	(973.6)	(825.6)	(880.5)	(382.7)		
W	0.930	0.857	0.782	0.711	0.621	0.999	0.8213
	(486.5)	(620.9)	(727.9)	(883.7)	(392.6)		

62. 12. 28

	a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
	0.928	0.848	0.773	0.691	0.580	0.998	6.5221
	(443.0)	(324.0)	(273.2)	(273.7)	(74.64)		
W	0.930	0.848	0.772	0.691	0.580	0.999	6.639
	(273.5)	(336.0)	(376.8)	(414.4)	(112.8)		

63. 6. 30

	a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	修正 $\bar{R}^2$	残差平方和
	0.921	0.841	0.768	0.682	0.569	0.999	1.592
	(787.9)	(522.9)	(605.3)	(406.5)	(73.01)		
W	0.921	0.841	0.768	0.682	0.568	0.999	1.594
	(344.4)	(487.4)	(606.7)	(480.0)	(74.29)		

補論 McCulloch, Vasicek & Fong及びCarleton & Cooper の推計方法

1. McCulloch

McCullochが区間に分けて区分的 (piecewise) な多項式としたのは、データの分布が一様でないことを考慮したためである。例えば、アメリカにおいては、残存期間1年未満のT-Billがかなりの部分を占めているが、このようなデータ群を使って回帰すればデータの多い1年未満の部分が回帰式に反映され、残りの部分はあまり反映されないという結果となる。従って、データの分布に偏りがないように、区間に分けて多項式を当てはめるという工夫が必要になる。McCullochは1各区間に含まれるデータの個数がほぼ同じになるように、区分を考えることを提案している。

次に、区間に分割することはよいとして、いくつの区間に分割するのかという問題が生じる。区間の数(k)が少なすぎれば、一つの区間の中でデータの偏りがあるという問題が残ってしまう。かといって、余りに多くの区間に分割し過ぎると、単に各データを直線で結ぶことになりかねない。そこで、kの値をどのように求めるかを考えなければならない。まず第1のアプローチとしては、推計誤差の分散を最小にするkを求める方法が挙げられている。推計誤差の分散は、kが2から3ないし4に増加すると飛躍的に減少するが、それ以上kの値を上げてても必ずしも推計誤差の分散が減少するとは限らない、と述べられている。第2のアプローチは、単にkをn(データの数)のみで決定する方法がある。この場合kは、nが増加すればkも増加する、nが増加すればn/kも増加する、という2つの制約条件下におかれる。McCullochは、例として $k(n) = n^{1/2}$ という関数を挙げ、第1のアプローチとさほど異ならない結果が導かれることを示している。

なお、McCullochが用いた区分的二次多項式と区分的三次多項式は以下の通りである。

<区分的2次多項式>

$$\begin{aligned}
 f_1(m) &= \begin{cases} m - \frac{1}{2d_2}m^2 & (0 \leq m \leq d_2) \\ \frac{1}{2}d_2 & (d_2 < m \leq m_n) \end{cases} \\
 f_j(m) &= \begin{cases} 0 & (0 \leq m \leq d_{j-1}) \\ \frac{(m - d_{j-1})^2}{2(d_j - d_{j-1})} & (d_{j-1} < m \leq d_j) \\ \frac{1}{2}(d_j - d_{j-1}) + (m - d_j) - \frac{(m - d_j)^2}{2(d_{j+1} - d_j)} & (d_j < m \leq d_{j+1}) \\ \frac{1}{2}(d_{j+1} - d_{j-1}) & (d_{j+1} < m \leq m_n) \end{cases} \quad (2 \leq j \leq k-1) \\
 f_k(m) &= \begin{cases} 0 & (0 \leq m \leq d_{k-1}) \\ \frac{(m - d_{k-1})^2}{2(m_n - d_{k-1})} & (d_{k-1} < m \leq m_n) \end{cases}
 \end{aligned}$$

〈区分的 3 次多項式〉

$$f_j(m) = \begin{cases} 0 & (0 < m \leq d_{j-1}) \\ \frac{(m - d_{j-1})^3}{6(d_j - d_{j-1})} & (d_{j-1} < m \leq d_j) \\ \frac{(d_j - d_{j-1})^2}{6} + \frac{(d_j - d_{j-1})(m - d_j)}{2} \\ + \frac{(m - d_j)^2}{2} - \frac{(m - d_j)^3}{6(d_{j+1} - d_j)} & (d_j < m \leq d_{j+1}) \\ (d_{j+1} - d_{j-1}) \left(\frac{2d_{j+1} - d_j - d_{j-1}}{6} + \frac{m - d_{j+1}}{2} \right) & (d_{j+1} < m < d_k) \end{cases}$$

ただし $j = 1$ の場合は、 $d_{j-1} = d_j = 0$

$j = k$ の場合は、 $f_k(m) = m$

$F_j(m)$: 残存期間 m 期におけるスプラインの基底

m : 残存期間

d_j : 区間の区分点 (2 次の場合の最大区分点は d_k 、3 次の場合は d_{k-1})

2. Vasicek & Fong

Vasicek & Fong の方法においては、ディスカウント・ファンクションが指数スプラインで近似できると仮定するところからスタートする。Vasicek & Fong は、フォワード・レート of 安定性とディスカウント・ファンクションの単調減少性の点において、多項式スプラインよりも指数スプラインの方が勝ると考えた。ところが、指数スプラインは非線形であるために、このまま推計しようとするとかかなり複雑な推計が必要となる。そこで、対数を取り線形に変換して推計するという手法がとられた。

$$t = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - X), \quad (0 \leq X < 1)$$

とおき、 $G(X)$ を

$$D(t) = D\left(-\frac{1}{\alpha} \log(1 - X)\right) = G(X)$$

と定義する。従って、 α の関数である $G(X)$ を推計することになるが、この α は、 $G(X)$ を推計する過程で他のパラメーターと同時に求められる。 $D(t)$ が指数関数で近似される場合、 $G(X)$ はパワー関数で近似されるという性質を持つ。パワー関数は、多項式スプラインで非常にうまく近似されるので、 $G(X)$ は多項式で近似されることになる。

ここで、多項式近似により、

$$G(X) = a_1 g_1(X) + \dots + a_k g_k(X)$$

と表され、パラメータ $a_1, \dots, a_k$ を求めればよいことになる。推計には、一般化最小 2 乗法を用い、 α は残差平方和を最小にするような値とする。

以上の回帰分析により、ディスカウント・ファンクションは、

$$D(t) = \sum_{i=1}^k a_i g_i(1 - \exp(-\alpha t)), \quad t \geq 0$$

と表されることになる。

3. Carleton & Cooper

Carleton & Cooperは、

$$P_{0,j} = b_{0,j} + b_{1,j}X_{1,j} + b_{2,j}X_{2,j} + \dots + b_{n,j}X_{n,j}$$

$P_{0,j}$: 債券jの時点0における現在価値

$b_{t,j}$: 債券jの時点tにおけるディスカウント・ファクター

$$b_{t,j} = (1 + R_{t,j})^{-t}$$

$X_{t,j}$: 債券jの時点tにおけるキャッシュ・フロー（利払いあるいは元本償還）

とおき、以下の制約条件式の下で最小2乗法を用いてディスカウント・ファクターを推計する。

前提条件(制約式)

$$\textcircled{1} \quad b_{t,j} = b_{t,j'} = b_t \quad (j \neq j')$$

$$\textcircled{2} \quad b_0 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad b_1 \leq 1$$

$$\textcircled{4} \quad b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$$

この推計方法で現実の債券のディスカウント・ファクターを推計する場合には、ディスカウント・ファクターの期間を統一するために、利払い日が各銘柄で一致しているようなデータを選ばなければならない。Carleton & Cooperはこの問題に対処するために、半年に一度の利払いでかつ利払い日が一定であるアメリカの利付国債と、比較的簡単な加工で利付国債と同じ利払い日とみなせ、リスクの点で国債と変わらないFHLBモーゲージ証券をサンプル・データとして採用した。

補論 B - スプラインの求め方

本稿のVasicek & Fongモデルで使用した節点(knot)は、期間0, 2, 4, 6, 8年をベースに作成した。すなわち $X = 1 - e^{-a_1 t}$ であるから、

$0, 1 - e^{-2a_1}, 1 - e^{-4a_1}, 1 - e^{-6a_1}, 1 - e^{-8a_1}$ となる。以下では、これらを $Z_1 (= 0), Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 (0 = Z_1 < Z_2 < Z_3 < Z_4 < Z_5 < 1)$ と表記する。

一般に最良近似であるスプライン関数は、

$$d(X) = C_0 + C_1 X_+ + C_2 (X - Z_1)_+^3 + C_3 (X - Z_2)_+^3 + C_4 (X - Z_3)_+^3 + C_5 (X - Z_4)_+^3 + C_6 (X - Z_5)_+^3 \quad (1)$$

と表わせる。但し、 $(X - Z_i)_+ = \text{Max} [(X - Z_i), 0]$ は、切断べき関数(truncated power function)であり、 $d(X)$ のような関数を(3次の)自然スプライン関数と呼ぶ。

しかし、このままでは、パラメータの数が多すぎるので、「自然スプライン関数の2階微分は、より少ない数のB - スプラインで置き直せる」という属性を利用する。理論の詳細な説明はここでは行わず、テクニカルなやり方を述べることにする。

まず、節点を $(Z_1, Z_2, Z_3), (Z_2, Z_3, Z_4), (Z_3, Z_4, Z_5)$ の3つの組み合わせで考え、それに対応するB - スプラインを求める。結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} m_1(X) &= 2(-1)^2 \left[\frac{(X - Z_1)_+}{(Z_1 - Z_2)(Z_1 - Z_3)} + \frac{(X - Z_2)_+}{(Z_2 - Z_1)(Z_2 - Z_3)} + \frac{(X - Z_3)_+}{(Z_3 - Z_1)(Z_3 - Z_2)} \right] \\ &= \frac{2[(Z_3 - Z_2)(X - Z_1)_+ - (Z_3 - Z_1)(X - Z_2)_+ + (Z_2 - Z_1)(X - Z_3)_+]}{(Z_2 - Z_1)(Z_3 - Z_1)(Z_3 - Z_2)} \\ m_2(X) &= \frac{2[(Z_4 - Z_3)(X - Z_2)_+ - (Z_4 - Z_2)(X - Z_3)_+ + (Z_3 - Z_2)(X - Z_4)_+]}{(Z_3 - Z_2)(Z_4 - Z_2)(Z_4 - Z_3)} \\ m_3(X) &= \frac{2[(Z_5 - Z_4)(X - Z_3)_+ - (Z_5 - Z_3)(X - Z_4)_+ + (Z_4 - Z_3)(X - Z_5)_+]}{(Z_4 - Z_3)(Z_5 - Z_3)(Z_5 - Z_4)} \end{aligned}$$

したがって、(1)式の2階微分は、次のようになる。

$$d''(X) = a_2 m_1(X) + a_3 m_2(X) + a_4 m_3(X) \quad (2)$$

(2)式を2回 x について積分したものと、(1)式を比べると

$$d(X) = C_0 + C_1 X + a_2 M_1(X) + a_3 M_2(X) + a_4 M_3(X) \quad (3)$$

となる、但し、

$$M_i(X) = \frac{(Z_{i+2} - Z_{i+1})(X - Z_i)_+^3 - (Z_{i+2} - Z_i)(X - Z_{i+1})_+^3 + (Z_{i+1} - Z_i)(X - Z_{i+2})_+^3}{3(Z_{i+1} - Z_i)(Z_{i+2} - Z_i)(Z_{i+2} - Z_{i+1})} \quad (4)$$

である。ここで臨界条件 $d(0) = 1$ 、 $d(1) = 0$ を考える。

$$d(0) = C_0 = 1 \quad (5)$$

一方、 $X = 1$ のとき、 $m_i(1)$ の分子は0になるので、 X が1の近傍にあるならば、

$$\lim_{X \rightarrow 1-0} d(X) = 1 + C_1 = 0 \quad (\because \text{被積分関数が0の場合、いくら積分しても0になる})$$

したがって、 $C_1 = -1$ となる。

以上をまとめると

$$d(X) = 1 - X + a_2 M_1(X) + a_3 M_2(X) + a_4 M_3(X)$$

参 考 文 献

- 公社債引受協会「昭和61年度の公社債市場の動きについて」『公社債月報』，1987年6月。
- 公社債引受協会「昭和62年度の公社債市場の動きについて」『公社債月報』，1988年6月。
- 小林孝雄・森田洋「金利と期待仮説(1)・(2)」『経済セミナー』，1989年2月・4月。
- 小峰みどり「債券価格の決定と直利指向」『ファイナンス研究№4』，1985年12月。
- 証券取引審議会「社債発行市場の在り方について」，1986年。
- 高田由紀「金利の期間構造の推定について」『Working Paper No.1』，住友信託銀行投資研究部，1988年8月。
- 高橋琢磨『現代債券投資分析』，日本経済新聞社，1988年。
- 高橋俊治「国債の指標銘柄と流動性」『証券資料№106』，(財)日本証券経済研究所，1989年7月。
- 日本銀行調査統計局「最近の長期債流通利回りの動向とその背景」『調査月報』，1988年12月。
- 野村総合研究所『債券運用と投資戦略』，金融財政事情研究会，1986年。
- 野村総合研究所『公社債要覧』，1988年。
- 丸淳子・首藤恵・小峰みどり『現代証券市場分析』，東洋経済新報社，1986年。
- Carleton, W.T. & Cooper, I. A., "Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates", *The Journal of Finance*, Vol. 31, No. 4, September 1976.
- Elton, F. J. & Gruber, M. J., *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1987.
- Hougllet, M. X., "Estimating the Term - Structure of Interest Rates for Non Homogeneous Bonds", (*Dissertation submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Business Administration in the Graduate Division of the University of California Berkley*) , 1969.
- McCulloch, J. H., "Measuring the Term Structure of Interest Rates", *The Journal of Business*, January 1971.
- McCulloch, J. H., "An Estimate of the Liquidity Premium", *Journal of Political Economy*, Vol. 83, No. 1, February 1975.
- McCulloch, J. H., "The Tax-adjusted Yield Curve", *The Journal of Finance*, Vol. 30, No. 3, June 1975.
- Sargen, N., Schoenholtz, K. L., Blitz, S. & Elhabashi, S., "Trading Patterns in the Japanese Government Bond Market", *Salomon Brothers Inc. Bond Market Research*, October 1986.
- Schaefer, S. M., "Measuring a Tax-specific Term Structure of Interest Rates in the Market for British Government Securities", *The Economic Journal*, 91, June 1981.
- Shea, G. S., "Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 19, No. 3, September 1984.
- Vasicek, O. A. & Fong, H. G., "Term Structure Modeling Using Exponential Splines", *The Journal of Finance*, Vol. 37, No. 2, May 1982.