

日本とアメリカの短期金利の推定について^{*1}

和田 賢治^{*2}

要 約

この論文では、日本の短期金利を推定した既存研究をレビューし、これらの研究に存在する問題点を克服したデータおよび計量経済学的手法を用いて短期金利の推定をおこなう。その際、金利推定に用いられる計量経済学的手法の歴史的変遷およびその特徴についても簡単に解説する。

I. はじめに

この論文では、日本の短期金利の確率過程を推定した論文をレビューします。そして、これらの論文における問題点を克服した計量経済学的手法を用いて、日本の短期金利を長期間のデータから推定し、同期間のアメリカの短期金利との比較を行います。その際、金利の種類、標本期間、標本周期、金利の関数型及び推定方法に注意を払います。短期金利の適切なモデル化はいくつかの理由によって重要です。第一に、多くの企業は短期及び長期において金利リスクにさらされています。金利の変動リスクをヘッジするためには、金利の変動を予測する必要があります。このため短期及び長期の標本期間から金利を適切に推定することは大切です。第二に、市場においても相対取引においても様々な金利デリバティブが活発に取引されています。これらのデリバティブの理論価格を導き出すためには、金利を適切にモデル化する必要があります。

日本の短期金利の性質は、3－5年といった

短期間については、過去20年間ににおいてかなり研究されてきました。しかし、筆者の知る限りその長期間の性質についてはこれまで考察されてきていませんでした。また短期金利の確率過程の推定に用いられる関数型も一部の例外を除き、後述する CIR タイプと Vasicek タイプがほとんどでした。そこでこの論文の後半では、Wada (2003)を要約する形で、日本の短期金利について、短期間および長期間のデータからその確率過程をより一般的な関数型を用いて推定し、その性質をアメリカの同時期の短期金利の確率過程の性質と比較します。

次の節では、コールレートを含む短期金利の推定を行った既存研究のサーベイを行います。Ⅲ節では第一に、計量経済学の推定方法をパラメーターという観点からパラメトリックな方法、セミパラメトリックな方法、ノンパラメトリックな方法に分けます。第二に、代表的な金利モデルとその分布について述べます。第三に、金利モデルの確率過程の推定において、パラメト

*1 この論文には慶應義塾大学牧厚志教授から大変丁寧なコメントを頂戴致しました。

*2 慶應義塾大学大学院経営管理研究科助教授

リック・セミパラメトリック・ノンパラメトリックな方法がいかに用いられてきたかを解説します。第四に、この論文で用いる Conley et al. (1997) のセミパラメトリックな方法の説明を

行います。IV節では、Wada (2003) の貢献及び推定結果の要約を行います。V節では結論を述べます。

II. 既存研究

日本の短期金利の確率過程を推定した実証研究は数多くありますが、以下では筆者の調べた中で代表的な論文についてレビューを行います。関連した分野で金利の期間構造の実証研究がありますが、この論文では短期金利の推定に焦点を合わせるため、金利の期間構造のレビューは行いません。

以下では具体的に日本の様々な金利を推定した論文のサーベイを行います。Campbell and Hamao (1991) は1980年代の日本の短期金利および長期金利について同時に定量的分析を行った初期の論文です。1980年11月から1990年8月までの期間を対象とし、標本期間をさらに二つ（1980年11月から1985年7月までと、1985年8月から1990年8月まで）に分けています。短期金利としては月次の現先レート（1, 2, 3ヶ月物）を用いています。そして以下の結果を得ています。第一に、短期金利の性質は1985年頃に変化したことです。1985年以前は、短期金利は平均回帰の傾向を示し、過去のデータから短期金利の変化を予測可能ですが、1985年以後はランダムウォークの傾向を示しています。そしてこの変化は金融政策の変化に起因していると述べています。第二に、イールドカーブの短期金利の予測力が1985年頃変化したことです。1985年以前は2, 3ヶ月物と1ヶ月物の現先レートのスプレッドは、1ヶ月物の現先レートの変化をほとんど予測できませんでした。1985年以降は、予測力が高まっています。この論文では金利過程の形状の推定自体は行われていません。Tse (1995) は日本を含む11カ国について金利過程の推定を行っています。日

本については1983年4月から1994年5月の The Economist に掲載されている月次金利データを使用しています。推定された式は

$$dr_t = (a_0 + a_1 r)dt + kr^\gamma dB_t \quad (1)$$

及びこの式のパラメータに制限を付けた式です。ここで $(a_0 + a_1 r)$ の部分をドリフト項、 kr^γ の部分をディフュージョン項と呼びます。金利データの基本統計量、パラメーターの推定、モデル間の比較を行っています。データは少し古いですが、様々な国の金利の比較を行う場合には参考になります。小暮 (1996) では1982年1月から1991年12月までの月次の翌日物コールレートを用いて短期金利の推定を行っています。推定式はTse (1995) と同一です。小暮 (1996) では、経済学における実証分析に特有の離散時間標本から確率微分方程式を推定する際の問題について注意を喚起し、その解決を行っています。経済学において金利のモデル化に連続時間のモデルを使う場合、実際に観察される標本は離散ですから連続時間のモデルのパラメーターを推定するのは困難です。従って連続時間モデルを離散化し、その離散時間モデルを離散時間標本から推定するということが一般的に行われてきました。しかし、離散時間モデルは連続時間モデルの近似にすぎず、前者のモデルのパラメーターは、後者のモデルのパラメーターと同一ではありません。従ってこのようなずれをふせぐため、この論文では連続時間モデルの離散化を行わない推定方法を提唱し、連続時間モデルを離散化した上で得られた離散時間モデルの

パラメーターの推定値と、連続時間モデルを直接推定することによるパラメーターの推定値を比較しています。詳細は Kogure (1997) をごらん下さい。刈屋・神園 (1997) では1989年1月3日から1993年7月30日の間の翌日物有担保コールレート、手形レート (1, 2, 及び3ヶ月物)、日本円 CD (月中, 1ヶ月及び3ヶ月物) そして現先レート (1ヶ月物 1-month) 及び米国の様々な金利を用いました。この論文では(1)式において γ 等のパラメータに制限をつけないものを「CIR 型モデル」と呼び、 $\gamma = 0.5$ の場合を「CIR モデル」と呼び区別をしています。そして CIR 型モデルに属する様々なモデル ($\gamma = 0.5$ ならば「CIR モデル」で $\gamma = 1$ なら「Vasicek モデル」) 間の比較ではなく、「CIR 型モデル」自体のパフォーマンスを考察しました。そして「CIR 型モデル」は実際に観察される金利変動のモデルとしては限界があることを示しました。Kii (1998a) は1989年10月2日から1994年1月31日の間の日次 CD (3ヶ月物) を標本として用いています。ちなみにデータはビッドとアスクプライスの終値平均となっています。

ところで、ノンパラメトリックな方法では、標本数が小さいと推定量の小標本性質は悪いということが、Chapman and Pearson (2000) の研究から判明しています。この Kii (1998a) 論文では標本数は1069なので、推定量の性質は良くないかもしれません。Kii (1998b) では同一期間の同一データについて考察していますが、この論文での焦点はディフュージョン項です。Shi and Kaguraoka (2000) は1995年10月20日か

ら1998年12月2日までの間の LIBOR (1, 2, 3, 6, 9 及び12ヶ月物) を、幾何自己回帰モデルをドリフト項に用いることによって推定しています。この論文では AIC を用いてモデルの選択を行っています。Shoji and Ozaki (1996) は、非線形のドリフト項を局所線形化モデルについて最尤法を用いて推定しています。そして AIC を用いてモデル選択を行っています。この論文では1977年2月から1992年12月までの間の月次 CD (1ヶ月物) を推定し、この期間の CD については、ドリフト項が線形であることを示しています。

上記の論文の標本期間にはいくつかの問題があります。第一に日本の短期金利の平均と分散は、1990年代の前半と後半では後半の方が著しく低いということがあげられます。従って、日本の金利の長期変動を考察したい場合には、どちらかの期間にのみ標本期間を限るのには問題があります。

第二に、アメリカの短期金利を推定した多くの論文は非常に長い標本期間を用いています。たとえば Conley et al. (1997) では1970年1月2日から1997年1月29日までの標本期間を用いています。この標本期間は30年近くという長期間にわたる物です。日本の短期金利の長期的変動をアメリカの短期金利の長期的変動と比較するためには、上記の期間は短すぎます。

以上の点をふまえて、この論文では、最も長い標本期間を用います。具体的には、無担保翌日物コールレートのデータは1985年1月31日から得られるので、このコールレートをこの論文では用います。

Ⅲ．金利推定にまつわる計量経済学の手法の解説

Ⅲ－１．パラメーターの次元による推定方法の分類

この章では、計量経済学における推定方法を、パラメーター空間という観点から3つに分類し、

それらの違いについて簡単に説明します。

その3つの分類というのは、1)パラメトリックな方法 (parametric method), 2)セミパラメトリックな方法 (semiparametric method), 3)ノン

パラメトリックな方法 (nonparametric method) です。これらの方法の相違を、気温とアイスクリームの購買量の例で説明します。はじめにパラメトリックな方法です。

$$Y_i = \beta X_i + u_i$$

$$u_i \sim N(0, \sigma^2)$$

アイスクリームの購買量(Y_i)を気温(X_i)で説明する場合、気温とアイスクリームの関係の関数型が上記のように分かっている、かつ誤差項の分布もわかっていると仮定します。パラメトリックな方法は、関数型が線形の場合と非線形の場合の両方に用いることができますが、簡単化のため線形の場合を考えます。上記の例の場合、未知のパラメーターは β と σ^2 の二つです。これらはたとえば3と5という実数ですから、パラメーター空間 (積空間) は有限次元です。数式で書くと、

$$(\beta, \sigma^2) \in R \times R$$

です。ここで R は実数空間です。パラメトリックな方法の代表例として線形回帰分析および非線形回帰分析があります。

次にセミパラメトリックな方法です。

$$Y_i = \beta X_i + u_i$$

$$E[u_i] = 0$$

$$V[u_i] = \sigma^2$$

アイスクリーム購買量と気温の関係の関数型が上記のように分かっているが、誤差項の分布は分からない場合です。この場合未知のパラメーターは (β, σ^2) 及び誤差項の分布です。 (β, σ^2) はパラメトリックな場合同様、実数でパラメーター空間も有限次元です。しかし誤差項の分布は実数ではなく、様々な形を取りうる関数 (正規分布、パレート分布等) です。従ってこれに対するパラメーター空間は関数空間であり、無限次元です。ですが、ここで関心のあるのはあくまで (β, σ^2) という実数パラメータであって、誤差項の分布という関数ではありません。セミパラメトリックな方法は、パラメーター空間は有限次元と無限次元に分かれるものの、有限次元のパラメーターの方に関心がある場合を指します。セミパラメトリックな方法の代表例としてGMMがあります。

最後にノンパラメトリックな方法です。

$$Y_i = f(X_i) + u_i$$

アイスクリーム購買量と気温の関係の関数型が分かていなくて、かつその関数型に関心があるとします。すると、パラメーター空間は無限次元です。ノンパラメトリックな方法はこのような場合をさします。ノンパラメトリックな方法の代表例としてカーネルをもちいた方法があります。

まとめると以下ようになります。

	パラメーター空間	推定対象のパラメーター空間
パラメトリックな方法	有限次元	有限次元
セミパラメトリックな方法	無限次元+有限次元	有限次元
ノンパラメトリックな方法	無限次元	無限次元

Ⅲ－２．代表的な金利モデルとその分布

金利の推定方法として、1970年代においては主にパラメトリックな方法が、1980年代においてはパラメトリックな方法とセミパラメトリックな方法が、そして1990年代にはセミパラメ

トリックな方法とノンパラメトリックな方法が用いられていました。これはそれぞれの推定方法の発展と軌を一にしています。この論文のⅣ節ではセミパラメトリックな方法を金利の推定に用いますが、なぜセミパラメトリックな方法を

用いるかを、これら3つの方法の歴史を振り返ることで説明します。

まずはじめに記号の説明です。金利は以下のようにモデル化されることが多いです。ここで B_t は1次元のブラウン運動で、その性質として標本パスの連続性とマルコフ性を持っています。また $\mu(r)$ はドリフト項、 $\sigma(r)$ はデフュージョン項と呼ばれます。以下の式自体を (μ, σ) ブラウン運動と呼ぶことにします。

$$dr_t = \mu(r)dt + \sigma(r)dB_t \quad (2)$$

1980年代においては、金利のドリフト項とデフュージョン項をモデル化する際に、パラメータの少ない関数型が用いられていました。Vasicek および Cox, Ingersoll and Ross タイプ（以下 CIR タイプ）のモデルが代表的です。両者ともドリフト項は線形で関数型は同一ですが、デフュージョン項の関数型は異なっていました。詳細は Vasicek (1977) 及び Cox, Ingersoll and Ross (1985) をご覧下さい。具体的には、

$$dr_t = a_0(a_1 - r)dt + kr^\gamma dB_t \quad (3)$$

で $\gamma = 0$ が Vasicek タイプで $\gamma = 0.5$ が CIR タイプです。つまり

$$dr_t = a_0(a_1 - r)dt + kdB_t$$

が Vasicek タイプであり、その条件付きモーメントは以下の式で与えられる事が分かっています。

$$E[r_T | r_t] = a_1 + (r_t - a_1)\{\exp - a_0(T - t)\}$$

$$V[r_T | r_t] = \frac{k^2}{2a_0} \{1 - \exp - 2a_0(T - t)\}$$

またその周辺分布 $\rho(r_T)$ および条件付き分布 $P(r_T | r_t)$ は両方とも正規分布であることが分かっています。

次に、

$$dr_t = a_0(a_1 - r)dt + k\sqrt{r}dB_t$$

が CIR タイプであり、その条件付きモーメントは以下の式で与えられる事が分かっています。

$$E[r_T | r_t] = a_1 + (r_t - a_1)\{\exp - a_0(T - t)\}$$

$$V[r_T | r_t] = \frac{r_t k^2}{a_0} \{\exp - a_0(T - t) - \exp - 2a_0(T - t)\} + \frac{a_1 k^2}{2a_0} \{1 - \exp - a_0(T - t)\}^2$$

またその周辺分布 $\rho(r_T)$ はガンマ分布であり、条件付き分布 $P(r_T | r_t)$ は非心カイ自乗分布であることが分かっています。

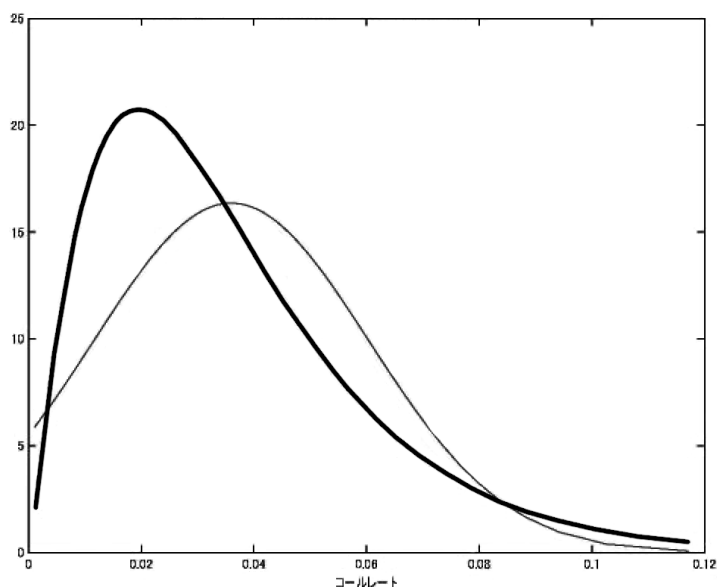
これらふたつの定式化が頻繁に用いられてきた理由は、上述のように周辺分布及び条件付き分布の関数型が解析的に分かっているからです。 (μ, σ) ブラウン運動では、ドリフト項とデフュージョン項を決定するとその確率過程の全ての性質が決定されます。具体的には、ドリフト項とデフュージョン項は、周辺分布及び条件付き分布と同じ情報を持っています。ある特定の (μ, σ) ブラウン運動について語る場合、背後にはそれに対応する周辺分布及び条件付き分布が存在するという事を理解するのは大切です。ここでは少し脱線してピアソンシステムについて説明し、それを用いて (μ, σ) ブラウン運動のドリフト項、デフュージョン項及び周辺分布の3者の関係について述べます。

ピアソンシステムとは以下で与えられる微分方程式の事をいいます。ここで $\rho(r_T)$ は周辺分布関数です。このような微分方程式で表される周辺分布を持つ分布型をピアソンシステムに属する分布型といいます。

$$\frac{d\rho(r)}{dr} / \rho(r) = \frac{ar + b}{cr^2 + dr + e}$$

上記の係数は、平均、分散、尖度、歪度の4つのモーメントで表すことができます。ピアソ

図1 正規分布 “——” 及びガンマ分布 “—” の密度関数 1985/07/31
—1999/01/04



ンシステムに属する分布型は $cr^2 + dr + e$ の根によって分類されます。例として正規分布，カイ自乗分布，スチューデント t 分布，ベータ分布，パレート分布等があります。

ピアソンシステムと (μ, σ) ブラウン運動のドリフト及びディフュージョン項には以下の関係があることが分かっています。

$$\frac{d\rho(r)}{dr} / \rho(r) = \frac{ar + b}{cr^2 + dr + e} = \frac{2\mu(r, t) - \partial\sigma^2(r, t)/\partial r}{\sigma^2(r, t)} \quad (4)$$

従って， (μ, σ^2) が与えられれば $\frac{d\rho(r)}{dr} / \rho(r)$ つまり周辺分布が一意に定まり，逆に $(\frac{d\rho(r)}{dr} / \rho(r), \sigma^2)$ つまり周辺分布と σ^2 が与えられれば μ が一意に定まります。この事から (μ, σ^2) と $(\frac{d\rho(r)}{dr} / \rho(r), \sigma^2)$ は同一の情報を持っている事が分かります。

以上で (μ, σ) ブラウン運動のドリフト項，ディフュージョン項，および周辺分布の関係について述べました。

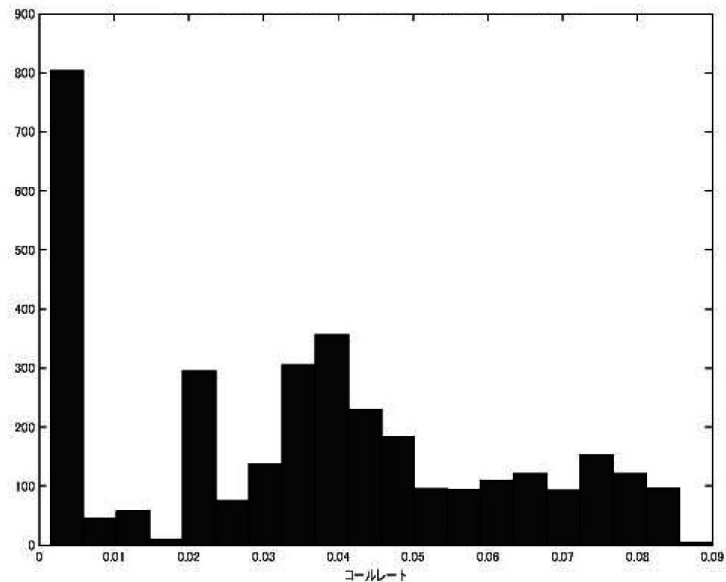
III-3. 金利推定方法の変遷

金利についての実証分析では，金利の実際のデータから得られる周辺分布及び条件付き分布の形状は，CIR タイプまたは Vasicek タイプのドリフトとディフュージョン項を持つ確率過程に対応する周辺分布及び条件付き分布の形状とは異なる事が分かってきました。

この点について日本の短期金利の現実のデータを使って説明します。図1は無担保翌日物コールレート（標本期間1985年7月31日－1999年1月4日）の実際のデータから平均と分散を計算し，それと等しい平均（0.036）及び分散（0.0244）を持つ正規分布及びガンマ分布を描いた物です。

図2は同一のデータからヒストグラムを描いたものです。この図2と図1はかなり形状が異なることが分かります。従って，短期金利の確率過程として Vasicek タイプや CIR タイプを仮定すると，その定式化の背後にある周辺分布は実際の金利のデータから得られる周辺分布とはかなりずれている事が分かります。よって Va-

図2 日本のコールレートのヒストグラム 1985/07/31–1999/01/04 標本数3387



sicek タイプや CIR タイプモデルのドリフト項とディフュージョン項の関数型に問題があることが分かってきました。このようなモデルとデータの非整合性から、より自由度の高い関数型をもった金利のモデル化が必要となってきています。上記(2)式でパラメータに制限をつけることによって得られる様々な金利モデル間の比較については、Chan et al. (1992) をごらん下さい。

パラメトリックおよびセミパラメトリックな方法が人気があったのには二つの理由があります。一つ目は、推定されるモデルの定式化が正しい場合には、推定量が不偏かつ有効推定量になるからです。二つ目は、時系列データの分野において推定量の漸近的性質が広く研究されていたからです。従って多くの論文ではパラメトリックまたはセミパラメトリックな方法を用いて金利過程の推定がなされてきました。

一方においてノンパラメトリックな方法はファイナンスの分野においては少なくとも1980年代にはほとんど用いられませんでした。この理

由は単純で時系列データに用いることのできる推定量の漸近的性質がノンパラメトリックな方法ではほとんど研究されてこなかったからです。しかしこの状況は1990年代になって大きく変わります。1990年代の初期に Fan と Gijbels が時系列データに用いることのできるノンパラメトリックな方法について一連の論文を発表しました。詳細は Fan (1992), Fan (1993) 及び Fan and Gijbels (1992) をごらんください。彼らの研究を元にして、1990年代にファイナンス分野では金利過程の推定にノンパラメトリックな方法が用いられるようになりました。詳細は Ait-Sahalia (1996a, b) 及び Stanton (1997) をごらんください。

しかし1990年代も終わりになって、状況がまた一転しました。ノンパラメトリックな方法は、標本数が膨大にある場合には推定量が頑強的性質 (robustness) をしめすものの、サンプル数が少ない場合には、推定量に信頼がかけないということを示す論文が書かれたからです。II 節でも簡単に触れましたが、Chapman and Pearson

(2000)はその論文の356頁で以下のように述べています。「Stantonによって提唱されたカーネルを用いた推定量を、CIR過程から繰り返し得られた標本に厳密に用いると、Stantonで得られたのと全く同一な、金利が高い局面で非線形な金利のドリフト関数が推定された。(シミュレーションの元になったCIR過程の)本当のドリフト関数は線形であるにもかかわらずだ。」(括弧内は筆者の補足)。この論文では、また同じ頁において以下のように述べられています。「しかし、見かけ上の(ドリフト関数の)非線形性は現実に得られる金利のデータ数の2倍の標本数から(シミュレーションによって推定された結果)にもみられる」。

このことをもう少し詳しく説明します。CIR過程というのはドリフト項が線形です。このCIR過程を用いてシミュレーションによって標本をえます。ここで、この標本がCIR過程から得られているということを棚上げして、Stantonによって提唱された標準的なノンパラメトリックな方法でドリフト項を推定すると、なんと推定されたドリフト項の関数型が非線形になるということです。つまり、ノンパラメトリックな方法を用いると本来線形なドリフト項を非線形なものとして間違っ推定してしまうという大きな問題があることが判明したのです。日本とアメリカでは金利過程といっても比較は簡単にはできませんが、しかしアメリカの金利データの標本数(これを2倍にしてもノンパラメトリックな方法では上記の問題がおこる)と日本の金利データのサンプル数を比べると、後者は前者のさらに半分です。ですから、日本の金利データにノンパラメトリックな方法を用いると上記の見かけ上の結果につながるおそれがあります。従ってこの論文ではセミパラメトリックな方法を用いて推定を行いました。

III-4. Conley et al. (1997) の説明

この節では、Conley et al. (1997) らによって提唱された、週末や祝日による欠損データの影響を考慮したセミパラメトリック推定方法に

ついて説明します。この方法では、背後にある定常な連続ディフュージョン過程から、離散の標本が観察されると仮定します。短期金利過程のドリフト項とディフュージョン項が以下の関数型をしていると仮定します。

$$\begin{aligned} dx_t &= \mu(x_t)dt + \sigma(x_t)dB_t \\ &= (a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1x + a_2x^2)dt + kx^\gamma dB_t \end{aligned}$$

ここで $\{B_t\}$ は一次元の標準ブラウン運動です。Conley et al. (1997) らの定式化に従って、サブオーディネーションという方法を用いて、実際の時間と経済的時間にずれがある場合を考慮します。詳細はFeller (1971) の345-349ページをごらんください。以下の関係が背後にある金利過程と実際に観察される金利過程に存在すると仮定します。

$$r_j = x_{\tau_j}$$

Conley et al. (1997) らはこの定式化に二通りの解釈を与えました。一つ目は、観察されない何らかのファクターがあるという解釈で二つ目は、欠損データを処理する方法という解釈です。この論文では二つ目の解釈を採用します。Conley et al. (1997) では背後にある金利過程 $\{x_t\}$ と標本過程 $\{\tau_j\}$ が統計的に独立ならば、背後にある金利過程と実際に観察される金利過程の定常分布が等しくなる事が証明されています。以下では実際に観察された金利過程を用いて話をすすめます。

$$\begin{aligned} dr_t &= (a_{-1}r^{-1} + a_0 + a_1r + a_2r^2)dt + kr^\gamma dB_t \\ &= z^Tadt + r^\gamma dB_t \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $z^T = (r^{-1} \ 1 \ r \ r^2)$, $a = (a_{-1} \ a_0 \ a_1 \ a_2)^T$, $\gamma = 1, 2, 3, 4, k = 1$ (標準化による) であり、 T は行列の転置記号です。Conley et al. (1997) らはジェネレーターと呼ばれるテスト関数を用いる新しい推定方法を提唱しました。彼らはある種のなめらかな関数に対して、以下の式が成

立することを証明しました。

$$G = E[\phi' z^T]$$

$$E[\mu(x)\phi'(x) + 0.5\sigma^2(x)\phi''(x)] = 0$$

ここで $\phi'(r)$ と $\phi''(r)$ はテスト関数の一次および二次の導関数です。この式に対する直感的説明は、 $\{x\}$ が定常過程なので、期待値をとった $E[\phi(x)]$ は時間に対して定数になり、その結果時間に対する一次の導関数は0になるということです。この式は定常分布に対して成立する式なので、実際に観察される金利過程についても成立することが証明できます。

$$E[\mu(r)\phi'(r) + 0.5\sigma^2(r)\phi''(r)] = 0 \quad (6)$$

詳細は Conley et al. (1997) の3章をご覧ください。上の式のドリフト項には4つの未知のパラメーターが存在するので、ディフュージョン項のパラメーターのそれぞれの値を所与として、4つのテスト関数を用いればドリフト関数 $(\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$ のパラメーターを推定することができます。以下のパラメーターの推定量およびそれらの漸近分布は Conley et al. (1997) によって求められております。

$$a = -E[\phi' z^T]^{-1} * 0.5E[\phi'' \sigma^2]$$

$$\sqrt{T}(\hat{a} - a) \sim N(0, G^{-1}\Lambda G^{-1T})$$

ここで Λ は確率過程 $\mu(r)\phi'(r) + 0.5\sigma^2(r)\phi''(r)$ の周期0におけるスペクトル分布です。この論文では正規分布をテスト関数として用います。詳細は Conley et al. (1997) の4.4章をご覧ください。正確には、正規分布の密度関数を ϕ' に用い、その一次の導関数を ϕ'' に用います。上記の母集団についてのモーメント条件は、以下のサンプルについてのモーメント条件に書き直すことができます。

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\Phi'(r_t) z^T a + \frac{1}{2} \Phi''(r_t) \sigma^2(r_t)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

ここで

$$\Phi'(r_t) = (\phi_{x,n}^{1'}(r_t) \phi_{x,n}^{2'}(r_t) \phi_{x,n}^{3'}(r_t) \phi_{x,n}^{4'}(r_t))^T \quad (8)$$

$$\Phi''(r_t) = (\phi_{x,n}^{1''}(r_t) \phi_{x,n}^{2''}(r_t) \phi_{x,n}^{3''}(r_t) \phi_{x,n}^{4''}(r_t))^T \quad (9)$$

$$\Phi_{x,n}^i = \phi^i\left(\frac{r-x}{n}\right) \quad (10)$$

$$\sigma^2(r) = r^\gamma \quad (11)$$

です。ドリフト項には4つの未知パラメーターが存在するので、4つの異なったテスト関数を用います。上記の4つの連立方程式を反転することによって、それぞれの値に対して、 $(\hat{a}_{-1}, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2)$ の推定値が求まります。

IV. 実証結果

IV-1. Wada (2003) の貢献

この節では、既存研究の問題点を克服した手法を用いて無担保翌日物コールレートの推定を行います。対象期間は1985年7月31日から1999年1月4日です。具体的には、Conley et al.

(1997) によって提唱された週末や祝日による欠損データを考慮したセミパラメトリックな方

法を用いて推定を行います。この節の元になった Wada (2003) の貢献は以下の3点です。筆者の知る限りこのような考察はこれまでされてきませんでした。

第一に、日本銀行が政策手段としてモニターしている日次コールレートを長期的変動という観点から考察することです。日本の日次コール

表1 コール市場の変遷

気配値からオファービッド制への変化

日付	タイプ	満期	額
1998/11/1	無担保コールレート	2週間以上	NA
1989/11/17	無担保コールレート	翌日から1週間	NA
1990/11/21	有担保コールレート	全て	5億円以上

集計化の変化

日付	タイプ	満期
1994/2/16	無担保コールレート	1ヶ月から3ヶ月
1994/10/17	無担保コールレート	1週間
1995/5/16	他の全てのレート	

レートを考察するほとんどの論文においては標本期間は3－5年と短くなっています。この論文においては短期間におけるコールレートの変動と長期間におけるそれは異なるということが示されます。従って短期の標本期間から推定されたコールレートを、たとえば政策変更の長期的影響を考察するカリブレーションに用いるならば、誤った結果を得る可能性があります。短期金利としてのコールレートはマクロ経済学で用いられる多くのカリブレーションモデルにおいて必須の要素であって、もしどんな政策であれその変更の長期的影響を考察したいならば、コールレート自体も長期の標本期間を用いて推定すべきです。

第二に、得られる中で最も長い標本期間を用いてコールレートを推定することによって、その短期的変動と長期的変動の特徴を比較する事です。また短期金利の短期および長期的変動の国際比較を行うこともできます。たとえば Conley et al. (1997) は1970年1月2日から1997年1月29日の間のフェデラルファンドレートの特徴を考察しました。フェデラルファンドレートは米国連銀が金融市場において注目する短期金利であることをここで述べておきます。日本の短期金利の長期間のデータなくしては、コールレートの長期変動の特徴とフェデラルファンドレートの長期変動の特徴を比較することはできません。この節ではこれらの金利の長期変動

の特徴はかなり異なるということが判明しました。

第三に、後に述べる理由によって標本期間が部分標本期間に分けられますが、それぞれの部分標本期間におけるコールレートの性質を比較することができる事です。

IV－2．Wada (2003) のデータの説明と結果

無担保翌日物コールレートの日次標本期間は1985年の7月31日から1999年の1月4日までです。年末(12月)と会計期末(3月, 9月)における短期金利の急激なジャンプの影響をなくすために、3月, 9月及び12月の最終の取引日のデータは標本から除外しました。そして標本期間をさらに3つの部分期間に分けました。第1の部分期間はコール市場が再び開設された最初の日から始まり、1989年の1月13日で終わっています。第2の部分期間は1989年の1月17日から始まり、1995年の5月15日で終わっています。そして第3の部分期間は1995年の5月16日から始まり、1999年の1月4日で終わっています。これらの部分期間はほぼ1980年代の後半、1990年代の前半及び1990年代の後半に当たっています。標本期間をこれらの3つの部分に分けた理由は以下の通りです。

まずはじめに、1989年の1月17日以降、無担保翌日物コールレートについてオファービッド方式が導入されました。コール市場へのオフ

表2 日本のコールレートのドリフトの推定値

			$\hat{a}_{-1}$	$\hat{a}_0$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$
第1 部分期間 1985-1988	$\gamma=1$	平均	1.23E+02	-7.78E+03	1.58E+05	-1.03E+06
		標準誤差	3.34E+00	2.16E+02	4.49E+03	2.98E+04
	$\gamma=2$	平均	4.87E+00	-3.08E+02	6.27E+03	-4.08E+04
		標準誤差	1.29E-01	8.34E+00	1.73E+02	1.15E+03
	$\gamma=3$	平均	1.99E-01	-1.26E+01	2.57E+02	-1.67E+03
		標準誤差	5.10E-03	3.30E-01	6.87E+00	4.57E+01
	$\gamma=4$	平均	8.52E-03	-5.41E-01	1.10E+01	-7.18E+01
		標準誤差	2.08E-04	1.35E-02	2.81E-01	1.87E+00
第2 部分期間 1989-1994	$\gamma=1$	平均	4.34E+01	-3.51E+03	8.32E+04	-5.91E+05
		標準誤差	6.05E+00	4.91E+02	1.17E+04	8.28E+04
	$\gamma=2$	平均	1.86E+00	-1.51E+02	3.57E+03	-2.54E+04
		標準誤差	2.57E-01	2.09E+01	4.96E+02	3.52E+03
	$\gamma=3$	平均	9.88E-02	-8.00E+00	1.90E+02	-1.35E+03
		標準誤差	1.36E-03	1.11E+00	2.62E+01	1.86E+02
	$\gamma=4$	平均	6.07E-03	-4.92E-01	1.17E+01	-8.29E+01
		標準誤差	8.35E-04	6.78E-02	1.61E+00	1.14E+01
第3 部分期間 1995-1999	$\gamma=1$	平均	-4.88E-01	3.25E+02	-6.20E+04	3.25E+06
		標準誤差	6.04E-03	3.68E+00	6.79E+02	3.52E+04
	$\gamma=2$	平均	-2.21E-03	1.46E+00	-2.78E+02	1.46E+04
		標準誤差	2.85E-05	1.74E-02	3.23E+00	1.67E+02
	$\gamma=3$	平均	-9.91E-06	6.54E-03	-1.24E+00	6.52E+01
		標準誤差	1.36E-07	8.42E-05	1.57E-02	8.08E-01
	$\gamma=4$	平均	-4.41E-08	2.89E-05	-5.48E-03	2.92E-01
		標準誤差	6.66E-10	4.20E-07	7.90E-05	4.07E-03
全期間 1985-1999	$\gamma=1$	平均	1.29E-01	-3.45E+01	1.39E+03	-1.35E+04
		標準誤差	3.98E-04	1.01E-01	3.86E+00	3.94E+01
	$\gamma=2$	平均	6.27E-03	-1.68E+00	6.75E+01	-6.47E+02
		標準誤差	2.01E-05	5.10E-03	1.87E-01	1.81E+00
	$\gamma=3$	平均	3.62E-04	-9.70E-02	3.84E+00	-3.64E+01
		標準誤差	1.23E-06	3.15E-04	1.14E-02	1.04E-01
	$\gamma=4$	平均	2.26E-05	-6.05E-03	2.38E-01	-2.23E+00
		標準誤差	8.29E-08	2.13E-05	7.63E-04	6.80E-03

アービッド方式導入については表1をご覧ください。気配値方式においては、短資会社によって参照されるレートによってコールレートが決定されていました。オファービッド方式においては、資金の出し手と取り手が同意する値に基づいてコールレートが決定されます。次に、1995年5月16日以降、コールレートの集計方式が変わりました。それ以前は、取引額が日中最大のレートを用いていましたが、これ以降それぞれ日中全取引の加重平均レートに変更されました。これらのふたつの変化はコール市場における大きな制度的変更でしたので、この論文では標本

期間を3つに分けました。

表2は日本のコールレートのドリフト項($a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1x + a_2x^2$)のパラメーター推定値($\hat{a}_{-1}, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$)です。表2には標準誤差も記されています。推定値 $\hat{a}_2$ はすべての期間かつすべての γ の値に対して有意です。従って、日本のコールレートのドリフト項は常に非線形である事が分かります。日本のコールレートのドリフト項の形状をそれぞれの部分期間及び全期間について比較すると、推定値 $\hat{a}_2$ の符号は第3部分期間を除きすべて負です。

表3はアメリカのフェッドファンドレートの

表3 アメリカのフェッドファンドレートのドリフトの推定値

			$\hat{a}_{-1}$	$\hat{a}_0$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$
第1 部分期間 1985-1988	$\gamma=1$	平均	-6.40E+03	2.56E+05	-3.39E+06	1.48E+07
		標準誤差	6.14E+02	2.45E+04	3.23E+05	1.40E+06
	$\gamma=2$	平均	-4.26E+02	1.71E+04	-2.26E+05	9.83E+05
		標準誤差	4.10E+01	1.64E+03	2.16E+04	9.36E+04
	$\gamma=3$	平均	-2.85E+01	1.14E+03	-1.51E+04	6.58E+04
		標準誤差	2.76E+00	1.10E+02	1.45E+03	6.30E+03
	$\gamma=4$	平均	-1.93E+00	7.73E+01	-1.02E+03	4.45E+03
		標準誤差	1.87E-01	7.47E+00	9.83E+01	4.27E+02
第2 部分期間 1989-1994	$\gamma=1$	平均	1.61E+01	-9.83E+02	1.84E+04	-1.06E+05
		標準誤差	9.43E-02	5.92E+00	1.14E+02	6.85E+02
	$\gamma=2$	平均	8.57E-01	-5.25E+01	9.88E+02	-5.71E+03
		標準誤差	4.56E-03	2.86E-01	5.55E-00	3.34E+01
	$\gamma=3$	平均	5.40E-02	-3.32E+00	6.26E+01	-3.62E+02
		標準誤差	2.68E-04	1.68E-02	3.26E-01	1.96E+00
	$\gamma=4$	平均	3.87E-03	-2.39E-01	4.50E+00	-2.60E+01
		標準誤差	1.84E-05	1.15E-03	2.22E-02	1.33E-01
第3 部分期間 1995-1999	$\gamma=1$	平均	-5.87E+03	3.22E+05	-5.89E+06	3.58E+07
		標準誤差	7.22E+01	3.84E+03	6.78E+04	3.99E+05
	$\gamma=2$	平均	-3.11E-02	1.71E+04	-3.12E+05	1.89E+06
		標準誤差	3.85E+00	2.05E+02	3.62E+03	2.13E+04
	$\gamma=3$	平均	-1.65E+01	9.05E+02	-1.65E+04	1.00E+05
		標準誤差	2.06E-01	1.09E+01	1.93E+02	1.14E+03
	$\gamma=4$	平均	-8.76E-01	4.81E+01	-8.77E+02	5.33E+03
		標準誤差	1.10E-02	5.86E-01	1.04E+01	6.09E+01
全期間 1985-1999	$\gamma=1$	平均	-8.31E+00	4.53E+02	-7.62E+03	4.04E+04
		標準誤差	2.38E-02	1.24E+00	2.08E+01	1.12E+02
	$\gamma=2$	平均	-4.30E-01	2.30E+01	-3.81E+02	2.00E+03
		標準誤差	1.39E-03	7.23E-02	1.21E+00	6.48E+00
	$\gamma=3$	平均	-2.33E-02	1.22E-00	-1.98E+01	1.02E+02
		標準誤差	8.48E-05	4.39E-03	7.30E-02	3.90E-01
	$\gamma=4$	平均	-1.33E-03	6.81E-02	-1.08E+00	5.50E+00
		標準誤差	5.44E-06	2.80E-04	4.64E-03	2.46E-02

ドリフト項のパラメーター推定値です。日本の場合と同様、推定値 $\hat{a}_2$ はすべての期間かつすべての γ の値に対して有意です。従って、アメリカのフェッドファンドレートのドリフト項も常に非線形である事が分かります。ドリフト項の形状をそれぞれの部分期間及び全期間について比較すると、推定値 $\hat{a}_2$ の符号は第2部分期間を除きすべて正です。

日本とアメリカでドリフト項の推定値の比較を行うと、 $\hat{a}_2$ の符号は第2部分期間および第3部分期間で同じですが、第2部分期間および全期間では違うことが分かります。従って、日

米の短期金利の変動は、短期的には似通っている期間があるものの、その長期的変動は異なっていることが分かります。図3は全期間についてコールレートとフェッドファンドレートを描いた物です。

次にプル推定値に注目します。プル推定値はディフュージョン項の影響も考慮にいた平均回帰の指標で $\frac{\mu}{2\sigma^2}$ で表されます。詳細は Conley et al. (1997) をごらん下さい。図4から7は全期間および全部分期間について、日本のコールレートのプル推定値を $\gamma=1$ の場合について描いた物です。 γ の他の値の図については

図3 コールレートとフェッドファンドレート 1985/07/31-1999/01/04

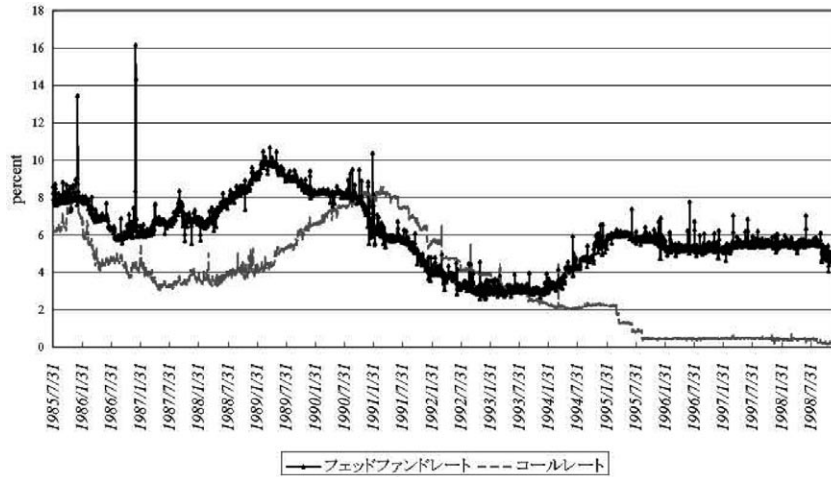


図4 $\gamma=1$, 第1部分期間 1985/07/31-1989/01/13

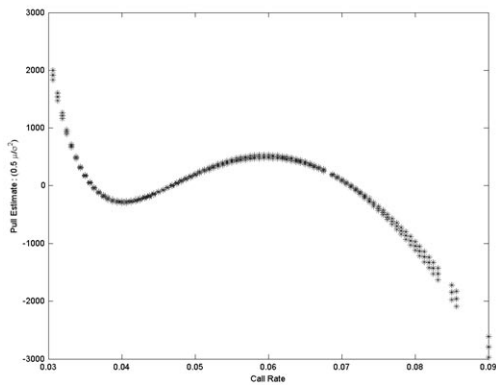


図5 $\gamma=1$, 第2部分期間 1989/01/17-1995/05/15

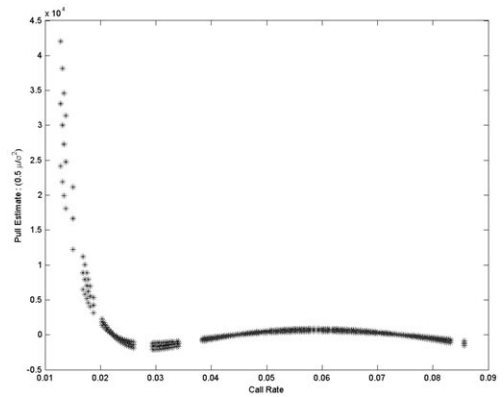


図6 $\gamma=1$, 第3部分期間 1995/05/16-1999/01/04

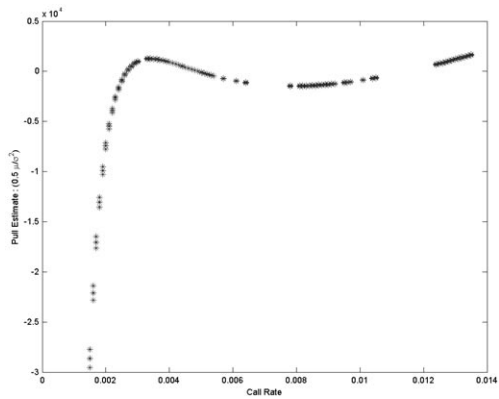
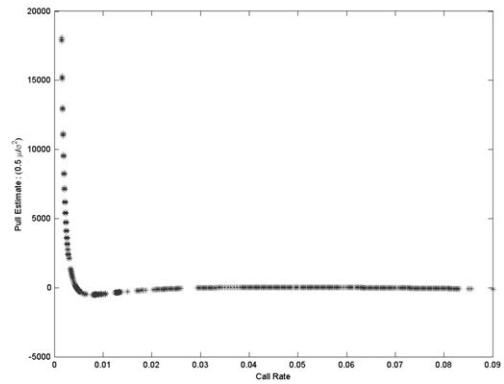


図7 $\gamma=1$, 全期間 1985/07/31-1999/01/04



Wada (2003) をごらん下さい。図4は第1部分期間、図5は第2部分期間、図6は第3部分期間、図7は全期間に対応します。第3部分期間のプル推定値の形状は、他の部分期間及び全期間のそれと異なっていることが分かります。これは推定値 $\hat{a}_2$ の符号は第三部分期間においてのみ正だからです。図4においては、3.5%と7.25%が局所的に安定な点で4.75%が局所的に不安定な点です。図5においては、2.25%と8%が局所的に安定な点で4.5%が局所的に不安定な点です。図6においては0.5%が局所的に安定な点で、0.25%と1.2%が局所的に不安定な点です。最後に図7では、0.5%と6%が局所的に安定な点で、2%が局所的に不安

定な点です。

図8から図11は全期間および全部分期間について、アメリカのフェッドファンドレート of プル推定値の場合について描いた物です。図8は第1部分期間、図9は第2部分期間、図10は第3部分期間、図11は全期間に対応します。第2部分期間のプル推定値の形状は他の部分期間および全期間におけるそれと異なることが分かります。これは $\hat{a}_2$ の推定値が第2部分期間においてのみ負であるからです。図8においては、2つの局所不安定点と一つの局所安定点があります。図9においては、3%と8.5%の局所安定点と5.5%の局所不安定点があります。図10は5と6%の間でプル推定値がほとんど平

図8 $\gamma=1$, 第1部分期間 1985/07/31—1989/01/13

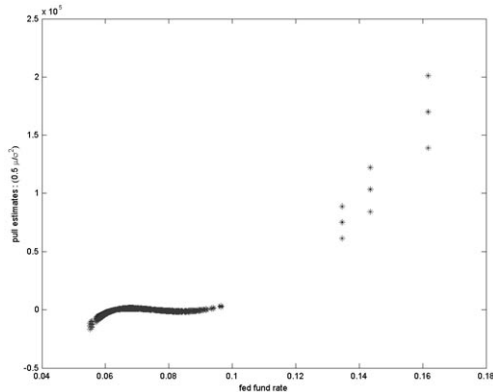


図9 $\gamma=1$, 第2部分期間 1989/01/14—1995/05/15

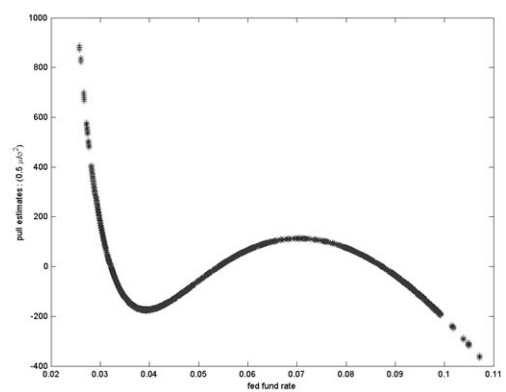


図10 $\gamma=1$, 第3部分期間 1995/05/16—1999/01/04

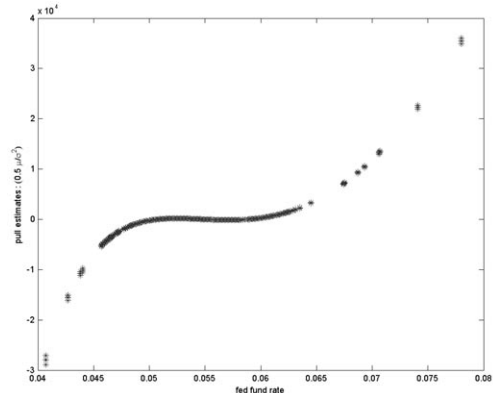
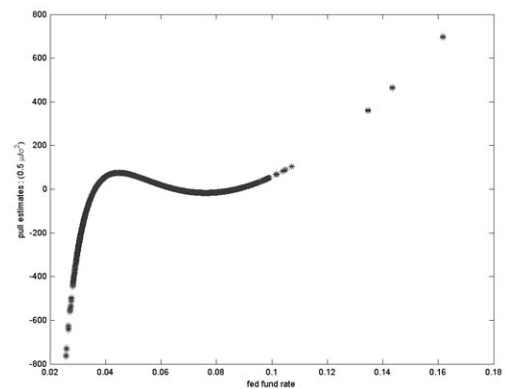


図11 $\gamma=1$, 全期間 1985/07/31—1999/01/04



らです。最後に図11では、2.5%と9%の局所安定点があり、7%の局所不安定点があります。

コールレートとフェッドファンドレートを比べると以下の事が分かります。もし図4と図8を比べるとプル推定値の形状はかなり異なっています。コールレートにはふたつの局所安定点がありますが、フェッドファンドレートには二つの局所不安定点があります。図5と図9を比べると、プル推定値の形状は似ています。両者とも二つの局所安定点と一つの局所不安定点があります。またこれらの点の位置も似通っています。図6と図10を比べると、プル推定値の形状は一見似通っていますが、y軸の金利の範囲を比べると両者は異なっていることが分かります。最後に図7と図11を比べるとプル推定値の形状は異なっています。従ってコールレートと

フェッドファンドレートのプル推定値の形状は第2部分期間では似通っているものの、その他の部分期間および全期間では異なっている事が分かります。以上の発見は図3からも明らかです。両方の金利とも第2部分期間では似通った振る舞いをしていますが、第1部分期間および第3部分期間では異なっています。第1部分期間では、コールレートとフェッドファンドレートの差ははじめ小さいものの、その後大きくなって、最後にはまた小さくなっています。第3部分期間においては、フェッドファンドレートはだいたい6パーセント前後ですが、コールレートはほとんど0パーセントです。これら図3から得られる結果は図4から図11における結果と整合的です。

V. 結論

この論文では、日本の日次コールレートを15年間のデータを用いて推定しました。同時にコールレートと比較するために、同時期のアメリカのフェッドファンドレートを推定しました。その結果以下の事が判明しました。第1に、コールレートとフェッドファンドレートのドリフト項は全ての部分期間および全体期間において非線形であることが判明しました。第2に、コールレートの長期的変動は短期的変動と異なる事が判明しました。第3にコールレートの短

期的変動はその期間によって異なる事が判明しました。第4にフェッドファンドレートの長期的変動は短期的変動と異なることが判明しました。第5にフェッドファンドレートの短期的変動はその期間によって異なることが判明しました。第6に、コールレートとフェッドファンドレートの短期的変動が似通った部分期間があることが判明しました。第7にコールレートとフェッドファンドレートの長期的変動は異なる事が判明しました。

参 考 文 献

- [1] AitSahalia, Y. (1996a), “Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities”, *Econometrica* 64, 527-560.
- [2] AitSahalia, Y. (1996b), “Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate”, *Review of Financial Studies* 9, 385-426.
- [3] Campbell J. and Y. Hamao (1993), “The Interest Rate Process and the Term Structure of Interest Rates in Japan”, in *Japanese monetary policy*, University of Chicago Press.
- [4] Chan, K., A., Karolyi, F. Longstaff and A. Sanders (1992), “An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate”, 47, 1209-1227.

- [5] Chapman, D. and N. Pearson (2000), “Is the Short Rate Actually Nonlinear?”, *The Journal of Finance* 55, 355-388.
- [6] Conley, T., L. Hansen, E. Luttmer and J. Scheinkman (1997), “Short-Term Interest Rates as Subordinated Diffusions”, *Review of Financial Studies* 10, 525-577.
- [7] Cox, J., J. Ingersoll and S. Ross (1985), “A Theory of the Term Structure of Interest Rates”, *Econometrica* 53, 385-407.
- [8] Fan, J. (1992), “Design Adaptive Nonparametric Regression”, *Journal of the American Statistical Association* 87, 998-1004.
- [9] Fan, J. (1993), “Local Linear Regression Smoothers and Their Minimax Efficiencies”, *Annals of Statistics* 21, 196-216.
- [10] Fan, J. and I. Gijbels (1992), “Variable Bandwidth Selection and Local Linear Regression Smoothers”, *Annals of Statistics* 20, 2008-2036.
- [11] Feller, W. (1971), “An Introduction to Probability Theory and Its Applications”, Vol.2, John Wiley & Sons.
- [12] Hansen, L., J. Scheinkman and N. Touzi (1998), “Spectral Methods for Identifying Scalar Diffusions”, *Journal of Econometrics* 86, 1-32.
- [13] Kii, M. (1998a), “Empirical Tests of Short-Term Interest Rate Models: A Nonparametric Approach”, *Applied Financial Economics* 8, 347-352.
- [14] Kii, M. (1998b), “A Comparison of Short-Term Interest Rate Models: Empirical Tests of Interest Rate Volatility”, *Applied Financial Economics* 8, 505-512.
- [15] Kogure, A. (1997), “A New Approach to the Estimation of Stochastic Differential Equation with an Application to the Japanese Interest Rates”, *Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, Discussion Paper No. 97-E-8*.
- [16] Shi, Z. and Y. Kaguraoka (2000), “A Flexible Model Characterizing Interest Rate Processes”, mimeo.
- [17] Shoji, I. (1994), “A Model of the Term Structure of Interest Rates for an Economically Dependent Country”, *Financial Engineering and the Japanese Markets* 1, 85-89.
- [18] Shoji, I. and T. Ozaki (1996), “A Statistical Comparison of the Short-Term Interest Rate Models for Japan, U.S., and Germany”, *Financial Engineering and the Japanese Markets* 3, 263-275.
- [19] Stanton, R. (1997), “A Nonparametric Model of the Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk”, *The Journal of Finance* 52, 1973-2002.
- [20] Tse, Y. (1995), “Some International Evidence on Stochastic Behavior of Interest Rates”, *Journal of International Money and Finance* 14, 721-738.
- [21] Vasicek, O. (1977), “An Equilibrium Characterization of the Term Structure”, *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.
- [22] Wada, K. (2003), “Comparison of the short-term and the long-term characteristics of the Japanese and the US spot interest rate”, in *The Japanese Finance*, ed. by Jay Choi and T. Hiraki Elsevier Science.
- [23] 刈屋・神園 (1997) 「CIR 型金利モデルの統計的検証」 *経済研究* Vol.48 No.31 93-206頁.
- [24] 小暮 (1996) 「経済データからの確率微分方程式の推定について：離散化とその問題点」 *千葉大学経済研究* 第10巻第2号 91-112頁.