＜大蔵省財政金融研究所「フィナンシャル・レビュー」June－1992＞

可変係数回帰モデルの理論的側面と応用上の問題点

大　屋　幸　輔*

要　約

本稿では，実証分析で広くもちいられている回帰モデルに対して，回帰係数の変化をとらえることを目的とした可変係数回帰モデルに関する，その発展の経緯と理論的な側面を簡単に紹介し，若干の例とその問題点を示す。

可変係数回帰モデルに関しては様々な，種類と推定法が考えられてきたが代表的なものとして

1　ランダム係数型モデル

2　逐次推定型モデル

がある。ランダム係数型モデルの場合の推定法はGLS(一般化最小二乗法)，逐次推定型モデルの推定法で最も利用されるものとしてカルマン・フィルター・アルゴリズムによる方法がある。それらが実際に利用されるにあたって注意すべきこととして以下のことがあげられる。

(1) 特定化されたモデルは真のモデルでなければならない。

(2) 誤差項に対する仮定は真のものでなければならない。

(3) データの精度(特に説明変数)が低い場合には推定結果が無意味なものになることがある。

以上の点を十分考慮にいれずに分析を行うと，その結論を誤ったものにしてしまう可能性がある。(1)に対してはモデルの特定化の段階で，そのモデルの妥当性に関して十分な吟味が必要である。また特定の経済理論に依拠しない可変係数時系列モデルを使った分析も興味深いものである。(2)に対しても(1)と同様である。(3)は，現実経済のデータを推定に使用する場合にしばしば生じることである。またモデルや誤差項に対する仮定の妥当性を単独の方法でチェックすることは困難である。

従って可変係数回帰モデルをもちいて分析を行う場合には，ある特定の方法だけではなく，他の方法も補完的にもちいることが望ましい。

*京都大学経済研究所講師

1.はじめに

通常の回帰モデルによる分析と可変係数回帰モデルによる分析との違いは，前者が分析期間中の係数を一定であると仮定して推定するのに対して，後者では，そのような仮定をおかずに係数を推定することにある。

可変係数回帰モデルをもちいた分析が実際に利用されるようになったのは，現実の経済構造が分析期間中，一定ではなく，変化しているのではないかという疑問にたいして何らかの解答を与えてくれることが期待されてのことであった。このような問題は，いわゆる構造変化に関する問題に帰着する。日本経済は，1970年代の半ば以降大きくその構造が変化したことが様々なアプローチによって検証されている。可変係数回帰モデルを利用して，構造変化を検証しようという試みには，榊原・薬師寺ほか(1980)などがある。近年では，李・加納(1991)が日本における期待物価上昇率の計測と自然失業率仮説の検証をLog-Linear型の可変係数回帰モデルによって行っている。また金融の分野でShiba and Wago(1990)，斯波(1991)による裁定価格理論モデルへの適用例がある。これらは通常の一本の回帰モデルによる分析をさらに発展させ，見かけ上無相関なモデル(SUR)へ可変係数回帰モデルの考え方を導入したものである。

このような可変係数回帰モデルによる分析が実際に行われるようになったのは，カルマン・フィルター・アルゴリズムという工学の分野での制御理論として極めて優れたアルゴリズムを可変係数回帰モデルの定式化に取り込むことができたからである。このカルマン・フィルター・アルゴリズムの可変係数回帰モデルへの適用に関してはⅢ章と補論でのべる。

本稿で回帰モデルといった場合，線形を仮定しているが非線形回帰モデルの場合にもカルマン・フィルター・アルゴリズムによる可変係数回帰モデルの定式化は可能である。本稿では非線形モデルに関する議論は行わない。その理由として，非線形回帰モデルに対する取り扱いの基本的な考えは非線形回帰モデルを線形近似し，その近似されたモデルに対して線形回帰モデルで成立している議論を展開するからである。しかしながら，経済の理論モデルには非線形であるものが数多くある一方で非線形回帰モデルに対して可変係数の考え方を適用し，分析を行ったものは少ない。この意味で，非線形回帰モデルに対して可変係数アプローチを試みた李(1990)による分析は興味深いものである。

以降，本稿では，可変係数回帰モデルの発展の経緯を簡単に紹介し，その理論的な考察を行った後，応用上の問題点を指摘する。そのような問題点は可変係数回帰モデルに固有の問題というよりは，一般に統計モデルを利用して実証分析を行う際に生じることではあるが，可変係数回帰モデルによる分析ではより顕著となる。具体的にそのような問題点に関しては本稿のⅣ章でふれることにする。

Ⅱ．発展の経緯

回帰モデルの係数を時点ごとに推定しようという試みは古くからあり，そのもっとも単純な方法として逐次最小二乗法がある。これは，推定したい係数の数をkとすれば，k＋1個の

データを使って最小二乗法を行い，次にデータを１個ずつ増やしながら最小二乗法を繰り返し行う方法である(第一段階での推定に使用するデータ数は“少なくとも”という意味であり，全体のデータ数が多い場合にはk＋1個以上のデータを使用しても問題はない)。実際に逐次最小二乗法を行うにはかなりの計算量を必要とするが，Plackett(1950)がこれらの計算をアルゴリズムとして提示している。Brown, Durbin and Evans(1975)はこのアルゴリズムから得られる逐次残差を使って回帰モデルの係数と誤差項の分散の不変性に関する検定方法を考案した。これらはCusum,Cusum Squareテストとして構造変化の検定にしばしばもちいられる。可変係数に関する研究はかなり古くからあるが，経済の分野で本格的に研究が行われたのはRosenberg(1968)，(1972)，(1973)，Cooley and Prescott(1973)，(1976)によって可変係数回帰モデルという考え方が導入されたのがはじめであろう。かれらのアプローチは回帰モデルの係数の変化が確率的であると考えたもので，推定方法はGLSやカルマン・フィルター・アルゴリズムによる。先に紹介した逐次最小二乗法はカルマン・フィルター・アルゴリズムによる方法の特殊ケースとして考えることもできる。実証分析の分野でカルマン・フィルター・アルゴリズムをもちいた分析が多いのは各時点の係数の推定値を与えてくれるということと，RATSやTSPのようなパーソナル・コンピュータのパッケージによって簡単に利用できるようになったこともその理由としてあげられる。

一般に各時点の係数を推定することは可能ではない。なぜなら，推定すべき未知のパラメータ数がデータ数より多くなってしまうからである。そこで係数に何らかの制約を与えるのが普通である。通常の回帰分析(固定係数)では各時点の係数が共通の値をとるという制約を加えていると考えることもできる。Rosenberg(1968)にはじまる一連の研究は係数の変動をパラメトリック・モデルで表現するものである。このように係数がなんらかの確率過程に従っていると仮定して，その変動をパラメトリック・モデルで表現するものとしては，ARMAモデルを仮定したPagan(1980)などがある。

さらに時系列モデルの係数が変化するようなモデルの研究も行われている。回帰モデルに対して係数の変化を考慮することは，変数間の関係の変化を構造変化としてとらえ，それを検証するという目的で可変係数による分析を行っていることが多い。これに対して，特に経済の理論モデルに依拠していない時系列モデルに対して係数の変化を考慮するモデルの分析の目的は主に非定常時系列モデルを取り扱うことにある。時系列モデルにおいて定常性を仮定することは，その時系列の特性が時間と共に変化しないということを仮定することであるが，経済のデータの場合，特に金融の時系列データは，定常性の仮定が満たされないことが多い。従って非定常時系列モデルによる分析が必要となってくる。非定常時系列で典型的なものとしては，平均や共分散が時間と共に変化するものが考えられる。そのような時間と共に変化する１次と２次のモーメントを可変係数自己回帰モデルによって求める方法が，Kitagawa and Gersch(1984)，(1985)によって考案された。またかれらの方法を使って経済の時系列データを分析したものに浪花(1986)，廣松・浪花(1990)がある。

つづくⅢ章ではここでふれた一連の可変係数回帰モデルに関する理論的な考察を行う。

Ⅲ. 理論的考察

本章では可変係数回帰モデルの推定法に関する理論的な考察を行う。Ⅱ章でふれたように基

本的には２つの推定法がある。一つはカルマン・フィルター・アルゴリズムに代表される逐次的な推定法，もう一つは，GLSによるものである。はじめにGLSによる方法に関して考察する。

Ⅲ－１　GLS(一般化最小二乗法)

分析の基礎となる回帰モデルを以下のように定式化する。

(1) $\mathbf{y}_t=\mathbf{x}'_t\beta_t+\mathbf{u}_t,\ t=1,\cdots,T,$

$\mathbf{u}_t \sim N(0,\sigma^2)$

ここで(1)は通常の回帰モデルと同様の形式であるが唯一，異なっているのは係数ベクトル β_t が時間に依存していることである。ただし，x'_t は(１×ｋ)ベクトル，β_t は(ｋ×１)ベクトルである。

このままでは推定すべき未知の係数の数が標本数を越えてしまうので，それらを推定することは出来ない。従って，何らかの制約を課す必要が生じることになる。

Hildreth and Houck(1968)は係数 β_t は未知の平均のまわりで確率的な変動をすると考え，以下のような制約をおいた。

(2) $\beta_t=\bar{\beta}+\varepsilon_t,$

ε_t は独立，同一に以下の正規分布に従い，

$\varepsilon_t \sim N(0,\Omega),$

$\Omega=diag(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_k^2),$

U_tとは無相関とする。

以上の仮定のもとで推定すべきパラメータは $\overline{\beta}$ と σ^2，σ_1^2，…σ_k^2 である6このような状況での分析の目的は，係数の変動に対して頑健な推定量をもとめることにある。従って，各時点の係数の推定値をもとめているのではない。実際の推定の手続きは(1)，(2)よりモデルを書き直すことで明らかにGLSによって行うことができることが示唆される。

(3) $\mathbf{y}_t=\mathbf{x}'_t\bar{\beta}+\mathbf{v}_t,$

$\mathbf{v}_t=\mathbf{x}'_t\varepsilon_t+\mathbf{u}_t,$

$\mathbf{v}_t \sim N(0,\mathbf{V}),$

$\mathbf{V}=diag(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_T),$

$\gamma_t=\sum_{i=1}^{k}\mathbf{x}_{it}^2\sigma_i^2+\sigma^2$

このような可変係数回帰モデルはランダム係数モデルと呼ばれており，Amemiya(1985, pp203)で一般的に論じられている。

以降，Amemiya(1985)を参考にして推定の手続きを示す。

モデルを以下のように定式化する。

(4) $\mathbf{y}_t=\mathbf{x}'_t(\beta+\mathbf{v}_t)$

ここで v_t はk次元の確率変数ベクトルで１次，２次のモーメントはそれぞれ，

$$E(\mathbf{v}_t)=0,\ \mathbf{E}(\mathbf{v}_t\mathbf{v}'_t)=diag(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k),$$

さらに $\mathbf{z}_t=(x_{1t}^2,x_{2t}^2,\cdots,x_{kt}^2)'$ とする。

モデルを $\mathbf{y}_t=\mathbf{x}'_t\beta+\mathbf{u}_t,\ \mathbf{u}_t=\mathbf{x}'_t\mathbf{v}_t$

と書き直しOLSによる残差をもとめると

$\hat{\mathbf{u}}_t=\mathbf{u}_t-\mathbf{x}'_t(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$ となる。

次に，$\hat{u}_t^2$を以下のように定式化する。

$\hat{u}_t^2=z'_t\alpha+e_1-2e_2+e_3$

$E(u_t^2)=\mathbf{z}'_t\alpha,$

$\mathbf{e}_1=\mathbf{u}_t^2-\mathbf{z}'_t\alpha,$

$\mathbf{e}_2=\mathbf{u}_t\mathbf{x}'_t(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u},$

$\mathbf{e}_3=[\mathbf{x}'_t(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}]^2,$

(5) $\hat{\mathbf{u}}^2=\mathbf{Z}\alpha+\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,$

$\mathbf{e}_2$ と $\mathbf{e}_3$ の期待値はゼロではないが，オーダーがそれぞれ，$O(T^{-1/2})$，$O(T^{-1})$ なので漸近的にこの項は無視することができる。

(5)の左辺の $\hat{\mathbf{u}}^2$ は第ｔ要素が $\hat{u}_t^2$ のベクトルである。(5)に対して再度OLSを適用しαの推定量を得る。

(6) $\hat{\alpha}=(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\hat{\mathbf{u}}^2$

(5)に対するGLS推定量は

$$\hat{\alpha}_G=(\mathbf{Z}'\mathbf{D}^{-2}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{D}^{-2}\hat{\mathbf{u}}^2$$
$$\mathbf{D}=diag(\mathbf{z}_1'\alpha,\cdots,\mathbf{z}_T'\alpha)$$

となり，FGLSは以下の(7)で与えられる。

(7) $\hat{\alpha}_{\mathbf{FG}}=(\mathbf{Z}'\hat{\mathbf{D}}^{-2}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\hat{\mathbf{D}}^{-2}\hat{\mathbf{u}}^2,$
$\hat{\mathbf{D}}=diag(\mathbf{z}_1'\hat{\alpha},\cdots,\mathbf{z}_T'\hat{\alpha})$

βに関するFGLS推定量は

(8) $\hat{\beta}_{\mathbf{FG}}=(\mathbf{X}'\tilde{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\tilde{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{y},$
$\tilde{\mathbf{D}}=diag(\mathbf{z}_1'\hat{\alpha}_{\mathbf{FG}},\cdots,\mathbf{z}_T'\hat{\alpha}_{\mathbf{FG}})$

となる。

(8)から得られる残差をあらためて$\hat{\mathbf{u}}$とし，(6)～(8)を収束するまで繰り返して最終的にβに関するFGLS推定量とする(この繰り返し計算においてα_iが負になることがある。このような状況を避けるためには，それらが非負であるという不等式制約のもとで(5)の推定を行う必要がある)。

以上がランダム係数型の可変係数回帰モデルの推定方法であるが，もし，このような分析のフレームワークで係数の安定性を調べたいときには，誤差項の分散の不均一性を検定すればよい。すなわち，分散の不均一性が認められる場合には，分析期間中の係数は確率的な変動をしていることになる。なお，そのような検定方法としてBreusch and Pagen(1979)が，LM(Lagrange Multiplier)検定を提示している。Swamy(1971)は，ランダム係数型の可変係数回帰モデルを投資関数に適用して，固定係数の回帰モデルとの比較を行っている。

Ⅲ－2　逐次推定

ここでは各時点の係数の推定値を得るための方法に関して考察する。そのような推定は各時点ごとに推定を行う，いわゆる逐次推定によってなされている。通常の逐次最小二乗法では，推定している時点のデータと推定に使う最初のデータとを同じウエイトで利用している。すなわち，利用されるデータは推定に対してすべて同じ影響を与えているといえる。これに対して，割引逐次最小二乗法では，過去のデータの影響を割り引いて推定を行う。この割引逐次最小二乗法のアルゴリズムに関してはHarvey(1981)を参照されたい。

以下では現在，もっとも利用されているカルマン・フィルター・アルゴリズムによる逐次推定に関して考察する。補論で一般的なカルマン・フィルター・アルゴリズムに関する定義を示しているので，ここでは係数の変動がAR(1)に従っている場合について述べる。

(9) $\mathbf{y}_t=\mathbf{x}_t'\beta_t+\mathbf{u}_t,$

(10) $\beta_t=\Phi\beta_{t-1}+\varepsilon_t,$
$\mathbf{u}_t\sim\mathrm{N}(0,\sigma^2),$
$\varepsilon_t\sim\mathrm{N}(0,\sigma^2\Omega),$

係数の変動を時系列モデルで近似した(10)でのΦとΩは分析を簡単にするため対角行列(Φは単位行列)と仮定する。このような定式化のもとでカルマン・フィルター・アルゴリズムは

t＝1，…，Tにおいて

$\mathbf{b}_{t+1/t}=\Phi\mathbf{b}_{t/t},$
$\mathbf{b}_{t/t}\ =\mathbf{b}_{t/t-1}+\mathbf{K}_t\mu_t,$
$\mu_t\ =\mathbf{y}_t-\mathbf{x}_t'\mathbf{b}_{t/t-1},$
(11) $\mathrm{S}_t\ =\mathbf{x}_t'\mathbf{P}_{t/t-1}\mathbf{x}_t+\sigma^2,$
$\mathbf{K}_t\ =\mathrm{P}_{t/t-1}\mathrm{x}_t\mathrm{S}_t^{-1},$
$\mathbf{P}_{t/t}\ =[\mathbf{I}_k-\mathbf{K}_t\mathbf{x}_t']\mathbf{P}_{t/t-1},$
(12) $\mathbf{P}_{t+1/t}=\Phi\mathbf{P}_{t/t}\Phi+\sigma_2\Omega,$
初期条件；$\mathbf{b}_{1/0}=\mathbf{b}^*$，$\mathbf{P}_{1/0}=\mathbf{P}^*$

となる。ここで(9)，(10)という定式化のもとでの尤度について考えてみる。

一般に観測値y＝(y_1，y_2，…，y_T)に関

する対数尤度は

$$\begin{aligned} log\,\mathrm{L}(\mathrm{y}) &= log\,\mathrm{L}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \cdots, \mathrm{y}_{T-1}) \\ &\quad + log\,\mathrm{L}(\mathrm{y}_T | \mathrm{y}_{T-1}, \cdots, \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_1) \\ &= \sum_{t=2}^{T} log\,\mathrm{L}(\mathrm{y}_t | \mathrm{y}_{t-1}, \cdots, \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_1) \\ &\quad + log\,\mathrm{L}(\mathrm{y}_1) \end{aligned}$$

というように条件付きの対数尤度の和に分解することができる。このとき右辺の第２項の $\mathrm{logL}(\mathrm{y}_1)$ はカルマン・フィルター・アルゴリズムでの初期値問題と密接に関係している。そのことを示すために以下ではカルマン・フィルター・アルゴリズムから得られる予測誤差の系列と尤度の関係を見ていくことにする。カルマン・フィルター・アルゴリズムから.もとめられる係数の推定量 $\mathbf{b}_{t/t-1}$ はt-1期までのデータに関する条件付き期待値であることを考慮すれば，μ_t はt-1期のデータにもとづく予測誤差である。一方，t-1期までのデータを条件とした条件付き分布(尤度)は，t-1期までのデータが与えられたもとでの，最適予測による誤差の分布と考えることができるので，以下のように条件付き対数尤度を予測誤差をもちいて定式化できる(S_t は予測誤差の分散)。

$$\begin{aligned} &log\,\mathrm{L}(\mathrm{y}_t | \mathrm{y}_{t-1}, \cdots, \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_1) \\ &\quad = -\frac{1}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2} log(\mathrm{S}_t) - \frac{1}{2}\frac{\mu_t^2}{\mathrm{S}_t} \end{aligned}$$

従って，カルマン・フィルター・アルゴリズムより得られる予測誤差の系列に対する対数尤度関数は以下のようになる。

$$(13)\quad log\,\mathrm{L} = -\frac{\mathrm{T}}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(log(\mathrm{S}_L) + \frac{\mu_t^2}{\mathrm{S}_t}\right)$$

また上述のアルゴリズムの(11)，(12)のかわりに以下の(14)，(15)をもちいると，

$$(14)\quad \mathbf{S}_t = \mathbf{x}_t' \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{x}_t + 1,$$

$$(15)\quad \mathbf{P}_{t+1/t} = \Phi \mathbf{P}_{t/t} \Phi + \Omega,$$

対数尤度関数は

$$\begin{aligned} (16)\quad log\,\mathrm{L} &= -\frac{\mathrm{T}}{2} log(2\pi) - \frac{\mathrm{T}}{2} log(\sigma^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} log(\mathrm{S}_t) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\mu_t^2}{\mathrm{S}_t}\right) \end{aligned}$$

と表現することもできる。どちらの対数尤度関数にも $\mathrm{logL}(\mathrm{y}_1)$ に対応している項があるが，これは y_1 の分布の対数尤度である。あるいは，その予測誤差の分布の対数と解釈すれば，初期条件の $\mathbf{b}_{1/0}$，$\mathbf{P}_{1/0}$ に依存していることは明らかである。従って，初期条件が与えられ，さらに(16)を σ^2 に関して集約すれば未知パラメータが Ω の対数尤度関数を得ることができる(どちらの対数尤度関数も未知パラメータ σ^2，Ω に関する非線形関数になっているが，(16)のほうが σ^2 に関して陽表的であるので取り扱いは簡単である)。

通常は何らかの方法で得た初期条件をもちいることになるのであるが，この初期条件(初期値)はベイズ流に解釈すれば，事前分布を定めるパラメータのことであり，そのようなパラメータをどのように決定するかが，いわゆる初期値問題のことになる。

ここで示したカルマン・フィルター・アルゴリズムによる逐次推定法は，最小分散推定量を与える点ですぐれた方法ではあるが，初期条件の決定方法，尤度の最大化に対して問題を残している。これらに関しては次章で考察する。次に可変係数をもった時系列モデルについて若干の考察を行う。

Ⅲ－３　可変係数時系列モデル

先に述べたように時系列モデルの係数(パラメータ)が変化しているモデルをもちいた分析の目的は非定常性の取り扱いにある。ここでは，自己回帰モデルの係数が変化するようなモデルに関して考察する。自己回帰モデルに対してもⅢ－１のようなフレームワークでモデルを定式化することができる。この方法はNicholls and Quinn(1982)によって詳細に分析されて

いる。以下ではⅢ－２でみたようなカルマン・フィルター・アルゴリズムをもちいる方法について紹介することにする。

はじめに，トレンドを除去した時系列をx_tとし，共分散に関して非定常を仮定する。このとき可変係数自己回帰モデル(p次)を

$$(17)\quad x_t=\sum_{i=1}^{P}\alpha_{it}x_{t-i}+\varepsilon_t$$

と定式化する。ε_tはi.i.d.n$(0,\sigma^2)$とする。ここで，係数α_{it}対して“時間と共に滑らかに変動する”という制約をおく。この制約をk次の確率定差方程式

$$(18)\quad \Delta^k\alpha_{it}=\delta_{it}$$

で表す。$\triangle^k$はk次の階差を行うオペレーターである。またδ_{it}に対しては平均ゼロの正規分布を仮定する。さらに周波数領域でも滑らかさに関する制約を加え以下のような関数を最小にするように未知パラメータを決定する。

$$(19)\quad \sum_{t=1}^{T}\left[x_t-\sum_{i=1}^{P}\alpha_{it}x_{t-i}\right]^2+\tau^2\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{P}[\Delta^k\alpha_{it}]^2 +\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{P}[i^{2k*}\lambda^2+v^2]\alpha_{it}^2$$

あるいはベイズ流に解釈するために以下のような分布のかたちで定義すると

$$(20)\quad \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\left[x_t-\sum_{i=1}^{P}\alpha_{it}x_{t-i}\right]^2\right\} \cdot\exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{P}[\Delta^k\alpha_{it}]^2\right\} \cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{P}i^{2k*}\alpha_{it}^2\right\} \cdot\exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{P}\alpha_{it}^2\right\}$$

となる。４つの指数に関する積のうち，第１番目は通常の最小二乗法(あるいは最尤法)に対応する項で，第２が係数の変化の滑らかさに関する事前分布，第３，４がスペクトラムの滑らかさに関する事前分布となっている。

(20)は，τ^2，λ^2，μ^2をハイパー・パラメータにもつ係数に関する事後分布である。この事後分布を係数に関して積分してハイパー・パラメータに関する尤度をもとめる。そして，その尤度にもとづいてハイパー・パラメータを決定する。具体的な手続きに関してはGersch and Ktagawa(1988)を参照のこと。

Ⅳ. 付随する問題点

これまで可変係数回帰モデル，および可変係数時系列モデルに関して理論的な考察を進めてきたが，本章では一連の可変係数モデルに付随する問題点を具体的な例をあげながら指摘することにする。

Ⅳ－１　モデルの特定化

可変係数モデルのなかでとりわけ逐次型の可変係数回帰モデルは，その推定結果がモデルの特定化に強く依存していることが知られている。例えば，ある一つの経済現象に対して二つの経済理論モデルが想定された状況を考えてみる。それぞれの理論モデルに基づいて定式化された二つの回帰モデルが考えられ，それぞれに関して可変係数回帰モデルによるアプローチが適用され，以下のような結果になったとしよう。

モデル１では係数の変化がほとんどなかった。
モデル２では係数の変化がみ、とめられた。

このときモデル1が正しいと考えるものは，分析期間における構造変化は存在ぜずモデル2による結果は，そのモデルの定式化の基礎となった理論モデルが誤っていると結論する。また，モデル2が正しいと考えるものは，分析期間において構造変化が生じていると結論することになる。このような両者の相反する結論に対して我々はどのような判断をすべきであろうか?

まず議論を単純化するために従来の固定係数回帰モデルの場合を考えてみる。固定係数の場合に，このような問題は回帰モデルの説明変数の選択の問題としてとらえることができる。その場合，説明変数選択の方法には,

1. 決定係数
2. F，t統計量による仮説検定
3. Mallow's Cp, AIC等の情報量規準

などがある。固定係数回帰モデルの場合には，上述のような方法をもちいることで説明変数の選択(理論モデルの選択)を行うことができる。これに対してカルマン・フィルター・アルゴリズムをもちいる可変係数回帰モデルの場合は決定係数や各種情報量規準による方法は有効な手段とはならない。なぜなら，そのような方法は基本的に被説明変数の推定誤差(予測誤差)をもちいる方法であり，この場合，予測誤差は逐次的な修正がなされており最終的に得られる推定誤差はどのような説明変数をもつ回帰モデルにおいても，ある程度小さいものとなる。簡単にいえば，被説明変数の推定値は被説明変数に対して，過剰なフィッティングとなっているのである。このことはモデルが真のモデルであるか，ないかにかかわらず生じるものである。従って先にあげた決定係数や各種情報量規準をもちいることは有効な解決方法とはならない。

残る選択方法として，F，t統計量による検定方法がある。これは係数の推定量の分布にもとづくものである。カルマン・フィルター・アルゴリズムをもちいる可変係数回帰モデルでは，誤差項に正規性を仮定すれば各係数の各時点での推定量の分布も正規分布となり，それら推定量の分布の性質を利用して検定を行うことができる。しかしながら，そのような検定の結果が必ずしも説明変数の選択に対し自明な結果をもたらすとは限らない。

これまで説明変数の選択に対して統計的な方法をもちいることを考えてきたが，経済現象を分析する際には，たとえ真のモデルを知らない場合においても先験的な情報を利用することができる。例えば消費関数を推定した際に，あるモデルでは限界消費性向の推定値が負の値あるいは1を越えた値をとっており，他のモデルでは0から1のあいだの値をとっている場合には，明らかに後者のモデルが採用されるであろう。このように先験的な情報を利用することでモデル(説明変数)の選択を行うこともできる。

上述したように経済現象を数量的に分析する際には，モデルの選択が問題となってくるのであるが，このことは可変係数回帰モデルに固有の問題ではなく，固定係数による分析方法にも付随する問題である。ただし可変係数回帰モデルの場合には，その影響が顕著にあらわれるのである。いずれにせよ，可変係数モデルによる分析では，説明変数(モデル)の選択に細心の注意が必要であることは事実である。

Ⅳ－2．推定上の問題点

逐次型の可変係数モデルでは未知パラメータの推定に最尤法をもちいるが，定式化された(対数)尤度は未知パラメータに関して非線形になっているので，その最大化はGauss-Newton法やDavidon-Fletcher-Powell法等の非線形最適化の方法によって行われる。しかしながら，実際には最大点をあたえる推定値が一つではなかったり，尤度が無限大になってしまったり，あるいは得られた最大点が大局的なものであるかどうかが保証されない，といった問題が生じてしまう。従って尤度の最大化を行うには，非線形最適化法の初期値，諸条件の設定に十分な考慮が必要である。

また逐次型の推定には，初期値が必要であるが，一般に初期値をどのように決定すればよいかという問題に対する明確な解答は与えられていない。実際にもちいられる方法として

1. 係数に関してはゼロ，その分散に関しては十分に大きな値
2. はじめの数期のデータをもちいて得られた係数の推定値とその分散
3. 全てのデータを使って得られた係数の推定値とその分散
4. パネル・データによる初期値の推定

等が考えられているが，どの方法が最適なものであるかは，ケース・バイ・ケースであり，通常は考えられる方法を全て適用し，もっともふさわしいものを採用するのが一般的である。ベイズ流に解釈すれば，「もっともふさわしい」というのは，分析者の主観にもっとも近いものを採用するということである。このような考え方は恣意的であるという批判は避けられないが，客観的に最適なものを選択できない状況ではベイズ的なアプローチも一つの考え方であろう(ベイズ流のアプローチに関する入門書としてはZellner(1971)，またそのような方法を可変係数回帰モデルに適用したものに関してはBroemeling and Tsurumi(1987)がある)。

Ⅳ－３　データの精度の問題

先に問題としてあげたモデルの定式化や尤度の最大化が正しく行われた場合にも問題として残るのがデータの精度である。この問題も可変係数回帰モデルに固有な問題ではないが，係数を各時点で推定してその変化をみることで，構造変化が生じているか，あるいはどのような変化が生じているか等を判断する場合には，重要な問題となる。データの精度が低いときは係数の推定値の変動が極めて大きく，そのような推定値からはなにも結論することができなくなる場合もある。このようなことは，現実の経済データをもちいて分析する際にしばしばおこることである(実際にこのような状況が生じた場合，係数の推定値にスムージングが施されることが多い。

データの精度を低下させていると考えられる大きな要因としては

1. データが観測誤差をともなっている(特に説明変数のデータ)
2. 外れ値の存在

等が考えられる。通常は，このような要因を取り除いて分析を進めるのであるが，分析目的が構造変化をとらえることにあるような場合には，それらを取り除くことによって重要な情報が失われる可能性がある。従ってデータの中に外れ値のようなものがみうけられたときには，それがデータの入力ミスによるもののように，本来データの持っている情報とは関係がない場合には取り除くことが望ましいが，そうでない場合には，そのようなデータも分析に含めるべきである。

Ⅳ－４　具体例

ここではさきにあげた問題点を明確にするために具体例をあげる。分析にもちいるモデルは輸入関数である。なお本章では推定上の問題点を示すために以下のモデルを真のモデルと仮定して分析を行う。

(21) $\log \mathbf{M} = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{V} + \beta_2 \log \mathbf{P}_{-1}$

M，V，Pはそれぞれ，実質輸入と海外への所得GDP，交易条件指数である。推定期間は1970年第2四半期から1989年第２四半期とした。

係数の安定性をチェックするために，係数の変動がHildreth-Houck型のモデルに従うと仮定した場合を考える。このチェックはBreush-Pagan検定で行うことができ，ここでは以下のような結果が得られ，係数が安定的であるという仮説は有意水準５％では棄却されなかった。しかしながら，このHildreth-Houck型の場合は説

明変数の２次の項までしか含んでいないので，さらに，３次の項まで含めると仮説は棄却された。

Hildreth-Houck型＝16.18
３次の項まで＝35.44

従って，この結果は何らかのかたちで係数が変化している可能性を示唆している。

参考までにOLSとHildreth-Houck型の場合のGLSの推定結果を示すと

	β_0	β_1	β_2	S.E	R^2
OLS	−1.107	1.026	0.082	0.034	0.889
	(0.370)	(0.056)	(0.044)		
GLS	−0.753	0.963	0.075	0.029	0.865
	(0.403)	(0.062)	(0.043)		

括弧内は標準誤差

となった。二つの推定結果にはさほど差がないようであるが，GLSの方はHildreth-Houck型を仮定した場合であり，Breush-Pagan検定の結果を考慮すれば妥当なものと思われる。しかし，このような分析は係数を変化させている要因だけが，誤差項の分散の不均一性をひきおこしていると仮定していることに注意すべきである。そのような要因以外にも誤差項の分散に不均一性をもたらす要因が存在すれば，ここでの分析は有効なものになるとは限らない。ここでの例ではOLSで推定したときのD.W.比は0.20となっており誤差項に正の系列相関が存在する可能性を示唆している。さらに価格弾力性をあらわす係数β_2の符号が正になっている。Hildreth-Houck型を仮定した場合のGLS推定でも符号は正のままであり，誤差項に対する仮定に疑いの余地がある。ただし本章の目的がモデルの推定上の問題点を示すことにあるので以降も上述のモデルが真のモデルであり，諸仮定も正しいものとして例をすすめる(誤差項に１階の系列相関を仮定して，カルマン・フィルター・アルゴリズムによる可変係数回帰モデルを分析にもちいる場合には状態空間表現をそのような仮定に合わせて表現し直せばよい)。

次に逐次型の分析にともなう初期値の問題を示すために，以下の

1）係数に関してはゼロ，その分散に関しては十分に大きな値
2）全てのデータを使って得られた係数の推定値とその分散
3）全てのデータを使って得られた係数の推定値と分散に十分大きな値

によって初期値を決定しカルマン・フィルター・アルゴリズムをもちいて係数の変化を推定する。以下に示すグラフが各方法によって得られた初期値を使った推定結果である。

図１

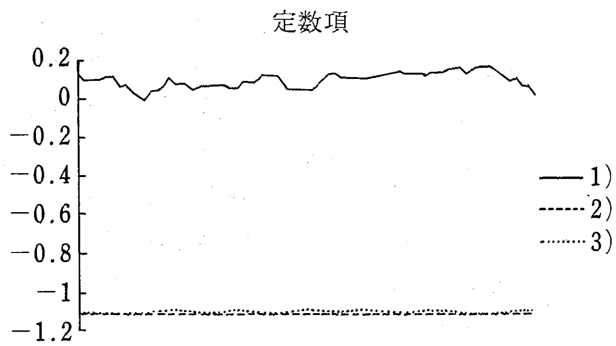


図２

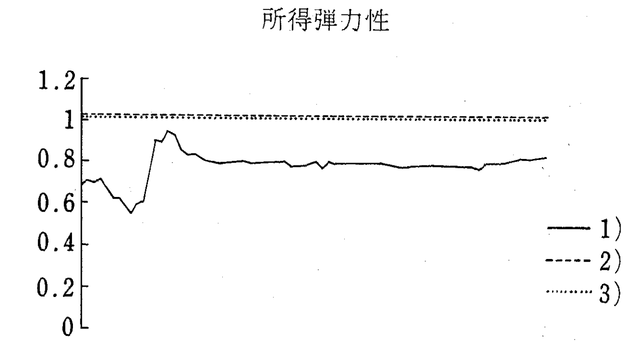
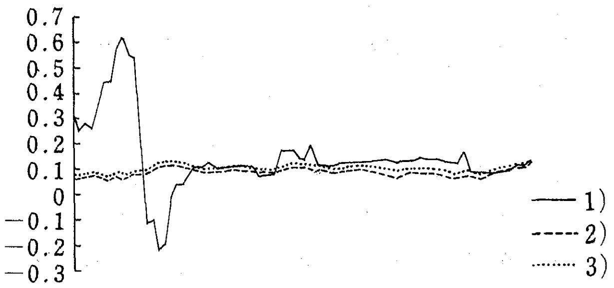


図3

価格弾力性



この図1から3より初期値の選び方で推定結果が変わってくることがわかる。初期値の選択に関しては様々な実験が試みられており，例えば1)の方法では始めの数期を除いて初期値の影響がほとんどないといった結果もあるが，必ずしもそうでないことは図から明らかであろう。

次にデータの精度に関する例を示すために，先の例でもちいたデータに意図的にノイズを加えデータの精度を低下させる(説明変数のデータに平均ゼロ，標準偏差0.1の正規乱数を加えた。このデータをもちいて固定係数回帰モデルでOLS推定したときの決定係数は0.40であった)。このデータをもちいてカルマン・フィルター・アルゴリズムによる係数の変化の推定をおこなったものを以下の図4から図7で示す（初期値に関しては先の1）による方法を採用した)。

図4

定数項

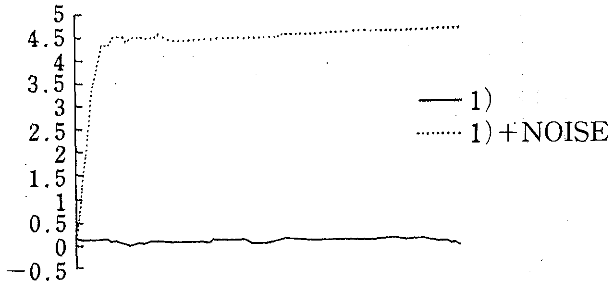


図5

所得弾力性

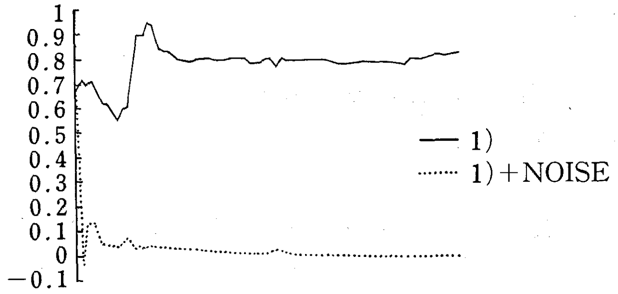


図6

価格弾力性

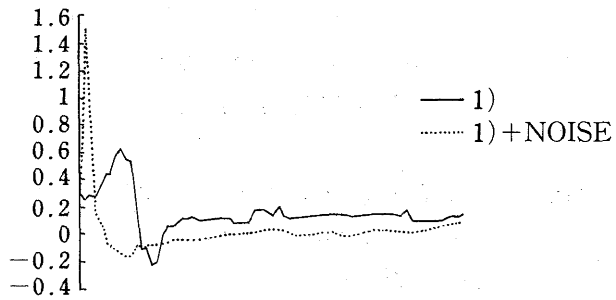


図7

被説明変数と推定値

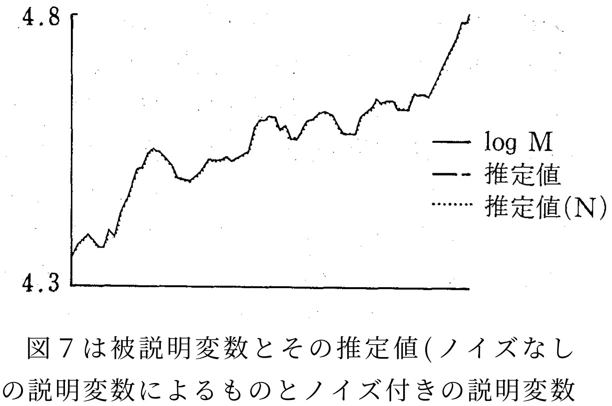


図7は被説明変数とその推定値(ノイズなしの説明変数によるものとノイズ付きの説明変数によるもの)のグラフである。このグラフから可変係数回帰モデルによる被説明変数の推定値が，いずれの場合にも過剰なフィッティングになっていることがわかる。さらに係数の変化を示すグラフは以前の例よりも大きな変化を示している。この例で説明変数に加えたノイズは，被説明変数の推定誤差としてではなく，係数の変化として現われているのである。このようにデータに観測誤差を含む場合に，固定係数回帰

モデルではそのような誤差を含んでいることを考慮した推定法も考えられてはいるが，事実上データに観測誤差が含まれているかどうかは自明でないことが多く，まして可変係数回帰モデルの場合にそのような問題をも考慮して推定を行うことは現実的ではない。一般に，定式化されたモデルが真のモデルであるかどうか，あるいは分析にもちいるデータが観測誤差を含んでいるかどうかを完全に知ることができない状況では，ここで示した例と同じ様な推定結果になる場合がある。そのような結果になった場合，その結果の解釈には十分注意が必要である。なぜなら係数の変化がデータに含まれる観測誤差や，モデルの特定化のミスに起因している可能性があるからである。

このように考えていくと，Ⅲ－２で係数の変動に対して仮定されたランダム・ウォーク・モデルはかなりの変動に対処できるが，このことがかえって分析結果を不正確なものにしていることになる。そこでモデルやデータに関して完全な情報がない場合に可変係数回帰モデルによって分析をおこない，このような問題に対処するには，Ⅲ－２でのような最尤法による未知パラメータの推定を放棄し，それらを恣意的に決定し分析を行うか，割引あるいは通常の逐次最小二乗法，局所的に最小二乗法を行う等が考えられる。またモデルを定式化した後可変係数回帰モデルによって推定を行う前に固定係数での推定を行い，ある程度モデルや誤差項に対する仮定の妥当性をチェックしておくことが望ましい。

Ⅴ．終わりに

本稿では回帰モデルの係数が変動することに対する影響に関して頑健な推定法と変動している係数自身を推定する方法，それらの理論的な背景と問題点を示した。係数の変動を推定する方法としてもっとも利用されているカルマン・フィルター・アルゴリズムによる方法は分析しようとする対象に関する情報が少ない場合，“分析結果を誤ったものにしてしまう”といった，重大な問題点を含んでいることを簡単な例をもちいて示した。このような分析の目的が係数の変化をとらえることによって，構造変化を検証しようとする場合には，カルマン・フィルター・アルゴリズムによる可変係数回帰モデルよりも係数が変化しているかどうかの検定や係数の変動を確率モデルではなく決定論的な方法で近似した推定法が有効であると考えられる。本稿を終えるにあたって，このような分析を試みる場合に注意すべき点を再度あげておく。

1　分析にもちいるモデルの吟味を十分に行っておくこと。

2　推定の際には単独の方法をもちいるのではなく，逐次型やランダム係数型，あるいは本稿ではふれなかったが(Gradual) Switchingモデルといった様々な方法を適用して最終的な結論を導くべきである。

3　検定によって係数が変動しているかどうかを検証してみることも必要である。2であげた推定の際の注意点と同様に検定に関しても様々な方法が考えられているので，一つの検定で結論を求めるのではなく各種検定法を適用して結論を導くべきであろう。

(本稿で紹介しなかった他の推定法，検定法に関してはKrämer(1989)の最終章の文献リストを参照されたい。)

以上の点を十分に考慮して分析を行えば，分析結果が誤ったものになる可能性は少なくなるであろう。これまで可変係数回帰モデルは理論的に定式化されているものは多様であったが，

実際に分析に適用するには，推定のためのプログラムを書かなければならないといった技術的な困難や分析の対象に関する情報がかなり多くないと結論を誤ってしまう等の問題点があった。しかしながら近年，パーソナルコンピュータでのパッケージ・ソフト(RATSやTSP)の開発にともなって可変係数回帰モデルによる分析が容易にできるようになってきている。このような分析が数多く行われ，有用な結果が可変係数回帰モデルによって導きだされることを期待して本稿を終えることにする。

参 考 文 献

Amemiya,T. (1985),*Advanced Econometrics*,Basil Blackwell.

Breusch, T. S. and A. Pagan (1979), " A Simple Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient Variation, " *Econometrica*,47,1287－1294.

Broemeling, L. D. and H. Turumi (1987), *Econometrics and Structural Change*, Marcel Dekker, New York.

Brown, R. L., Durbin, J. and J. M. Evans (1975), " Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time, " *Journal of Royal Statistical Society*, B 37, 149－192.

Cooley, T. F. and Ｅ. C. Prescott (1973), " An Adaptive Regression Model ", *International Economic Review*, 14, 364－371.

Cooley, T. F. and Ｅ. C. Prescott (1976), " Estimation in the Presence of Stochastic Parameter Variation, " *Econometrica*, 44, 167－184.

Gersch, W. and G. Kitagawa (1988), " Smoothness Priors in Time Series, " *Bayesian Analysis of Time Series and Dynamic Models*, ed. J. C. Spall, Marcel Dekker.

Harvey A. C. (1981), *Time Series Models* Philip AlIan.(『時系列モデル入門』,国友直人／山本拓訳,東京大学出版会,1985)

Hildreth, C. and J. P. Houck (1968), " Some Estimators for a Linear Model with Random Coeffcients ", *Journal of the American Statistical Association*, 63, 584-595.

廣松毅，浪花貞夫(1990)，『経済時系列分析』，朝倉書店

Kalman, R. E. (1960), " A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, " *Journal of Basic Engineering*, 35－45.

Kitagawa, G. and W. Gersch (1984), " A Smoothness Priors-state Modeling of Time Series with Trend and Seasonality, " *Journal of the American Statistical Association*, 79, 378－389.

Kitagawa, G. and W. Gersch (1985), " A Smoothness Priors Time Varying AR Coefficient Modeling of Non-stationary Time Series, " *IEEE Trans. Autom. Control*, AC－30, 48－56.

Krämer, W. (1989), *Econometrics of Structural Change*, Physica-Verlag, Heidelberg.

李志東(1990)，「可変パラメータ・モデルによる期待物価上昇率の計測」，「経済研究』，vol. 41，No.4，325－335.

李志東，加納悟(1991)，「日本における期待物価上昇率の計測と自然失業率仮説の検証」，*Journal of the Japan Statistica Society* vol. 21,No1,131－145

浪花貞夫(1986)，「トレンドを除去した経済時系列の非定常性について」，「金融研究』，日本銀行金融研究所.

Nicholls, D. F. and B. G. Quinn(1982),Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction, Lecture Notes in Statistics, 11, Springer-Verlag.

Pagan, A. (1980), " Some Identification and

Estimation Results for Regression Models with Stochastically Varying Coefficients," *Journal of Econometrics*,13,341－363.

Plackett,R. L. (1950), "Some Theorems in Least Squares," *Biometrika*,37,149-157.

Rosenberg,B. M. (1968), "Varying-Parameter Regression," Unpublished Ph. D. Dissertation,Department of Economics,Harvard University.

Rosenberg,B. M. (1972), "The Estimation of Stationary Stochastic Regression Parameters Reexamined," *Journal of the American Statistical Association*,67,650－654.

Rosenberg, B. M. (1973), "Random Coefficients Models The Analysis of a Cross Section of Time Series by Stochastically Convergent Parameter Regression," *Annals of Economic and Social Measurement*, 2, 399－428.

榊原英資，薬師寺泰蔵，新村保子，小泉一郎，山本裕一(1980)，『財政金融政策の効果とフィリップスカーブ』，経済研究所研究シリーズ，35，経済企画庁経済研究所.

Shiba, T. and H. Wago (1990), "Time Varying Parameter SUR Estimation of a Multifactor Asset Pricing Model," 第58回統計学会報告

斯波恒正(1991)，"Seemingly Unrelated Regressions with Nonlinearly Constrained Time Varying Parameters: Application to the APT," 第59回日本統計学会報.

Swamy, P. A. V. B. (1971), *Statistical Inference in Random Coefficient Regression Models*, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, 55, Springer-Verlag.

Zellner, A. (1971), *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, John Wiley &Sons.(『ベイジアン計量経済学入門』，福場庸／大澤豊訳，培風館，1986)

補論　カルマン・フィルター・アルゴリズム

カルマン・フィルター・アルゴリズムは，Kalman(1960)が提唱したものであり工学系の分野，特に制御理論にあってはその貢献度は多大なものがある。さらに応用面においても数多くの研究がなされている。

経済の分野への応用では，可変係数回帰モデルへの適用で多くの実証分析があるが，このカルマン・フィルター・アルゴリズムの可変係数回帰モデルへの適用は基本的には統計学の分野では以前から逐次最小二乗法として知られているものであり，このアルゴリズムを用いることの有用性は，経済理論をもとにして構築された各種統計モデルの推定手続きを効率的に行えることにある。以下では，カルマン・フィルター・アルゴリズムと係数の変動をARMAモデルで近似した場合の可変係数回帰モデルを示す。

一般に次の線形確率システムを考えるとき

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Z}_{t+1}=\mathbf{F}\mathbf{Z}_t+\mathbf{G}\mathbf{u}_t,\\
&\mathbf{y}_t\ \ =\mathbf{H}_t\mathbf{Z}_t+\varepsilon_t,\\
&\mathrm{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{u}_t\\ \varepsilon_t\end{pmatrix}(\mathbf{u}'_s\ \ \varepsilon'_s)\right]=\begin{pmatrix}\mathbf{Q} & 0\\ 0 & \mathbf{R}\end{pmatrix}\delta_{ts},\quad \mathrm{R}>0\\
&\mathrm{E}[\mathbf{u}_t\ \ \mathbf{Z}'_s]=0,\ \ \mathrm{E}[\varepsilon_t\mathbf{Z}'_s]=0,\ \ t\geq s,
\end{aligned}
$$

Z_tはn次元状態変数ベクトルであり，y_tはスカラーの観測値である。このシステムの係数であるF，G，H_t，は各々n×n行列，n×k行列，1×n行列とし，各行列の要素はすべて非確率変数とする。初期状態Z_0は既知の確率ベクトルとし(正規性を仮定する)，$\mathbf{u}_t$(k次元ベクトル)，ε_tに関しても同様に正規性を仮定する。このときZ_t，y_tはともに正規過程になっており，時刻1からtまでの観測データから生成されるσ-集合体を$\mathrm{Y}_t=\sigma\{\mathrm{y}_1,\ \mathrm{y}_2,\ \cdots,\ \mathrm{y}_t\}$とおくと$\mathrm{Y}_t$は情報増大系になっており，この情報増大系$\mathrm{Y}_t$に関する$\mathbf{Z}_{t+m}$の条件付き期待値$\mathrm{E}(\mathbf{Z}_{t+m}\mid\mathbf{Y}_t)$は$\mathbf{Z}_{t+m}$の線形最小分散推定値$\hat{Z}_{t/m}$と一致する。

換言すれば$\hat{Z}_{t/m}$はy_1，y_2，…，y_tで構成される線形空間上の直交射影である。

このとき，カルマン・フィルター・アルゴリズムを以下のように構成することができる。

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{Z}}_{t+1/t}&=\hat{\mathbf{F}}\mathbf{Z}_{t/t},\\
\hat{\mathbf{Z}}_{t/t}&=\hat{\mathbf{Z}}_{t/t-1}+\mathbf{K}_t\mu_t,\\
\mu_t&=\mathbf{y}_t-\mathbf{H}_t\hat{\mathbf{Z}}_{t/t-1},\\
\mathrm{S}_t&=\mathbf{H}_t\mathbf{P}_{t/t-1}\mathbf{H}'_t+\mathrm{R},\\
\mathbf{K}_t&=\mathbf{P}_{t/t-1}\mathbf{H}'_t\mathrm{S}_t^{-1}\\
\mathbf{P}_{t/t}&=[\mathbf{I}_k-\mathbf{K}_t\mathbf{H}_t]\mathbf{P}_{t/t-1},\\
\mathbf{P}_{t+1/t}&=\mathbf{F}\mathbf{P}_{t/t}\mathbf{F}'+\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}',\ \mathbf{t}=1,\cdots,\mathrm{T},
\end{aligned}
$$

初期条件；$\hat{\mathbf{Z}}_{1/0}=\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{P}_{1/0}=\mathbf{P}^*$.

さきに述べた線形確率システムでの$\mathbf{u}_t$，y_tは各々，システムへの入力，出力としてシステムの外部にあり，観測可能な変数であるのでシステムの外部変数という。これに対して，Z_tはシステムの内部変数とよばれる。このようにシステムの入出力関係を時間階差を１期だけにすることによって，今期の入力と今期のシステムの状態が来期のシステムの状態を決定するという最小単位の因果律を構成することが可能になる。このような最小単位の因果律を構成するためにはシステムの内部記述を明確にしなければならない。このシステムの外部記述が与えられたときに内部記述を求める問題は実現問題とよばれている。

一般に我々は対象としている問題に対して特定化されたモデルを上述したような状態変数を用いたモデル(状態空間モデル)として表現することができる。しかしながら，再構成された状態空間モデルはシステムによる次期の出力を決定する上で必要最小限の情報をもっていれば

十分であり，不必要な情報まで取り込むことはモデルの構成を複雑にするだけでなく，計算過程を非効率にし，さらに計算そのものを不可能にしてしまうこともある。また，異なる内部記述で同一の外部記述をもつシステムが無数に存在するが，上述の実現問題を解くには最小次元の実現を求めれば十分である。したがって，状態空間モデルを構成する際には必要最小次元のモデルを構成することが重要となる。このための条件として次に述べる可制御性，可観測性がある。

定義１　可制御性

初期状態を$Z_0=0$とする。このとき適当な制御入力$u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}$によって状態$Z_n$が$R^n$の任意の状態をとることが可能なとき(F, G)は可制御であるという。システムが可制御であるための必要十分条件はｎ×ｎｋ行列Wを

$$\mathbf{W}=[\mathbf{G}, \mathbf{FG}, \cdots, \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G}]$$

とおくと，rankW＝ｎである。

定義2可観測性

入力をゼロとしたときに，任意の初期状態Z_0が出力である観測値$y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$から一意的に決定されるとき，$(H_t, F)$は可観測であるという。このため必要十分条件はｎ×ｎ行列Mを

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2\mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_n\mathbf{F}^{n-1} \end{bmatrix}$$

とおくと，rankW＝nである。

上で示したシステムが２つの条件を満足するとき，(F, G, H_t)は最小実現となる。実際に，可変係数回帰モデルとして係数β_tの変動を求める場合には，その係数をある特定の時系列モデルで表現して，未知のパラメータを推定することになる。しかしながら，そのように特定化されたモデルの推定のための計算量は，かなり大きなものとなる。そこで計算を効率的にするために，このカルマン・フィルター・アルゴリズムを用いることになる。

ここでは例として，係数の変動をARMA(p, q)モデルで表現することができると仮定した場合を示す。このとき係数の変動を表現した式は以下のようになる。ただし，m＝max(p, q＋1)とする。

$$\beta_t=\phi_1\beta_{t-1}+\cdots+\phi_m\beta_{t-m}+\mathbf{u}_1+\Psi_1\mathbf{u}_{t-1}+\cdots+\Psi_{m-1}\mathbf{u}_{t-m+1}$$

さらに上記のARMAモデルを状態空間モデルに変形すると

$$\mathbf{Z}_{t+1}=\mathbf{F}\mathbf{Z}_t+\mathbf{G}\mathbf{u}_{t+1}$$
$$\mathbf{y}_t=\mathbf{H}_t\mathbf{Z}_t+\varepsilon_t$$

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} \phi_1 & I_k & 0_k & \cdots & 0_k \\ \phi_2 & 0_k & I_k & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0_k \\ \phi_{m-1} & 0_k & \cdots & 0_k & I_k \\ \phi_m & 0_k & & \cdots & 0_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}=\begin{pmatrix} I_k \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\phi_i=\mathrm{diag}(\phi_{i1}, \cdots, \phi_{ik})$$
$$\Psi_j=\mathrm{diag}(\Psi_{j1}, \cdots, \Psi_{jk})$$
$$I_k=\mathrm{diag}(1, \cdots, 1)$$
$$0_k \; ; k\times k \text{ null matrix}$$
$$\mathbf{H}_t=(\mathbf{x}'_t, 0, \cdots, 0) \; ; 1\times mk \text{ matrix}$$
$$\mathbf{Z}'_t=(\beta'_t, \alpha'_{2t}, \cdots, \alpha'_{mt})$$

Z_tはｍｋ次元状態変数ベクトルとする。しかしながら上記の状態空間表現は必ずしも可制御・性，可観測性の条件を満足するとは限らない。

アルゴリズムの初期条件であるZ^*，P^*，及び

係数変動を近似したARMAモデルの係数Φ_i，Ψ_j，$i=1$，…，m，$j=1$，…，$m-1$，さらに$\mathbf{Q}$, Rが既知の場合には，カルマン・フィルター・アルゴリズムを用いることにより状態変数$\mathbf{Z}_t$の推定値の計算を効率的に行うことができ，得られた推定値も最小分散という意味において，よい推定値である。したがって，アルゴリズムに必要な初期条件等が既知である場合には，カルマン・フィルター・アルゴリズムを用いることで効率的な計算と通常，我々が最小二乗法を用いて得られる推定量と同等という意味でよい推定値を得ることができるのである。しかしながら，初期条件等があらかじめ既知であることは，経済の分野では希であり，なんらかの方法でそれらを求めることが必要になる。