

多部門開放経済型の世代重複モデルの構造と そのシミュレーション結果—少子高齢化の下での 我が国の将来的な経済構造に関する定量的分析*1

石川大輔*2
中川雅央*3
中澤正彦*4
新居理有*5
上田淳二*6

要 約

本稿は、複数の産業部門、対外部門、ならびに異なる年齢の世代が一時点に併存する「多部門開放経済型の世代重複モデル」を用いて、経済主体が合理的な意思決定を行うことを前提とした場合に、日本における近年の人口減少と高齢化の進展が、異時点間及び産業部門間の資源配分の変化を通じて、どの程度の規模でマクロ経済に影響を与えるのかについて、日本経済のデータを用いて数値シミュレーション分析を行った結果を示すものである。

それらの結果を見ることによって、人口構造の変化により、総人口1人あたりの付加価値、資本労働比率、賃金率、資本のユーザーコスト、マクロの貯蓄率がどの程度の大きさで変化するか、また、製造業が産出する貿易財が輸入で代替される結果、国内の製造業の産出額シェアがどの程度縮小し、非製造業の同シェアがどの程度拡大するか、長期的に貿易収支の赤字がどの程度の規模となるかといった点について、定量的に理解することができる。また、こうした人口構造が大きく変化する状況の下では、消費型の課税がある場合の方が、ない場合と比べて、1人当たり付加価値と資本労働比率が、ともに無視できない大きさで増加することも定量的に示される。

キーワード：多部門世代重複モデル、人口減少と高齢化の進展、産業構造の変化

JEL classification：J11, H51, H68

*1 文中で意見にわたる部分は筆者の個人的見解であり、筆者の所属する機関の見解ではない。本稿の作成にあたっては、石田良氏（財務総合政策研究所客員研究員）、岡本章氏（岡山大学教授）、小黒一正氏（法政大学准教授）、小塩隆士氏（一橋大学教授）、加藤久和氏（明治大学教授）、川出真清氏（日本大学准教授）、木村真氏（兵庫県立大学准教授）、小寺剛氏（京都大学研究員）、猿山純夫氏（日本経済研究センター）、島澤諭氏（総合研究開発機構主任研究員）、蓮見亮氏（日本経済研究センター）、別所俊一郎氏（慶應義塾大学准教授）、細野薫氏（学習院大学教授）、堀勝彦氏（帝塚山大学講師）、照山博司氏（京都大学教授）、富田俊基氏（中央大学教授）、吉野直行氏（慶應義塾大学教授）から貴重なコメントをいただいたことに感謝申し上げたい。ただし、本稿の記述について残る誤りは筆者の責任である。

*2 財務省財務総合政策研究所主任研究官

*3 東北大学大学院経済学研究科准教授

*4 京都大学経済研究所准教授

*5 広島大学大学院社会科学研究科特任助教

*6 前財務省財務総合政策研究所財政経済計量分析室長

I. はじめに

日本では、出生率の低下と寿命の伸長により、総人口が2007年をピークに減少に転じる一方、総人口に対する65歳以上人口の比率は今後も上昇が続くことが見込まれている。このような人口構造の劇的な変化は、要素価格や財・サービスの相対価格を長い期間にわたって変化させることになるため、経済主体の異時点間の資源配分行動の変化をもたらす。経済全体の資本ストックと労働力人口との比率や貿易収支、投資・貯蓄バランス、各産業の産出額シェアなど、マクロ経済の主要指標に対して、長期間にわたって大きな影響を与え続けることになる。また、こうした変化が生じる下で、財政・社会保障についてどのような対応をとるかによって、マクロ経済全体の動向も大きく異なる可能性がある。

こうした人口減少と高齢化の進展の影響は、定性的にはある程度まで明らかであるものの、経済主体の合理的な意思決定を前提とした場合に、実際にどの程度の大きさの変化が、どの程度の期間にわたってマクロ経済に生じるかをみるためには、その目的に沿った分析のフレームワークが必要とされる。本稿の目的は、日本における人口減少と高齢化の進展が、経済主体の合理的な意思決定を前提とした場合に、マクロ経済にどの程度の期間、どの程度の規模で、どのような影響が生じるかを定量的に分析するための動学一般均衡モデルによる分析フレームワークを用いた分析の結果を示すことである。分析のフレームワークとしては、現実の日本経済の設定に近づけるため、複数の産業部門、対外部門、ならびに異なる年齢の世代が一時点に併存する「多部門開放経済型の世代重複モデル (Multi-sector Overlapping Generations Model in an Open Economy, 以下 OLG モデル)」を用いることとし、日本経済のデータに基づくカリブレ

ーションを行った上で、いくつかの数値シミュレーション分析を行った。なお、この OLG モデルは、dynasty 型の動学一般均衡モデルを、有限期間のみ生存する年齢階層別主体の存在を許容する形に一般化したものであり、石川他 (2010) の「フォワード型モデル」を高度化したものとして位置づけられる。

本稿で用いたモデルの特徴は、以下の3点である。第一に、モデルの中で複数の財を設け、それらの輸出額と輸入額をそれぞれ内生的に決定することによって、貿易収支の時間を通じた動きを内生的に決定していることである。労働力人口比率の低下に伴う国内産出量の減少は、貿易財の輸入量を増加させ、長期にわたって貿易収支を悪化させる可能性がある。本稿のモデルにおいては、こうした動きを定量的にとらえることとしている。

第二に、将来にわたる産業構造（各産業の産出額シェア）の変化を分析するために、生産要素の投入構造や貿易構造の異なる複数の産業部門（農林水産業、製造業、非製造業、医療サービス業）を設けていることである。労働力人口の減少は、特に輸入で代替することが容易な貿易財を産出する産業部門の国内産出量を大きく縮小させると考えられるため、結果的に国内の産出量に占める非製造業（サービス業）の産出額シェアが拡大すると考えられる。このような動きを、定量的にシミュレーション結果として示すためには、多部門モデルを構築することが必要不可欠となる。

第三に、高齢化が進展する環境下において、税制の違いがマクロ経済に与える影響について定量的に考察することが可能となっていることである。具体的には、人口動態の移行過程において、政府の歳入を労働所得税と消費に対する税で賄う場合、それらの税目の総税収に占める

割合の違いがマクロ経済に与える影響を分析することができる。

本稿で用いるモデルの具体的な構造は、複数部門の生産技術と貿易構造を想定している点を除けば、一般的な世代重複型の動学的一般均衡モデルと同様の設定となっている¹⁾。まず、人口動態の変化が生じる長期的な経済の推移を分析対象とするため、市場は完全競争であり、かつ価格は完全に伸縮的であることを仮定している。従って、需給ギャップの存在は想定していない。また、経済主体は完全予見の下で合理的に行動することを仮定している。

各世代の家計は、有限で確定的な生存期間にわたる効用の割引現在価値の和を最大化するように、毎年、賦与された時間を労働と余暇に振り分け、労働によって得られた所得を消費と貯蓄に配分する。また、同一世代内での家計の異質性については考えず、代表的家計のみを考えることとしている。

生産部門としては、生産要素の投入比率および貿易構造の異なる4つの代表的産業（農林水産業、製造業、非製造業、医療サービス業）を設定している。各生産部門において、企業は一定の生産技術に基づき、今期の生産費用を最小化するように労働と資本の投入量を選択し、それぞれの財を生産する。資本と労働について、産業部門間の移動は、追加的なコストを必要とせずに行うことができると仮定している。

政府は、異時点間の予算制約式を満たすことを前提に、租税（労働所得税、資本所得税、消費に対する税、生産税）と国債発行による歳入を用いて、政府消費・投資への支出、家計への移転支出、及び国債の元本の償還と利払いを行う。異時点間の予算制約式を満たすために、政府は労働所得税率を適切に調整することを仮定している。

対外部門については、国内財と海外財の間に不完全代替を想定する（アーミンソンの仮定）。

国内で産出された財は、国内市場又は輸出市場に振り分けられる。そして、国内市場に振り分けられた財は、輸入財と組み合わせられ、アーミンソン合成財が生産される。モデルの中で、経済に何らかのショックが生じた場合には、貿易収支と対外純資産が長期にわたって一定の均衡式を満たすことができるように、ショックが生じた時点で海外財の価格が変化（ジャンプする）ことを想定する。国内財の価格は一定に規準化しているため、海外財の価格は実質為替レートであると解釈することができ、ショックに対して対外収支を定常状態に収束させるための調整弁として機能することになる。

これらの定式化の下で、貿易収支および財政収支が安定していた1985年度の日本経済の状況を踏まえたパラメータを計算することによって、何らかのショックが生じた場合に、最終的にどのような定常状態に到達し、それまでの間の移行過程において、マクロ経済変数がどのような動きを示すかについてのシミュレーションを実施することができる。

本稿では、Ishikawa *et al.* (2012)と同様、人口動態の変化をショックとして与えることとし、社人研の人口推計（出生中位、死亡中位）を用いて作成したシナリオを用いて、長期間の移行過程において、人口構造の変化が①主なマクロ変数（1人あたり変数、要素価格等）、②産業構造（各産業の産出額シェア）、③貿易収支、④貯蓄率、⑤異なる税制の下でのマクロ経済に与える影響について、分析を行った結果を示す。具体的には、人口動態の変化がショックとして与えられることによって、総人口1人あたりの付加価値は減少し、資本労働比率は上昇する。また、賃金率（税控除前）は上昇し、資本のユーザーコストは当初下落する。製造業が産出する貿易財が輸入で代替される結果、国内の製造業の産出額シェアは縮小し、非製造業の同シェアは拡大し、長期間にわたって貿易収支は赤字となる。高齢化の進展に伴い、貯蓄を取り崩す

1) モデルの構造の詳細については、Ishikawa *et al.* (2012)を参照。

高齢世代が増加していくことから、マクロの貯蓄率は低下する。

本稿では、こうしたショックが生じた下で、政府による所要財源調達の方法として、消費型の課税を用いる場合と用いない場合とで、マクロ経済の動きがどのように異なるかを、シミュレーションの結果として定量的に示している。1人当たり付加価値と資本労働比率をみると、消費型の課税がある場合の方が、ない場合と比べて、ともに高くなる。

日本において、人口構造の変化が経済主体の異時点間の資源配分に与える影響を分析するために、これまでも単一の財（産業部門）を想定したOLGモデルを用いたシミュレーションは数多く行われている²⁾。しかし、多部門OLGモデルを用いて高齢化が経済構造に与える影響を分析したシミュレーション事例は多くない。そうした中で、関連する先行研究としては、Fougere *et al.* (2007)、Rausch (2009)、木村・橋本 (2010)、Ishikawa *et al.* (2012) がある。

Fougere *et al.* (2007) は、カナダの産業連関表データを用いて、各産業における労働市場が分断されているという前提の下、同国における少子高齢化が経済に与える影響について分析を

行なっている。Rausch (2009) は、ドイツの産業連関表データを用いて、同国における少子高齢化が産業構造の変化等のマクロ経済に与える影響について詳細かつ包括的な分析を行なっている。木村・橋本 (2010) は、日本の産業連関表データを用いた多部門OLGモデルを構築し、財政再建に関するシミュレーション分析を行っている。木村・橋本 (2010) の特徴としては、歳出削減の対象費目の違い（公共投資、教育支出、その他政府支出等）を考慮している点などが挙げられる。Ishikawa *et al.* (2012) は、Rausch (2009) の多部門OLGモデルの枠組みを参照し、本稿で用いるモデルの基礎を提示した上で、日本における人口の高齢化が、医療サービスに関する需要を増加させることによる産業構造の変化と貿易収支および経常収支の長期的なインパクトを定量的に示している。

本稿の構成は以下の通りである。第2節では、モデルの構造を説明する。第3節では、データの説明、及びパラメータのカリブレーションについて説明する。第4節ではシミュレーションの結果を提示し、第5節で結論、及び今後の発展を議論する。

II. 理論モデル

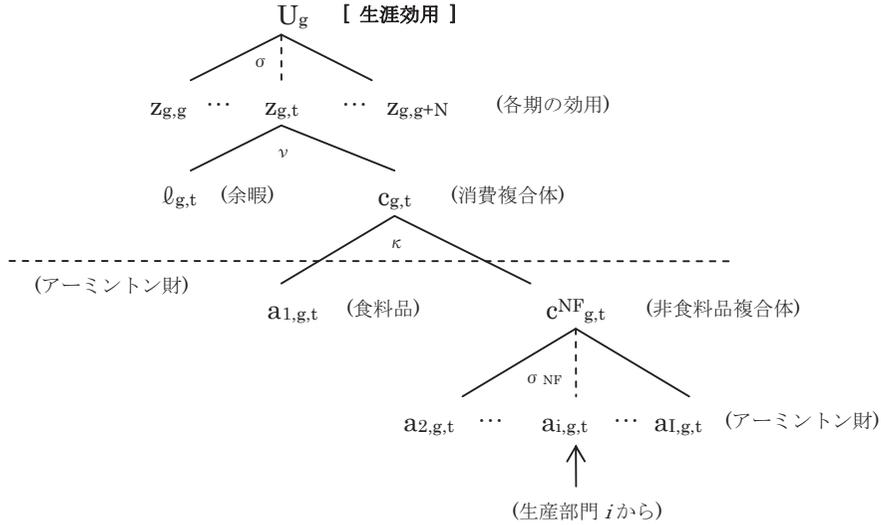
以下では、本稿で用いるモデルの構造を説明する。このモデルは、複数の産業部門、ならびに有限期間にわたって生存する家計を含む「開放経済下での多部門世代重複モデル (Multi-Sector Overlapping Generations Model in an Open Economy)」で、貿易財と非貿易財が存在する開放経済の環境下において、人口減少と高齢化

の進展がマクロ経済に与える影響を分析することのできるフレームワークを提供する。本稿では、Ishikawa *et al.* (2012) のモデルに、消費段階での課税を加えたものを用いることとしている。

生産部門としては、農林水産業、製造業、非製造業、医療サービス業の4つの代表的産業を

2) 具体的には、川出 (2003)、佐藤・中東・吉野 (2004)、Ihori *et al.* (2005)、井堀・別所 (2008)、Muto *et al.* (2012)、Okamoto (2013) などが挙げられる。また、日本を含む多国OLGモデルを用いて高齢化がマクロ経済に与える影響を分析している例として、Hviding and Merette (1998)、Krueger and Ludwig (2007)、Shimasawa and Oguro (2010) などが挙げられる。

図1 家計部門における生涯効用の構造



考える。以後、生産部門を $i = 1, 2, 3, 4$ (それぞれ、農林水産業、製造業、非製造業、医療サービス業に対応する) で表すとともに、農林水産業を除いた部門の集合を $NF = \{2, 3, 4\}$ と定める。また、貿易における国内財と海外財は不完全代替を想定する(アーミントンの仮定)。本モデルは、家計のライフサイクルにわたる長期的な経済の推移を分析の対象とするため、全ての市場は完全競争、かつ価格は伸縮的であることを仮定する。また、産業部門間の労働と資本の移動は完全に自由とする。

II-1. 家計部門

①最適化問題

世代 g の家計は $t = g$ 年に労働市場に参入し、同年以降 $N + 1$ 年間にわたって生存し、 $g \leq t \leq g + N$ 年における各期で $\omega_{g,t}$ 単位の時間(効率単位)が賦与される。また、世代 g に賦与される効率時間 $\omega_{g,t}$ は、その世代のライフサイクルを通じて変化しないものとする($\omega_{g,t} = \omega_{g,t'}$ for all $t \neq t'$)³⁾。なお、子供の時期($t < g$)における世代 g は、完全に親の扶養の下にあるとし、

その経済活動からは効用や支出などは一切発生しないものとする。 $t = 0$ 年以前に生まれる初期世代(initial old)については、 $g = -N, \dots, -1$ と表す。

世代 g の家計の最適化問題は、以下のように与えられる。なお、本モデルでは、遺産とポンジゲーム(負債を残して死亡すること)が発生するような状況は考えていない。

$$\text{Max}_{\{c_{g,t}, \ell_{g,t}\}} : u_g(z_{g,t}) = \left[\sum_{t=g}^{g+N} \theta_{g,t} \left(z_{g,t} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \quad (1)$$

s.t.

$$z_{g,t} = \left[\alpha \left(c_{g,t} \right)^{\frac{1-\nu}{\nu}} + (1-\alpha) \left(\ell_{g,t} \right)^{\frac{1-\nu}{\nu}} \right]^{\frac{\nu}{1-\nu}} \quad (2),$$

$$c_{g,t} = \left[\theta^F \left(a_{1,g,t} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} + \theta^{NF} \left(c^{NF}_{g,t} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \quad (3),$$

$$c^{NF}_{g,t} = \left[\sum_{i \in NF} \varphi_{i,t} \left(a_{i,g,t} \right)^{\frac{1-\sigma_{NF}}{\sigma_{NF}}} \right]^{\frac{\sigma_{NF}}{1-\sigma_{NF}}} \quad (4),$$

$$\sum_{t=g}^{g+N} p_{c,g,t} c_{g,t} \leq \sum_{t=g}^{g+N} \left[p_t^w \pi_{g,t} \left(\omega_{g,t} - \ell_{g,t} \right) \left(1 - \tau_t^w \right) + p_t^a \zeta_{g,t} \right] \quad (5),$$

3) すなわち、 $\omega_{g,t}$ は世代 g の人口に比例する。

$$\ell_{g,t} \leq \omega_{g,t} \quad (6)$$

ただし、 u_g は生涯効用、 $z_{g,t}$ は t 年における効用（消費と余暇の合成効用）、 $\theta_{g,t}$ は主観的割引率を表すパラメータ、 σ は異時点間の代替弾力性、 $c_{g,t}$ は総消費、 $\ell_{g,t}$ は余暇、 α は総消費に関するシェアパラメータ、 ν は物的消費と余暇消費の間の代替弾力性、 $a_{i,g,t}$ は食料品（農林水産財）の消費、 $c_{g,t}^{NF}$ は非食料品（農林水産財以外のアーミントン財）の消費バスケット、 θ^F は食料品消費に関するシェアパラメータ、 θ^{NF} は非食料品消費に関するシェアパラメータ、 κ は食料品と非食料品の間の代替弾力性、 $a_{i,g,t}$ ($i \in NF$) は非食料品の消費、 $\psi_{i,t}$ は財 i の消費に関するシェアパラメータ、 σ_{NF} は非食料品 i ($i \in NF$) の間の代替弾力性である。

また、 $p_{c,g,t}$ は世代 g の総消費に関する価格（現在価値表示、以下の価格変数も同様⁴⁾）、 p_t^w は賃金率（労働所得税除き）を表す。なお、本モデルの将来時点（ $t+i$ 年）における全ての価格 p_{t+i} は、同時点の実質変数 X_{t+i} を基準収益率（税抜き） rn_bar で現在価値に変換する役割も有している。 $\pi_{g,t}$ はライフサイクルにわたる逆U字型の賃金プロファイル（年齢依存の労働生産性）、 $\omega_{g,t}$ は賦与される時間（世代人口に比例、効率単位）、 τ_t^v は労働所得税率、 $\zeta_{g,t}$ は政府から家計への純移転である。 p_t^i はニューメレル価格であり、同価格で政府純移転支出と政府債務がデフレートされるものとする。家計は各種資産（株式、国債、対外純資産）を直接保有せず、金融資産をパッケージとして保有し、その運用利回りは基準収益率（税控除前） r_bar に等しいものとする⁵⁾。金融資産の初期賦存（initial endowment）については、 $t=0$ 年以前の初期世代（ $g < 0$ ）のみに賦与される。

実際のシミュレーションにおいては、式(1)

～(4)のCES型効用関数、合成消費関数の各変数は、ベースライン値（基準年の値を延伸したもので）で規格化される。このような規格化の形式は Calibrated Share Form と呼ばれる（Rausch (2009)）。同方法を採用すると、選好パラメータはそれに係る支出シェアによって表すことが可能となり、カリブレーションの手間を大幅に省くことができる（詳細については付録を参照）。

②双対的な費用関数の導出

家計部門における双対的な費用関数は、下式のように導出できる。

$$p_{u,g} = \left[\sum_{t=g}^{g+N} \theta_{g,t} (p_{z,g,t})^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

$$p_{z,g,t} = \left[\alpha (p_{c,g,t})^{1-\nu} + (1-\alpha) (p_{\ell,g,t})^{1-\nu} \right]^{\frac{1}{1-\nu}},$$

$$p_{c,g,t} = \left[\theta^F \left\{ (1+\tau_t^c) p_{A,i,t} \right\}^{1-\kappa} + \theta^{NF} (p_{c,g,t}^{NF})^{1-\kappa} \right]^{\frac{1}{1-\kappa}},$$

$$p_{c,g,t}^{NF} = \left[\sum_{i \in NF} \varphi_{i,t} \left\{ (1+\tau_t^c) p_{A,i,t} \right\}^{1-\sigma_{NF}} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_{NF}}}$$

ただし、 $p_{u,g}$ は生涯効用に関する価格、 $p_{z,g,t}$ は各期の効用に関する価格、 $p_{\ell,g,t}$ は余暇に関する価格（留保賃金）、 τ_t^c は消費にかかる税率、 $p_{A,i,t}$ はアーミントン財 i の価格、 $p_{c,g,t}^{NF}$ は非食料品の消費バスケットに関する価格である。なお、実際のシミュレーションにおいては、上式の各変数に Calibrated Share Form を適用する（詳細については付録を参照）。

③需要関数の導出

家計部門における需要関数は、間接効用関数にロイの恒等式を適用することで、下式のように導出できる。

4) 非食料品の消費バスケットの構成が時間 t を通じて変化する場合、価格 $p_{c,g,t}$ は世代 g にも依存することになる。

5) 本モデルでは明示的な定式化は行っていないが、この金融資産のパッケージは代表的金融機関がゼロ利潤（営業経費控除後）で運営している投資信託と考えることができる（Radulescu (2007)）。

$$z_{g,t} = u_g \left(\frac{p_{u,g}}{p_{z,g,t}} \right)^\sigma \quad (7),$$

$$c_{g,t} = z_{g,t} \left(\frac{p_{z,g,t}}{p_{c,g,t}} \right)^\nu \quad (8),$$

$$\ell_{g,t} = z_{g,t} \left(\frac{p_{z,g,t}}{p_{l,g,t}} \right)^\nu \quad (9),$$

$$a_{i,g,t} = c_{g,t} \left(\frac{p_{c,g,t}}{(1+\tau_i^c) p_{A,i,t}} \right)^\kappa \quad \text{for } i=1 \text{ (food)} \quad (10),$$

$$a_{i,g,t} = c_{g,t} \left(\frac{p_{c,g,t}}{p_{c,g,t}^{NF}} \right)^\kappa \left(\frac{p_{c,g,t}^{NF}}{(1+\tau_i^c) p_{A,i,t}} \right)^{\sigma_{NF}}$$

for $i \in NF$ (non-food) (11)

また、世代 g の生涯効用 u_g は、下記のように導出できる。ただし、 m_g は世代 g の生涯所得水準（現在価値表示）である。

$$u_g = \frac{m_g}{p_{u,g}},$$

$$m_g = \sum_{t=g}^{g+N} \left[p_t^w \pi_{g,t} (\omega_{g,t} - \ell_{g,t}) (1 - \tau_t^w) + p_t^n \zeta_{g,t} \right] \quad (12)$$

なお、実際のシミュレーションにおいては、式(7)～(12)の各変数に Calibrated Share Form を適用する（詳細については付録を参照）。

④余暇価格（留保賃金）の決定式の導出

効用最大化問題の一次条件から、余暇価格（留保賃金） $p_{l,g,t}$ は以下のように導出できる。

$$p_{l,g,t} = p_{c,g,t} \left(\frac{\partial u_g}{\partial \ell_{g,t}} \right) \left/ \left(\frac{\partial u_g}{\partial c_{g,t}} \right) \right.$$

$$= p_t^w \pi_{g,t} (1 - \tau_t^w) + \phi_t p_{c,g,t} \left/ \left(\frac{\partial u_g}{\partial c_{g,t}} \right) \right. \quad (13)$$

ただし、 $\phi_t (\geq 0)$ は制約式(6)に関するラグランジュ乗数である。

制約式(6)が厳密に不等号で成立している時 (i.e. $\ell_{g,t} < \omega_{g,t}$)、家計の労働供給 $lab_{g,t}$ ($\equiv \omega_{g,t} - \ell_{g,t}$) は厳密に正の値をとり、ラグランジュ乗数 ϕ_t は0になる。この場合、式(13)より、

余暇価格（留保賃金） $p_{l,g,t}$ は実効市場賃金 $p_t^w \pi_{g,t} (1 - \tau_t^w)$ に完全に一致する。

一方で、制約式(6)が厳密に等号で成立している時 (i.e. $\ell_{g,t} = \omega_{g,t}$)、家計の労働供給 $lab_{g,t}$ ($\equiv \omega_{g,t} - \ell_{g,t}$) は0となり、ラグランジュ乗数 ϕ_t は厳密に正の値をとる。この場合、式(13)より、余暇価格（留保賃金） $p_{l,g,t}$ は実効市場賃金 $p_t^w \pi_{g,t} (1 - \tau_t^w)$ を厳密に上回る。すなわち、余暇価格（留保賃金）が実効市場賃金を超えた段階において、家計は最適な退職年齢を内生的に選択することになる。

II-2. 企業部門

①単位費用関数（unit cost function）と要素需要関数の導出

財 $i = 1, 2, 3, 4$ (= 農林水産財, 貿易財, 非貿易財, 医療サービス財) の生産部門における代表的企業は、資本ストック $K_{i,t}$ と労働サービス $L_{i,t}$ を投入し、代替弾力性 $\sigma_{VA,i}$ の CES 型生産技術を用いて付加価値 $VA_{i,t}$ を生産する。同企業は、財 j の中間投入 $A_{j,i,t}$ を一定の比率で組み合わせることにより（レオンチェフ型生産技術）、中間財複合体 $M_{i,t}$ を生産する。最終的に、付加価値 $VA_{i,t}$ と中間財複合体 $M_{i,t}$ を一定の比率で組み合わせることにより（レオンチェフ型生産技術）、財 i のグロスの産出 $Y_{i,t}$ が行なわれる。

資本と労働の部門間にわたる移動は完全に自由であり、企業が直面する生産要素市場は完全競争であると仮定する。代表的企業の費用最小化問題を解くと、下式の単位費用関数（unit cost function）を導くことができる（導出の詳細については付録を参照）。

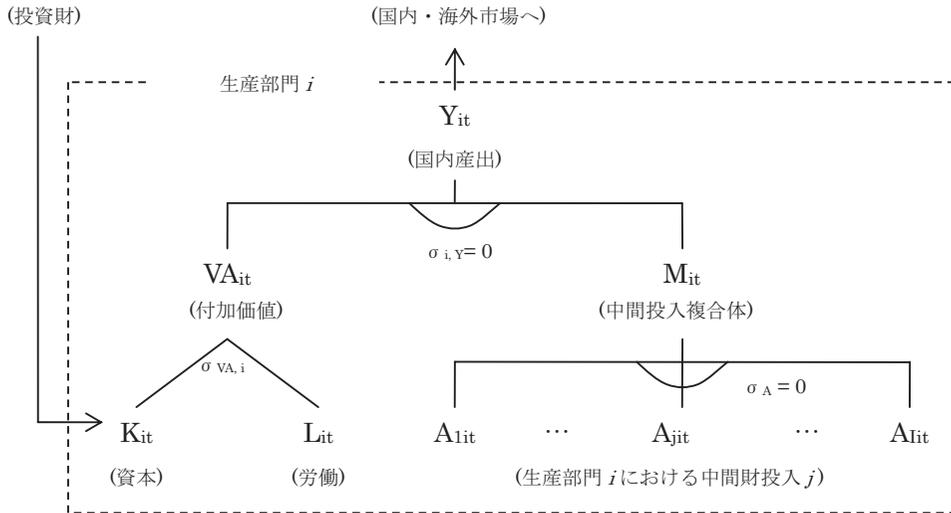
$$c_{VA,i,t} = \left[\beta_i^L (p_i^w)^{1-\sigma_{VA,i}} + (1-\beta_i^L) (p_i^r)^{1-\sigma_{VA,i}} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_{VA,i}}} \quad (14),$$

$$c_{M,i,t} = \sum_j \frac{P_{A,j,t}}{\chi_{j,i}} \quad (15),$$

$$c_{Y,i,t} = \beta_i^{VA} c_{VA,i,t} + (1-\beta_i^{VA}) c_{M,i,t} \quad (16)$$

ただし、 $c_{VA,i,t}$ は付加価値 $VA_{i,t}$ を生産するのに

図2 企業部門における生産構造



必要となる単位費用関数（現在価値表示）， β_t^L は付加価値に対する労働報酬額の基準年における比率， p_t^r は資本のユーザーコスト（資本税込み）， $c_{M,i,t}$ は中間投入複合体 $M_{i,t}$ を生産するのに必要となる単位費用関数（現在価値表示）， $1/\chi_{j,i}$ は基準年における中間投入コスト・シェア， $p_{A,j,t}$ は中間財 $A_{j,t}$ の価格（アーミントン財の価格，再掲）， $c_{Y,i,t}$ はグロスの産出 $Y_{i,t}$ を生産するのに必要となる単位費用関数（現在価値表示）， β_t^{VA} はグロスの産出額に対する付加価値額の基準年における比率である。

上記の単位費用関数に Shephard の補題を適用すると，要素需要関数を導くことができる（導出の詳細については付録を参照のこと）。

$$K_{i,t} = VA_{i,t} \left(\frac{c_{VA,i,t}}{p_t^r} \right)^{\sigma_{VA,i}} \quad (17),$$

$$L_{i,t} = VA_{i,t} \left(\frac{c_{VA,i,t}}{p_t^w} \right)^{\sigma_{VA,i}} \quad (18),$$

$$A_{j,i,t} = \left(\frac{1}{\chi_{j,i}} \right) M_{i,t} \quad (19)$$

なお，実際のシミュレーションにおいては，式 (14) ~ (19) の各変数に Calibrated Share Form を

適用する（詳細については付録を参照）。

②マクロの資本ストック K_t の蓄積方程式と民間設備投資 I_t の決定式

マクロの資本ストック K_t に関する遷移式は，式 (20) のようになる。また，投資に関する調整費用は 0 としていることから，資本価格 p_t^k に係る裁定式は式 (21) のようになる。

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t, \quad K_t = \sum_t K_{t,t} \quad (20),$$

$$p_t^k = p_t^r _at + (1-\delta)p_{t+1}^k \quad (21),$$

$$p_t^r = p_t^r _at + \tau^r r_bar \quad (22)$$

ただし， K_t はマクロの資本ストック額（期首）， I_t はマクロの民間設備投資額， δ は減価償却率， $p_t^r _at$ は資本のユーザーコスト（資本税除き）， p_t^k は資本価格， τ^r は時間を通じて一定の資本税率， r_bar はベースラインにおける基準収益率（税控除前）である。

投資に関する動学的最適化問題を解くために，本モデルのシミュレーションでは Lau et

図3 投資財の生産構造

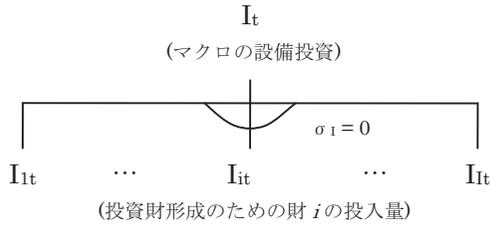
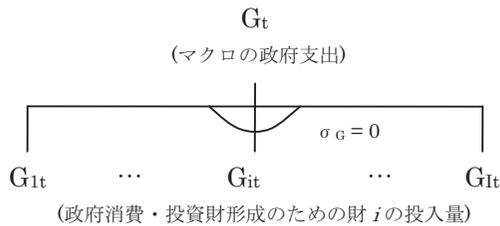


図3 投資財の生産構造



al. (2002) が提案している「state variable targeting 法」を援用する。具体的には、最終年 ($t = T$ 年) における民間設備投資 I_T の成長率が同年の実質潜在 GDP 成長率に等しくなるように、最終年の次の年 ($t = T + 1$ 年) における資本ストック K_{T+1} を内生的に決定する。

アーミントン財 $I_{i,t}$ を資本財 I_t に変換する技術については、図3のようなレオンチェフ型を想定する。資本財 I_t の産出に係る費用関数、及びアーミントン財 $I_{i,t}$ に関する要素需要関数は、下記のとおりとなる。

$$p_{i,t+1}^k = \sum_t \beta_i^{IA} p_{A,i,t} \quad (23)$$

$$I_{i,t} = \beta_i^{IA} I_t \quad (24)$$

ただし、 β_i^{IA} はマクロの設備投資 I_t に占める投入アーミントン財 i の基準年における比率、 $p_{A,i,t}$ はアーミントン財 i の価格 (再掲)、 $I_{i,t}$ は投入されるアーミントン財 i の額である。なお、実際のシミュレーションにおいては、式 (23) と (24) の各変数に Calibrated Share Form を適用する (詳細については付録を参照)。

II-3. 政府部門

政府は、社会保険料を含む労働所得税 Tax_L_t 、資本税 Tax_K_t 、消費に対する税 Tax_C_t 、生産税 Tax_Y_t を徴収し、それらを用いて歳出を賄う (税額は全て現在価値表示)。なお、政府の範囲は一般政府 (中央政府、地方政府、社会保障基金) とする。

$$Tax_t = Tax_L_t + Tax_K_t + Tax_C_t + Tax_Y_t \quad ,$$

$$Tax_L_t = \tau_t^w p_t^w L_t \quad , \quad Tax_K_t = \tau^r r_bar p_t^k K_t \quad ,$$

$$Tax_C_t = \sum_i \tau_i^c p_{A,i,t} C_{A,i,t} \quad , \quad Tax_Y_t = \sum_i \tau_i^Y p_{Y,i,t} Y_{i,t}$$

ただし、 Tax_t は総税収 (現在価値表示)、 L_t は総労働供給、 $C_{A,i,t}$ はアーミントン財 i の家計消費額の合計値、 τ_i^Y は時間を通じて一定の生産税率 (消費に対する税・関税を除く)、 $p_{Y,i,t}$ はグロスの産出物の価格 (生産税賦課前) である。

プライマリーバランス PB_t (現在価値表示) は、下式のように定義される。

$$PB_t = Tax_t - (p_t^{Gov} G_t + p_t^n NTRF_t) \quad (25)$$

ただし、 p_t^{Gov} は政府支出 (政府消費・投資) の

価格、 G_t は政府支出（政府消費・投資）、 $NTRF_t$ は家計への政府純移転支出の合計である。

政府の予算制約式（現在価値表示）は、下式のようなになる。なお、この政府の予算制約式を満たすように、労働所得税率 τ^w_t が内生的に決定される。

$$p_t^n GB_{t+1} + PB_t = (1 + r_{n_f_t}) p_t^n GB_t \quad (26)$$

ただし、 GB_t は政府純債務残高（期首）、 $r_{n_f_t}$ ($\equiv (1 - \tau^n) \times r_{f_t}$) は安全資産利子率（税引き後）である。

政府は、政府支出、政府純移転支出、政府純債務対GDP比率の目標値を政策変数として外生的に決定すると仮定する。国債発行については、Kumhof *et al.* (2010)と同様に、国債残高の対GDP比を同目標値に保つ財政ルールに沿って行われることを想定する。

$$p_t^n GB_t = tar_debt_gdp_t \times \sum_i (p_{i,t}^{VA} \times VA_{i,t}) \quad (27)$$

ただし、 $tar_debt_gdp_t$ は政府純債務対GDP比率の目標値、 $p_{i,t}^{VA}$ は付加価値の価格である。

アーミントン財 $G_{i,t}$ をマクロの政府支出財 G_t に変換する技術については、図4のようなレオンチェフ型を想定する。政府支出財 G_t の産出に係る費用関数、及びアーミントン財 $G_{i,t}$ に関する要素需要関数は、下記のとおりとなる。

$$p_t^{Gov} = \sum_i \beta_{i,t}^{GA} p_{A,i,t} \quad (28)$$

$$G_{i,t} = \beta_{i,t}^{GA} G_t \quad (29)$$

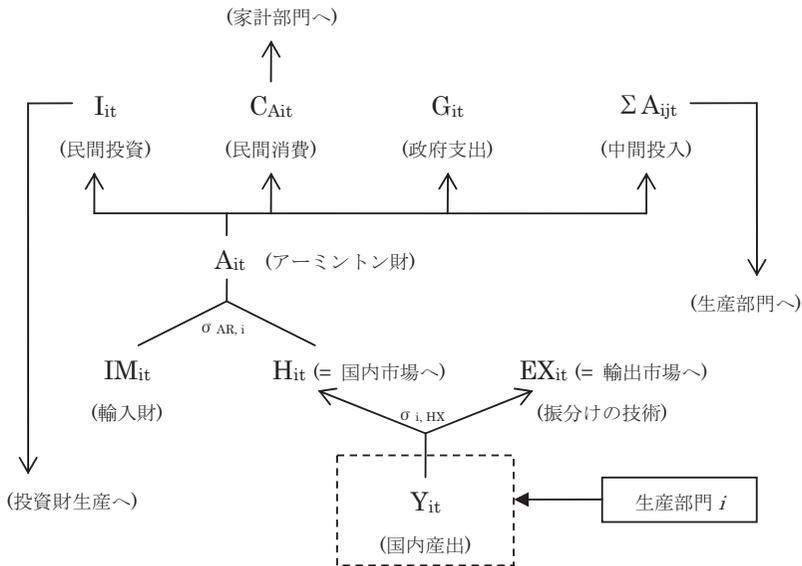
ただし、 $\beta_{i,t}^{GA}$ はマクロの政府支出財 G_t に占める投入アーミントン財 i の比率、 $G_{i,t}$ はアーミントン財 i の投入額である。なお、実際のシミュレーションにおいては、式(28)と(29)の各変数にCalibrated Share Formを適用する（詳細については付録を参照）。

II-4. 海外部門

①輸出部門（国内産出財の輸出市場への振分け）

海外部門における国内財と海外財の間には不完全代替を想定する（アーミントンの仮定）。財 i の国内産出物 $Y_{i,t}$ （生産税賦課後）を海外市場向けの財 $EX_{i,t}$ と国内市場向けの財 $H_{i,t}$ に

図5 海外部門を経由する財の流れ



振分ける中間業者は、CET型技術を用いて今期の売上高 $S_{HX,i,t}$ を最大化するように行動する。

$$\text{Max: } S_{HX,i,t} = p_t^f EX_{i,t} + p_{H,i,t} H_{i,t}$$

$$\text{s.t. } Y_{i,t} = \left[\beta_i^X (EX_{i,t})^{\frac{1+\sigma_{HX}}{\sigma_{HX}}} + \beta_i^H (H_{i,t})^{\frac{1+\sigma_{HX}}{\sigma_{HX}}} \right]^{\frac{\sigma_{HX}}{1+\sigma_{HX}}}$$

ただし、 p_t^f は海外財の価格、 $p_{H,i,t}$ は国内市場向けの財 $H_{i,t}$ の価格、 σ_{HX} は振分けに関する変形弾力性、 β_i^X と β_i^H ($\equiv 1 - \beta_i^X$) はそれぞれ国内産出額（生産税賦課後）に対する輸出額と国内市場出荷額の基準年における比率である。

売上高最大化問題の一次条件、及びゼロ利潤条件より、下式の価格方程式が導出される。

$$p_{Y,i,t} (1 + \tau_i^Y) = \left[\beta_i^X (p_t^f)^{1+\sigma_{HX}} + \beta_i^H (p_{H,i,t})^{1+\sigma_{HX}} \right]^{\frac{1}{1+\sigma_{HX}}} \quad (30)$$

式(30)にShephardの補題を適用すると、海外市場向けの財の供給量 $EX_{i,t}$ と、国内市場向けの財の供給量 $H_{i,t}$ が、下式のように導かれる。

$$EX_{i,t} = Y_{i,t} \left[\frac{p_{Y,i,t} (1 + \tau_i^Y)}{p_t^f} \right]^{-\sigma_{HX}} \quad (31)$$

$$H_{i,t} = Y_{i,t} \left[\frac{p_{Y,i,t} (1 + \tau_i^Y)}{p_{H,i,t}} \right]^{-\sigma_{HX}} \quad (32)$$

なお、実際のシミュレーションにおいては、式(30)～(32)の各変数にCalibrated Share Formを適用する（詳細については付録を参照）。

②輸入部門（アーミントン財の生産）

国内市場向けの財 $H_{i,t}$ と輸入財 $IM_{i,t}$ を組み合わせてアーミントン財 $A_{i,t}$ を生産する中間業者は、代替弾力性 $\sigma_{AR,i}$ のCES型生産技術を用いて、今期の費用 $TC_{A,i,t}$ を最小化するように行動する。

$$\text{Min: } TC_{A,i,t} = p_{H,i,t} H_{i,t} + p_t^f IM_{i,t}$$

$$\text{s.t. } A_{i,t} = \left[\beta_i^{H'} (H_{i,t})^{\frac{\sigma_{AR,i}-1}{\sigma_{AR,i}}} + \beta_i^{f'} (IM_{i,t})^{\frac{\sigma_{AR,i}-1}{\sigma_{AR,i}}} \right]^{\frac{\sigma_{AR,i}}{\sigma_{AR,i}-1}}$$

ただし、 β_i^{AH} と β_i^{AM} ($\equiv 1 - \beta_i^{AH}$) は、それぞれ生産されたアーミントン財に対する国内市場出荷額と輸入額の基準年における比率である。

上記の費用最小化問題より、下記の価格方程式が導出される。

$$p_{A,i,t} = \left[\beta_i^{AH} (p_{H,i,t})^{1-\sigma_{AR,i}} + \beta_i^{AM} (p_t^f)^{1-\sigma_{AR,i}} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_{AR,i}}} \quad (33)$$

式(33)にShephardの補題を適用すると、輸入財 $IM_{i,t}$ と国内市場向け財 $H_{i,t}$ に関する要素需要関数が、それぞれ下記のように導かれる。

$$H_{i,t} = A_{i,t} \left(\frac{p_{A,i,t}}{p_{H,i,t}} \right)^{\sigma_{AR,i}} \quad (34)$$

$$IM_{i,t} = A_{i,t} \left(\frac{p_{A,i,t}}{p_t^f} \right)^{\sigma_{AR,i}} \quad (35)$$

なお、実際のシミュレーションにおいては、式(33)～(35)の各変数にCalibrated Share Formを適用する（詳細については付録を参照）。

③異時点間にわたる貿易収支と対外純資産の均衡（海外財価格の決定式）

異時点間にわたる貿易収支 TB_t と対外純資産 NFA_t 、ならびに海外財価格 p_t^f は、式(36)から式(38)を同時に満たす必要がある。

$$(1 + rn_ex_0) p_0^f NFA_0 + \sum_{t=0}^T TB_t = p_T^f NFA_{T+1} \quad (36)$$

$$TB_t = p_t^f (EX_t - IM_t), \quad EX_t = \sum_i EX_{i,t},$$

$$IM_t = \sum_i IM_{i,t} \quad (37)$$

$$p_t^f = p^f / \prod_{j=0}^t (1 + rn_ex_j) \quad (38)$$

ただし、 rn_ex_t は対外純資産の収益率（税引き後）、 NFA_t は対外純資産残高（期首）、 TB_t は貿易収支（現在価値表示）、 EX_t は輸出財の合計額、 IM_t は輸入財の合計額である。

式(36)は、毎年のフロー貿易収支の黒字の

蓄積と対外純資産の増加の関係を表している⁶⁾。式(37)は、貿易収支（現在価値表示）の定義式である。式(38)は、 t 年における海外財価格 p_t^f は、基準年（ $t=0$ 年）における同価格 $p_0^f = p^f$ の割引現在価値として表されることを示している。海外資産と国内資産とが代替的であり、海外資産の収益率は国内資産の収益率にプレミアムを加えたものに常に等しいことを仮定すれば、長期的な海外財価格 p_t^f は、時間割引因子にのみ影響を受けて変化することになる。そのような想定の下では、前期定常状態にショックが与えられた場合、変化する未知数は1つだけでなければならない。そのため、このモデルでは、 p^f が経済を定常状態に収束させるための調整弁として、貿易収支と対外純資産に関する1本の長期均衡式(36)を満たすように、初期時点において1回のみ変化することを想定する。

II-5. 市場均衡

アーミントン財 i に関する市場均衡式は、下記のようになる。

$$A_{i,t} = C_{A,i,t} + I_{i,t} + G_{i,t} + \sum_j A_{j,i,t}, \quad C_{A,i,t} \equiv \sum_{g=t-N}^t a_{i,g,t} \quad (39)$$

資本ストックと労働（効率単位）に関する市場均衡式は、下記のようになる。

$$K_t = \sum_i K_{i,t} \quad (40)$$

$$L_t \equiv \sum_{g=t-N}^t lab_{g,t} \pi_{g,t} = \sum_i L_{i,t} \quad (41)$$

国内市場向けの財に関する市場均衡式は、式(32)と式(34)より下記のようになる。

$$H_{i,t} = Y_{i,t} \left(\frac{p_{Y,i,t} (1 + \tau_i^Y)}{p_{H,i,t}} \right)^{-\sigma_{HX}} = A_{i,t} \left(\frac{p_{A,i,t}}{p_{H,i,t}} \right)^{\sigma_{AR,i}} \quad (42)$$

なお、実際のシミュレーションにおいては、式(42)の各変数に Calibrated Share Form を適用する（詳細については付録を参照）。

III. カリブレーションとデータ

カリブレーションは、貿易収支および財政収支が安定していた1985年を基準年として行い、1980年代半ば以降の出生率の低下を、人口構造に対して与えられたショックととらえることとする。具体的には、基準年において日本経済が定常状態にあると仮定し、同年の産業連関表（Input-Output Table）をベースにした社会会計表（Social Accounting Matrix）のデータを用いて効用関数及び生産関数等のパラメータが推定される⁷⁾。上記手法によりパラメータを得た後、

1985年（ $t=0$ 年）に生じた人口ショックが2200年（ $t=T$ 年）までの間、マクロ経済に与える影響をシミュレーションする。

III-1. 定常状態と移行過程

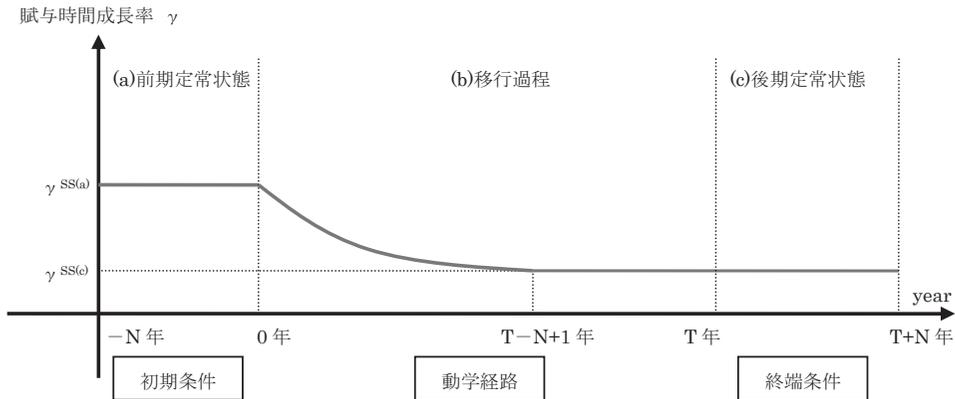
①定常状態（steady state, or steady-state equilibrium）

各世代に与えられる効率単位で測った賦与時間 ω_g の成長率 γ_g は、各世代の（効率単位でない）人口成長率 $fert_g$ と、世代固有の労働増大

6) $t=0$ 年（前期定常状態）と $t=T+1$ 年（後期定常状態）における対外純資産 NFA_0 と NFA_{T+1} は、それぞれ初期条件と終端条件より与えられる外生変数である。

7) このようなカリブレーションの方法は「定常状態カリブレーション法（steady-state calibration method）」と呼ばれる（Rasmussen and Rutherford（2004））。

図6 定常状態と移行過程の概念図



的な技術進歩率 λ_{c_g} (生産性向上の世代効果) に分解される⁸⁾。

$$\omega_{g+1} = (1 + \gamma_g) \omega_g, \quad \gamma_g = fert_g + \lambda_{c_g} \quad (43)$$

定常状態 (steady state) は、人口構成の変化が定常的 (stationary) になり (式 (44))、賦与時間 (効率単位) の成長率 γ_g と潜在実質 GDP 成長率 gdp_dot_t が一定値に収斂する状態 (式 (45)) として特徴づけられる。

$$fert_g = pop_dot_t = const (= fert^{SS}) \quad (44)$$

for all g and t

$$\gamma_g = gdp_dot_t = const (= \gamma^{SS}) \quad \text{for all } g \text{ and } t \quad (45)$$

ただし、 pop_dot_t は (効率単位でない) 総人口の成長率である。

本モデルの価格変数は、将来時点 ($t+i$ 年) における価格変数 p_{t+i} が同時点の実質変数 X_{t+i} を現在価値に変換する役割も有していることから、定常状態における同価格変数は基準収益率 (税引き後) rn_bar の割合で減衰することになる。

②移行過程 (transition path, or dynamic path)

本モデルにおける全シミュレーション期間は、「(a) 前期定常状態 ($t = -N, \dots, 0$)」, 「(b) 移行過程 ($t = 0, \dots, T$)」, 「(c) 後期定常状態 ($t = T, \dots, T+N$)」で構成される (図6)。シミュレーション分析においては、 $t=0$ 年以降に人口減少などの外生的なショックが与えられた場合、最終的に後期定常状態に到達するまでの「(b) 移行過程 ($t = 0, \dots, T$)」における経済の動きが分析される。

移行過程 (transition path) を解く際に必要となる初期条件には「(a) 前期定常状態 ($t = -N, \dots, 0$)」の均衡値を、終端条件には「(c) 後期定常状態 ($t = T, \dots, T+N$)」の均衡値を採用する。 $t = T - N + 1, \dots, T$ 年に生まれる世代 (終端世代, terminal generations) は、 $t = T$ 年以降の後期定常状態においても生存することになるが、これらの世代のライフサイクルの分析を容易にするために、本モデルでは少なくとも $T - N + 1$ 年には経済は新たな定常状態に収斂していると想定する。

8) II-1 節で説明したように、世代 g の賦与時間 $\omega_{g,t}$ はライフサイクルを通して一定と仮定していることから、ここでは同賦与時間を単に ω_g と記している。

Ⅲ-2. 定常状態における成長率と収益率の設定

前期定常状態における実質潜在 GDP 成長率は 1.5%（人口成長率 0.75% + 生産性成長率 0.75%）、後期定常状態におけるそれは 0.75%（人口成長率 0.0% + 生産性成長率 0.75%）とする。また、ベースラインにおける実物資産の基準収益率（税控除前）は 6.0%、税引き後の同収益率は 4.6%、資本税率は 24% とする。前期定常状態における安全資産利子率（税控除前）は 6.0%、後期定常状態におけるそれは 3.0% とする。海外資産の収益率は 10.0% とする。

Ⅲ-3. 家計部門におけるカリブレーション

① ディープ・パラメータの設定

家計の効用関数等における代替弾力性 (σ , ν , κ , σ_{NF}) については、先行研究である Rausch (2009) 等を参考に設定する。消費等に関するシェアパラメータ (α , θ_F , θ_{NF}) については、基準年 (1985 年) の産業連関表 (IO 表) 等を参考に設定する。表 1 は、これらの値をまとめたものである。

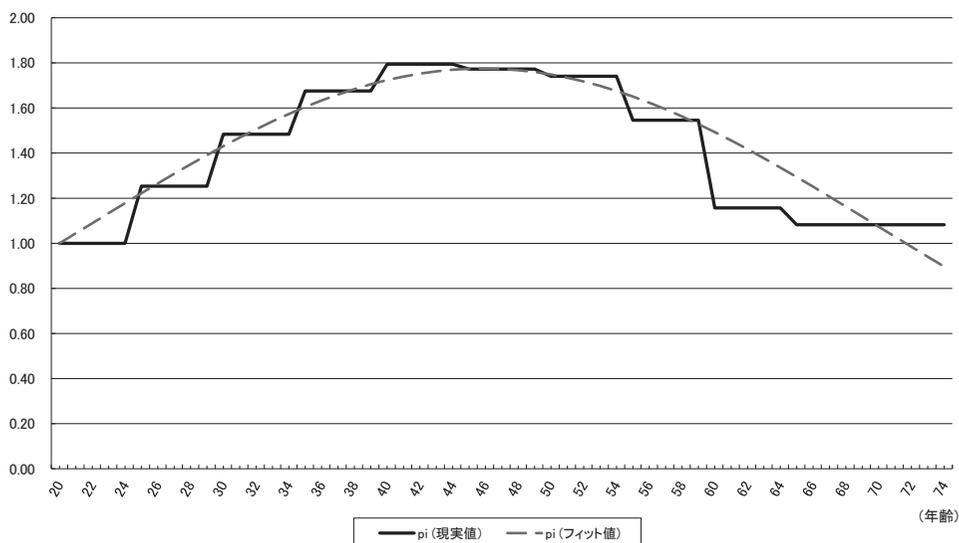
② 年齢に依存する賃金プロファイル（労働生産性）のカリブレーション

本モデルでは、家計は 20 歳で初めて労働市場に登場し、それ以降 55 年間生きて 74 歳で死亡するものと想定されている。日本における年齢依存型の賃金プロファイル（労働生産性）は、

表 1 家計部門における主なディープ・パラメータのまとめ

σ	異時点間の代替弾力性	[Rausch (2009) より]	0.8
ν	消費と余暇の間の代替弾力性	[Rausch (2009) より]	0.6
κ	食料品と非食料品の間の代替弾力性	[筆者が設定]	0.5
σ_{NF}	非食料品の間の代替弾力性	[筆者が設定]	0.5
α	消費に関するシェアパラメータ	[筆者が設定]	0.5
θ_F	食料品消費に関するシェアパラメータ	[IO 表 (1985) より計算]	0.042
θ_{NF}	非食料品消費に関するシェアパラメータ	[IO 表 (1985) より計算]	0.958

図 7 日本における年齢依存型の賃金プロファイル



1985 年度における賃金構造基本統計調査（厚生労働省）のデータを用いて推計される。逆 U 字型の賃金プロファイルの定式化については、Auerbach and Kotlikoff（1987）を参考にして、上に凸の対数 2 次曲線を採用する。

$$\log(\pi_a) = c_0 + c_1 \times (a - 20) + c_2 \times (a - 20)^2 \quad (46)$$

ただし、 a は年齢 ($a = 20, \dots, 74$)、 π_a は年齢が a 歳となる労働者の単位時間あたりの賃金（労働生産性）である。

今回のシミュレーションでは、家計は $a = 20$ 歳で初めて労働市場に参加するものと想定されていることから、「 $a - 20$ 」は仕事の経験年数を表すものと解釈される。係数の符号条件は、 $c_1 > 0$ 、 $c_2 < 0$ が期待される。推計結果は良好である ($c_0 = 0.692$ 、 $c_1 = 0.0444$ 、 $c_2 = -8.60 \times 10^{-4}$)。経験年数の 1 次の項 (c_1) は正で有意（有意水準 1%）、2 次の項 (c_2) も負で有意（有意水準 1%）となり、全て符号条件を満たしている。なお、シミュレーションで実際にこの式を用いる際には、20 歳の値 ($\pi_{a=20}$) を 1 とする規格化を行なっている（図 7）。

③参照世代の年齢 - 消費・貯蓄プロファイルに関するカリブレーション

参照世代 (reference generation) の年齢 - 消費・貯蓄プロファイルに関するカリブレーションは、Rasmussen and Rutherford（2004）が提案している「定常状態カリブレーション法」に基づいて行う。具体的には、基準年（1985 年）が前期定常状態であるとの前提の下、最適条件式が同年の実際の消費額及び貯蓄額を再現するように、参照世代の年齢 - 消費・貯蓄プロファイルのカリブレーションを行う。なお、家計に対する政府純移転支出 ($NTRF_t$) については、その約 6 割は年金給付として 60 歳以上の世代に対して、残りは全世代に対して世代シェアに応じて均等に配分されるものとする。図 8 は、参照世代の年齢 - 消費・貯蓄プロファイルを図示したものである。また、内生的に決定される最適退職年齢は 64 歳付近となる。

Ⅲ - 4. 企業部門におけるカリブレーション

企業の生産関数等における代替弾力性 ($\sigma_{VA}(i)$ 、 $\sigma_{AR}(i)$ 、 $\sigma_{HX}(i)$) については、先行研究である Rausch（2009）及び GTAP モデル（3rd. edition）等を参考にして設

図 8 参照世代の年齢 - 消費・貯蓄プロファイル

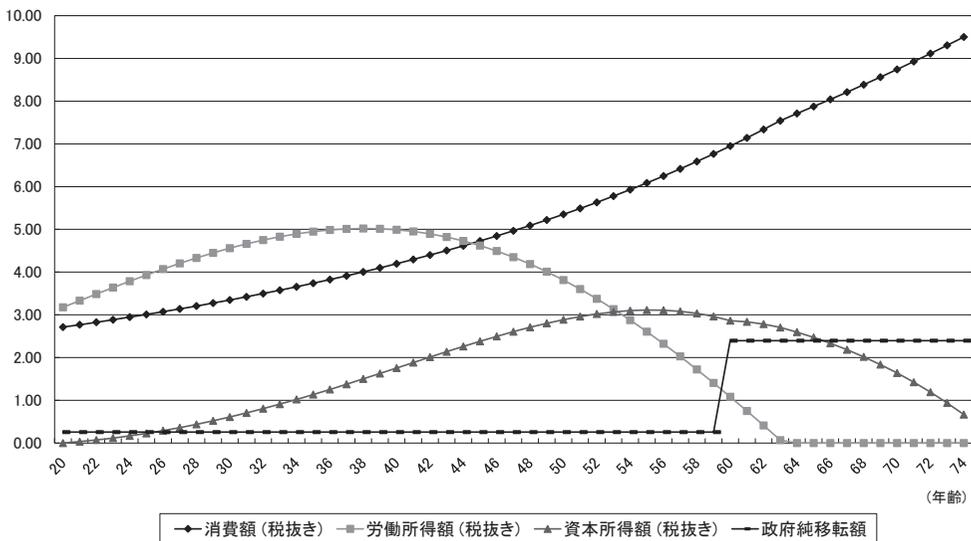


表2 企業部門における主なディープ・パラメータのまとめ

sigma_VA(i)	財 i = 1 の生産に関する資本と労働の代替弾力性 財 i = 2, 3, 4 (同上)	[GTAP モデルより]	0.560 1.260
sigma_AR(i)	財 i = 1 のアーミントン生産に関する国内生産と輸入の代替弾力性 財 i = 2 (同上) 財 i = 3, 4 (同上)	[GTAP モデルより]	2.200 2.800 1.900
sigma_HX(i)	振分けに関する国内出荷と輸出の変形弾力性 (for $\forall i$)	[Rausch (2009) より]	2.000
beta_L(i)	財 i = 1 の生産における労働分配率 財 i = 2 (同上) 財 i = 3 (同上) 財 i = 4 (同上)	[IO 表 (1985) から計算]	0.170 0.519 0.625 0.710
beta_VA(i)	財 i = 1 の付加価値額がグロスの生産額に占めるシェア 財 i = 2 (同上) 財 i = 3 (同上) 財 i = 4 (同上)	[IO 表 (1985) から計算]	0.555 0.269 0.596 0.585
beta_IA(i)	アーミントン財 i = 1 がマクロの設備投資額に占めるシェア 財 i = 2 (同上) 財 i = 3 (同上) 財 i = 4 (同上)	[IO 表 (1985) から計算]	0 0.516 0.484 0
beta_X(i)	財 i = 1 の輸出額が国内産出額に占めるシェア 財 i = 2 (同上) 財 i = 3 (同上) 財 i = 4 (同上)	[IO 表 (1985) から計算]	0 0.098 0.016 0
beta_AM(i)	財 i = 1 の輸入額がアーミントン産出額に占めるシェア 財 i = 2 (同上) 財 i = 3 (同上) 財 i = 4 (同上)	[IO 表 (1985) から計算]	0.171 0.097 0.015 0

(注) 財 i = 1 は農林水産財, i = 2 は貿易財, i = 3 は非貿易財, i = 4 は医療サービス財である。

定する。要素投入等に関するシェアパラメータ ($\beta_{L(i)}$, $\beta_{VA(i)}$, $\beta_{IA(i)}$, $\beta_{X(i)}$, $\beta_{AM(i)}$) については、基準年 (1985 年) の産業連関表 (IO 表) を参考にして設定する。表 2 は、これらの値をまとめたものである。

III-5. 政府部門におけるカリブレーション

基準年 (1985 年) における社会保険料を含む労働所得税率 ($\tau_w(0)$), 資本税率 (τ_r), 生産税率 ($\tau_Y(i)$) については、同年の産業連関表 (IO 表) を参考にして設定する。消費にかかる税率 ($\tau_c(i)$) については、1997 年まで 3%, 1997 年から 2013 年まで 5%, 2014 年から 2015 年まで 8%, 2016 年以降は 10% とする。なお、基準年以降の労働所得税率につい

ては、毎期の政府の予算制約式 (26) を満たすように内生的に決定される。基準年 (1985 年) における政府支出財の要素投入に関するシェアパラメータ ($\beta_{GA(i,0)}$) については、同年の産業連関表 (IO 表) を参考にして設定する。表 3 は、これらの値をまとめたものである。

政府が外生的に与えることのできる政策変数は、政府支出、政府純移転支出、政府純債務対 GDP 比率の目標値である。政府支出については、基準年における全ての財・サービス ($i = 1, \dots, 4$) に関する同支出を成長率で延伸することで作成する⁹⁾。すなわち、全ての財・サービスに関する政府支出の GDP 比は、基準年における同比率でおおよそ固定されることになる。家計に対する政府純移転支出についても、基準年

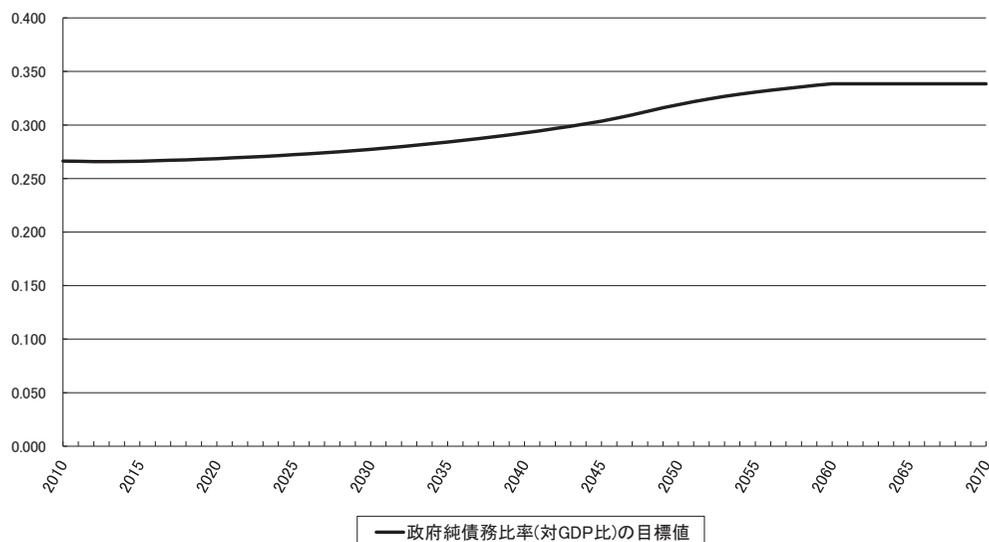
9) Ishikawa *et al.* (2012) は、我が国における高齢化の進展が、需要サイドの医療サービスに対する政府消費 (一般政府の現物給付) を大幅に増加させることを前提としたシミュレーション分析を行っている。

表3 政府部門における主なディープ・パラメータのまとめ

tau_w(0)	労働所得税率 (基準年)	[IO 表 (1985) から計算]	0.263
tau_r	資本税率	[IO 表 (1985) から計算]	0.263
tau_Y(i)	財 i=1 に関する生産税率	[IO 表 (1985) から計算]	0.014
	財 i=2 (同上)		0.046
	財 i=3 (同上)		0.024
	財 i=4 (同上)		0
beta_GA(i, 0)	アーミントン財 i=1 が政府支出額に占めるシェア (基準年)	[IO 表 (1985) から計算]	0
	財 i=2 (同上)		0.037
	財 i=3 (同上)		0.696
	財 i=4 (同上)		0.267

(注) 財 i=1 は農林水産財, i=2 は貿易財, i=3 は非貿易財, i=4 は医療サービス財である。

図9 政府純債務対 GDP 比率の目標値の設定



における同支出を成長率で延伸することで作成する。また、政府純移転支出の約6割は年金給付として60歳以上の世代に対して、残りは全世代に対して世代シェアに応じて均等に配分されるものとする¹⁰⁾。政府純債務対GDP比率の目標値については、図9のように与える。

Ⅲ-6. 人口動態の設定

人口動態に関するシナリオについては、社人

研の人口予測に関するデータ(中位推計)を用いている。具体的には、以下の通りである。

- 1985年から2050年については、20歳世代の人口成長率予測を引用することでシナリオを作成する(2005年までは現実値を引用、1986年は丙午補正を実施)。
- 2050年から2065年については、2065年における20歳世代の人口成長率が0%となるように線形補完を行なうことでシナリオを作成

10) 基準年(1985年)において、政府純移転支出額の62.2%は家計に対する年金給付に充てられている。

図10 総人口（20－74歳）の成長率

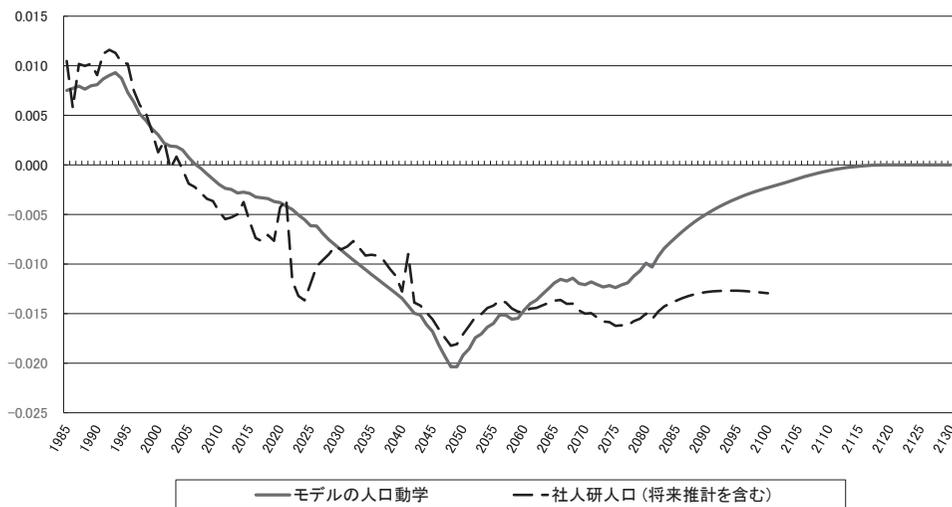
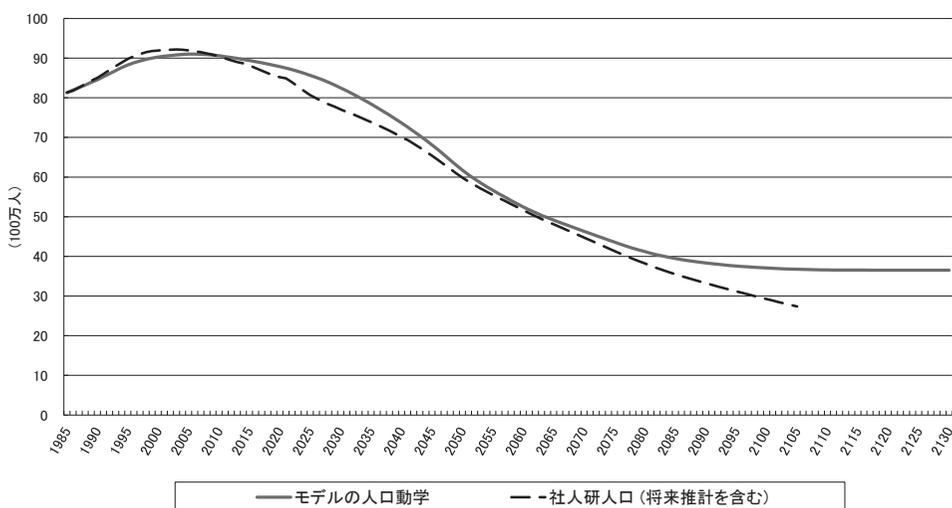


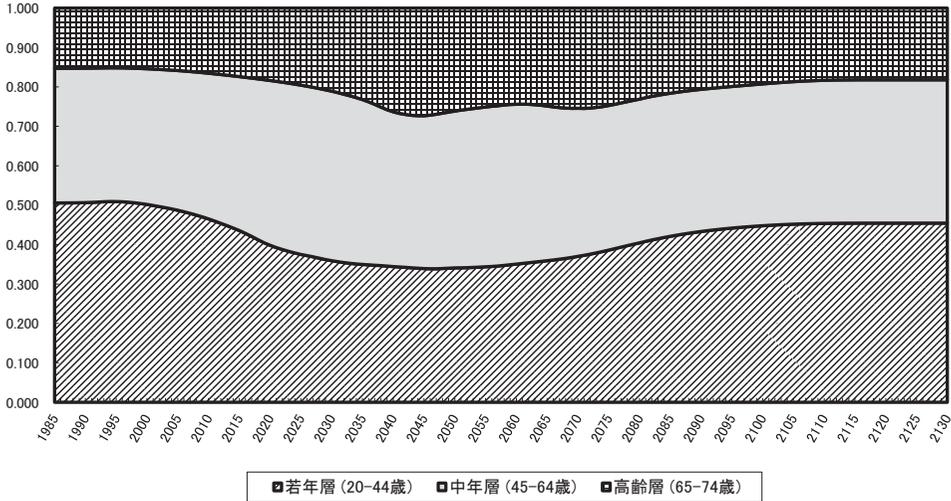
図11 総人口（20－74歳）の水準



する。
 ・2065年以降は、20歳世代の人口成長率が0%で不変と仮定することでシナリオを作成する。
 以上の要領で作成された人口動態のシナリオは、図10、図11に示されている。20歳から44歳までを若年層、45歳から64歳までを中年層、65歳から74歳までを高年齢層とした人口構

成の推移は、図12に示されている。なお、本モデルでは家計は20歳で初めて労働市場に参入し、その後55年間にわたって確定的に生存すると仮定しているため、本モデルの人口動態のシナリオと社人研のそれは、いくらか異なっている。しかしながら、2050年までについては、それらのトレンドは概ね一致している。

図 12 年齢階層別の人口比率



IV. シミュレーション結果

以下では、前節のカリブレーションによって得られたパラメータ等をもとに、人口減少と高齢化の進展がマクロ経済に与える影響について、シミュレーションを行った結果を示す。シミュレーション期間は1985年から2200年とし、最終年である2200年 ($t=T$ 年)には後期定常状態に収斂しているものと想定する¹¹⁾。具体的には、主に以下の5つの点について考察する。

- 主なマクロ変数 (1人あたり変数、要素価格等) への影響
- 産業構造 (各産業の産出額シェア) への影響
- 貿易収支への影響
- 貯蓄率への影響
- 異なる税制の下でのマクロ経済への影響

① 主なマクロ変数 (1人あたり変数、要素価格等) への影響

表4は、主なマクロ変数の推移を、基準年

(1985年)からの乖離率(%)として示したものである。総人口1人あたりの付加価値 (= 付加価値 / 総人口) は2050年時点で3.6%減少する。これは、高齢化による退職者の増加に伴い、分子の付加価値の生産要素である労働供給の減少が、分母である総人口の減少を上回るためである。労働者一人当たりの資本ストックを示す資本労働比率は、2050年までの間に5割近く上昇する。これは、高齢化による退職者の増加に伴い、分母の労働投入量の減少が、分子の資本ストックの減少を上回るためである。

民間消費の対GDP比率も2050年までの間に5割近く上昇する。これは、貯蓄を取り崩し、消費性向が相対的に高くなる高齢世代の割合が上昇するからである。対照的に、民間投資の対GDP比率は低下する。これは、先に見たように資本労働比率が上昇しているため、企業が新たな実物資本を増加させる必要性が低下するこ

11) III-1節で説明したように、本モデルでは実際には2140年 ($t=T-N+1$ 年)に後期定常状態に収斂する。

表4 主なマクロ変数の推移

変数 / 年	2010	2020	2030	2040	2050
総人口1人あたり付加価値 (%)	4.14	5.54	2.24	-2.09	-3.62
資本労働比率 (%)	25.15	29.35	39.39	45.88	45.39
民間消費 (対GDP比) (%)	15.31	20.44	30.14	40.97	46.07
民間投資 (対GDP比) (%)	-24.07	-24.67	-33.54	-43.43	-41.65
賃金率 (%)	10.12	16.76	29.18	44.12	56.88
資本のユーザーコスト (%)	-15.98	-10.55	-4.21	8.84	27.20

(注) 数値は基準年(1985年)からの乖離率(%)である。

表5 各産業の国内産出額シェアの推移

変数 / 年	2010	2020	2030	2040	2050
農林水産業 (%)	2.95	2.96	2.92	2.84	2.74
製造業 (%)	43.27	42.86	41.36	39.49	38.32
非製造業 (%)	50.56	50.93	52.28	53.99	55.14
医療サービス業 (%)	3.22	3.25	3.44	3.69	3.80

(注) 数値は「各産業の産出額の国内産出額合計に占めるシェア」のレベル(%)である。

とを反映している。

賃金率(税控除前)は上昇する。これは、労働供給が相対的に稀少になるからである。資本のユーザーコスト(税控除前)は2030年までは低下する。これは、人口構造の変化のショックによって、資本ストックが労働供給に対して相対的に豊富になり、その調整に長い時間を要することを反映していると考えられる。一方で、2040年以降の資本のユーザーコストは上昇している。その理由としては、2050年以降に人口成長率が回復することに伴う資本ストックの稀少化が、フォワード変数である資本関連価格に徐々に織り込まれること、等が考えられる。

②産業構造(各産業の産出額シェア)への影響

表5は、各産業の国内産出額のシェア(レベル%)の推移を示したものである。上表からも分かるとおり、貿易財を産出する「農林水産業」と「製造業」の産出額シェアが縮小する一方で、非貿易財を産出する「非製造業」と「医療サービス業」の同シェアが拡大している。以下、その要因を説明する。

まず、高齢化によって退職者が増加して大幅

に労働投入量が減少することにより、供給側の国内産出の総額は減少することが見込まれる。このような全般的な国内産出の縮小は、国内財価格の上昇を通じて、輸入財への代替を促す結果となる。農林水産財と貿易財は、輸入品との間の代替弾力性が高いことを想定しており(アーミントン生産に関する国内産出と輸入の代替弾力性はそれぞれ2.2, 2.8)、国内産出の減少は輸入によって代替されることになる。しかしながら、非貿易財と医療サービス財は、輸入が困難であることを想定しており(アーミントン生産に関する国内産出と輸入の代替弾力性は1.9)、輸入によって代替することが難しいため、国内産出に占める割合は増加する。ただし、このような産業構造の変化が実現するためには、本モデルで仮定している通り、農林水産業と製造業から、非製造業と医療サービス業への労働と資本の移動がスムーズに行われることが前提となる。

③貿易収支への影響

表6は、各財の貿易収支のGDP比(レベル%)の推移を示したものである。上表からも分かる

表6 各財の貿易収支の推移

変数 / 年	2010	2020	2030	2040	2050
農林水産財 (%)	-1.28	-1.32	-1.34	-1.38	-1.43
貿易財 (%)	-0.17	-2.26	-4.92	-7.68	-10.02
非貿易財 (%)	0.02	-0.29	-0.72	-1.21	-1.60
医療サービス財 (%)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
(合計) 貿易収支 (%)	-1.43	-3.86	-6.98	-10.26	-13.05

(注) 数値は「各財の貿易収支の GDP 比」のレベル (%) である。

表7 家計貯蓄率の推移

年	2010	2020	2030	2040	2050
家計貯蓄率 (%)	6.84	9.87	5.92	1.38	1.40

(注) 数値は家計貯蓄率のレベル (%) である。

表8 異なる税制の下でのマクロ変数の推移

年	2010	2020	2030	2040	2050
一人当たり付加価値 (消費課税あり / 同課税なし)	1.06	1.08	1.09	1.10	1.10
資本労働比率 (消費課税あり / 同課税なし)	1.12	1.10	1.12	1.14	1.17

(注) 数値は「消費課税がある場合の値」を「同課税がない場合の値」で割ったものである。

とおり、国内の製造業の産出額シェアが縮小し、製造業が産出する貿易財が輸入で代替される結果、長期的に貿易収支が赤字である状態が継続する。

④貯蓄率への影響

表7は、家計の貯蓄率(レベル%)の推移を示したものである。家計貯蓄率は、家計資産残高の階差として求めた家計貯蓄額を、労働所得(税抜き)と移転所得と資産所得(税抜き)の合計値で割ることによって計算している。表7に見られるように、高齢化の進展に伴い、貯蓄を取り崩す高齢世代が増加していくことから、マクロの貯蓄率は低下していく。

⑤異なる税制の下でのマクロ変数の比較

表8は、同一の財政ルール(国債 GDP 比の目標値)の下で、消費課税がある場合のマクロ変数(一人当たり付加価値、資本労働比率)を、

同課税がない場合のそれで割ったものを示したものである。異なる税制の下では、マクロ経済の動向も異なるため、これらのシナリオは厳密な意味で税収に関して中立的なシナリオではないが、税収の GDP に対する比率はどちらの場合でもおおそ同じである。「消費課税あり」のシナリオにおける消費にかかる税率は1997年まで3%、1997年から2013年まで5%、2014年から2015年まで8%、2016年以降は10%としている。「消費課税なし」のシナリオにおける消費にかかる税率は0%である。いずれのシナリオにおいても、政府の予算制約式を満たすために、労働所得税率の水準を調整することとしている。

表8の数値は全て1を超えていることから、消費課税がある場合の方が、ない場合と比べて、一人当たり付加価値と資本労働比率はともに高くなる。これは、高齢化が進展する移行過程においては、増大する高齢者の消費に課税するこ

とが可能になり、若年世代による資本蓄積が促進されるためである（Ihori（1987）¹²⁾。

V. 結論と今後の課題

本稿では、複数の産業部門、対外部門、ならびに異なる年齢の世代が一時点に併存する「多部門開放経済型の世代重複モデル」を用いて、我が国における人口減少と高齢化の進展がマクロ経済に与える影響について、日本経済のデータを用いたシミュレーションの結果を示した。

それらの結果を見ることによって、一定の前提の下で、人口構造の変化が、総人口1人あたりの付加価値の減少、資本労働比率の上昇、賃金率（税控除前）の上昇、資本のユーザーコストの変化、マクロの貯蓄率の低下などを、どの程度の規模でもたらし、どの程度の期間にわたってその影響が継続し得るのかを理解することができる。また、製造業が産出する貿易財が輸入で代替される結果として、国内の製造業の産出額シェアがどの程度縮小し、非製造業の同シェアがどの程度拡大するのか、貿易収支の赤字がどの程度の規模で、どの程度の期間継続することになるのかも、シミュレーションの結果と

して理解することができる。さらに、消費型の課税がある場合の方が、ない場合と比べて、1人当たり付加価値と資本労働比率がどの程度高くなるのかも示された。なお、これらの結果は、経済主体が合理的な意思決定を行い、市場が完全競争で価格が十分に伸縮的であり、資本と労働の部門間の移動が自由である場合にどのようなことが生じるかを示すものであり、現実には様々な制度上の問題などによりこれらの移動が制約を受けるため、実際の経済の姿がシミュレーションの結果から乖離し得ることは言うまでもない。

こうしたモデルは、公的年金や医療保険制度のように世代間の所得移転を行う政策がマクロ経済にどのような影響を与えるかを定量的に考察する上で有用である¹³⁾。また、同一世代内の所得階層を導入し、所得再分配政策が異時点間の資源配分にどの程度の影響を与えるかを考察することも考えられる。

参 考 文 献

- Auerbach, A. and L. Kotlikoff (1987), *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge University Press
- Fougere, M., J. Mercenier and M. Merette (2007), “A Sectoral and Occupational Analysis of Population Ageing in Canada Using a Dynamic CGE Overlapping Generations Model”, *Economic Modeling*, Vol.24, No.4, pp.690-711
- Hviding, K. and M. Merette (1998), “Macroeconomic Effects of Pension Reforms in the Context of Ageing Populations: Overlapping Generations Model Simulations for Seven OECD Countries”, *OECD Working Papers*, No.201, OECD

12) 換言すると、移行過程における消費課税の経済成長に対する親和性は、高齢者の貯蓄に対する実質的な課税に起因する。

13) 前述のように、Ishikawa *et al.* (2012) では、我が国における高齢化の進展が、需要サイドの医療サービスに対する政府消費（一般政府の現物給付）を大幅に増加させるというシナリオを作成し、シミュレーション分析を行っている。

- Economics Department, Organization for Economic Co-operation and Development
- Ihori, T. (1987), “Tax Reform and Intergeneration Incidence”, *Journal of Public Economics*, Vol.33, No.3, pp.377-387
- Ihori, T., R. Kato, M. Kawade and S. Bessho (2005), “Public Debt and Economic Growth in an Aging Japan”, In K. Kaizuka and A. O. Krueger eds., *Tackling Japan's Fiscal Challenges*, pp.30-68, Palgrave, MacMillan
- Ishikawa, D., J. Ueda and R. Arai (2012), “Future Changes of the Industrial Structure due to Aging and Soaring Demands for Healthcare Services in Japan - an Analysis Using a Multi-Sector OLG Model in an Open Economy”, *PRI Discussion Paper Series*, No.12 A-14, Policy Research Institute, Japan Ministry of Finance
- Krueger, D. and A. Ludwig (2007), “On the Consequences of Demographic Change for Rates of Returns to Capital, and the Distribution of Wealth and Welfare”, *Journal of Monetary Economic*, Vol.54, No.1, pp.49-87
- Kumhof, M., D. Laxton, D. Muir and S. Mursula (2010), “The Global Integrated Monetary and Fiscal Model (GIMF) - Theoretical Structure”, *IMF Working Paper*, No.34, International Monetary Fund
- Lau, M., A. Pahlke and T. Rutherford (2002), “Approximating Infinite-Horizon Models in a Complementarity Format: A Premier in Dynamic General Equilibrium Analysis”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.26, No.4, pp.577-609
- Muto, I., T. Oda and N. Sudo (2012), “Macroeconomic Impact of Population Aging in Japan: a Perspective from an Overlapping Generations Model”, *Bank of Japan Working Paper Series*, No.12-E-9
- Okamoto, A. (2013), “Welfare Analysis of Pension Reforms in an Ageing Japan”, *Japanese Economic Review*, Vol.64, No.4, pp.452-483
- Radulescu, D. (2007), “CGE Models and Capital Income Tax Reforms: The Case of a Dual Income Tax for Germany”, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, No.601, Springer
- Rasmussen, T. and T. Rutherford (2004), “Modeling Overlapping Generations in a Complementary Format”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.28, No.7, pp.1383-1409
- Rausch, S. (2009), “Macroeconomic Consequences of Demographic Change”, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, No.621, Springer
- Shimasawa, M. and K. Oguro (2010), “Impact of Immigration on the Japanese Economy: a Multi-Country Simulation Model”, *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol.24, No.4, pp.586-602
- 石川大輔, 北浦修敏, 上田淳二, 中川真太郎 (2010) 「フォワード型マクロ経済モデルの構造とシミュレーション結果」, *フィナンシャル・レビュー*, 第100号, pp.210-254, 財務省財務総合政策研究所
- 井堀利宏, 別所俊一郎 (2008) 「少子高齢化と人口減少がマクロ経済・財政に与える影響の全体像」, 『人口動態の変化と財政・社会保障制度のあり方に関する研究会報告書』, pp.23-50, 財務省財務総合政策研究所
- 川出真清 (2003) 「高齢化社会における財政政策—世代重複モデルによる長期推計—」, *PRI Discussion Paper Series*, No.03 A-25, 財務省財務総合政策研究所
- 木村真, 橋本恭之 (2010) 「多部門世代重複モデルによる財政再建の動学応用—一般均衡分析」, *経済分析*, 第183号, pp.1-24, 内閣府社会経済総合研究所
- 佐藤格, 中東雅樹, 吉野直行 (2004) 「財政の持続可能性に関するシミュレーション分析」, *フィナンシャル・レビュー*, 第74号, pp.125-145, 財務省財務総合政策研究所

付録 Calibrated Share Form について

① Calibrate Share Form で表された CES 型の生産関数¹⁴⁾

一般的な CES 型生産関数を技術制約とした費用最小化問題を、以下のように定式化する。

$$(I) \text{ Min: } C = \sum_{i=1}^n p_i X_i \text{ s.t. } Y = \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

ただし、 C は総費用、 p_i は生産要素 i の価格、 X_i は生産要素の投入量、 Y は生産量、 α_i は分配に関するパラメータ、 $\sigma (> 0)$ は生産要素間の代替の弾力性である。よく知られているように、 $\sigma = 0$ (完全補完) の場合は Leontief 関数、 $\sigma = 1$ の場合は Cobb = Douglas 型関数、 $\sigma = \infty$ (完全代替) の場合は線形関数となる。

F.O.C. は、以下のようになる。

$$\frac{\partial Y}{\partial Y_i} = \frac{\partial Y}{\partial Y_j} \text{ or } \frac{\alpha_i X_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{p_i} = \frac{\alpha_j X_j^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{p_j} \quad (47)$$

上記の F.O.C. を基準年の値 (アッパー・バーで表示) で評価して α_i について解くと、以下のようになる。

$$\frac{\alpha_i \bar{X}_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\bar{p}_i} = \frac{\alpha_j \bar{X}_j^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\bar{p}_j} = \mu \quad \therefore \alpha_i = \mu \bar{p}_i \bar{X}_i^{1/\sigma}$$

α_i の表式を問題 (I) の生産関数 Y に代入して整理すると

$$Y = \left[\mu \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \bar{X}_i \left(\frac{X_i}{\bar{X}_i} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

となる。ここで、投入要素 i に関するコスト・シェア θ_i を

$$\theta_i \equiv \frac{\bar{p}_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^n \bar{p}_i \bar{X}_i} = \frac{\bar{p}_i \bar{X}_i}{\bar{C}} \quad (48)$$

と定義し、この表式 (48) を上式に代入して整理すると、

$$Y = \kappa \left[\sum_{i=1}^n \theta_i \left(\frac{X_i}{\bar{X}_i} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \quad (\text{ただし } \kappa \equiv (\mu \bar{C})^{\frac{\sigma}{1-\sigma}})$$

を得る。 κ を求めるために、上式を基準年で評価すると

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \kappa \left[\sum_{i=1}^n \theta_i \left(\frac{\bar{X}_i}{\bar{X}_i} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \kappa \left[\sum_{i=1}^n \theta_i \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \\ &= \kappa (1)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \kappa \quad \therefore \kappa = \bar{Y} \end{aligned}$$

となる。

まとめると、問題 (I) における生産関数 Y は、投入要素 i に関するコスト・シェア θ_i を用いて、以下のように書ける。

$$Y = \left[\sum_{i=1}^n \theta_i \left(\frac{X_i}{\bar{X}_i} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \quad (49)$$

式 (49) は、生産関数 Y の Calibrate Share Form 表現と呼ばれる。この表現の利点は、生産関数のディープ・パラメータ θ_i を、基準年における投入要素 i のコスト・シェアを用いることで簡単にカリブレートできる点にある。

② Calibrate Share Form で表された CES 型の単位費用関数 (unit cost function)、及びその要素需要関数の導出

以上の議論から、費用最小化問題 (I) は、下記の問題 (II) と等価となる。

$$(II) \text{ Min: } C = \sum_{i=1}^n p_i X_i \text{ s.t. } \frac{Y}{\bar{Y}} = \left[\sum_{i=1}^n \theta_i \left(\frac{X_i}{\bar{X}_i} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

問題 (II) を実際に解いてみる。F.O.C. は、

14) 生産関数を効用関数と読み替えると、以下の議論は家計の効用最大化問題にも適用できる。

以下のようになる。

$$\frac{\partial Y}{\partial Y_i} = \frac{\partial Y}{\partial Y_j} \quad \text{or} \quad \frac{\theta_i \bar{X}_i^{1-\sigma} X_i^{\frac{1}{\sigma}}}{P_i} = \frac{\theta_j \bar{X}_j^{1-\sigma} X_j^{\frac{1}{\sigma}}}{P_j}$$

$$\therefore X_j = \left(\frac{\theta_i P_j}{\theta_j P_i} \right)^{-\sigma} \left(\frac{\bar{X}_i}{\bar{X}_j} \right)^{-(1-\sigma)} X_i \quad (50)$$

式(50)を問題(II)の生産関数 Y に代入して X_i について解くと、以下を得る。

$$X_i = \left(\frac{Y}{\bar{Y}} \right) \bar{C} \theta_i \bar{p}_i^{\sigma-1} p_i^{-\sigma} \left[\sum_{j \neq i}^n \theta_j \left(\frac{p_j}{\bar{p}_j} \right)^{1-\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

上式を問題(II)の費用関数 C に代入して整理すると、Calibrated Share Formで表された単位費用関数(unit cost function)を得ることができる。

$$\frac{C}{\bar{C}} = \left(\frac{Y}{\bar{Y}} \right) \left[\sum_{i=1}^n \theta_i \left(\frac{p_i}{\bar{p}_i} \right)^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$\text{or} \quad \frac{c_Y}{\bar{c}_Y} \equiv \left(\frac{C/Y}{\bar{C}/\bar{Y}} \right) = \left[\sum_{i=1}^n \theta_i \left(\frac{p_i}{\bar{p}_i} \right)^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (51)$$

なお、生産関数の1次同次性に起因するゼロ利潤条件より、単位費用関数 c_Y と価格 p_Y の間には以下の関係がある。

$$\Pi = p_Y Y - C = Y(p_Y - C/Y) = Y(p_Y - c_Y) = 0$$

$$\text{or} \quad p_Y = c_Y \quad \& \quad Y > 0 \quad (52)$$

式(52)のゼロ利潤条件を相補問題(complementary problem)として定式化すると、下記のようになる。

$$\text{Find } Y \text{ such that } Y(p_Y - c_Y) = 0$$

$$\& \quad c_Y \geq p_Y \quad \& \quad Y \geq 0 \quad (53)$$

要素需要関数(factor demand function)を得るために、Shephardの補題を単位費用関数(51)に適用する。

$$X_i = \frac{\partial C}{\partial p_i} = \theta_i \bar{C} \left(\frac{Y}{\bar{Y}} \right) \left[\left(\frac{C}{\bar{C}} \right) \left(\frac{Y}{\bar{Y}} \right)^{-1} \right]^{\sigma} \bar{p}_i^{\sigma-1} p_i^{\sigma} \quad (54)$$

$$\bar{X}_i = \theta_i \bar{C} \bar{p}_i^{-1} \quad (55)$$

式(54)、(55)より、要素需要関数は

$$\frac{X_i}{\bar{X}_i} = \left(\frac{Y}{\bar{Y}} \right) \left[\left(\frac{C}{\bar{C}} \right) \left(\frac{Y}{\bar{Y}} \right)^{-1} \left(\frac{\bar{p}_i}{p_i} \right) \right]^{\sigma}$$

$$\text{or} \quad \frac{X_i}{\bar{X}_i} = \left(\frac{Y}{\bar{Y}} \right) \left[\left(\frac{c_Y}{\bar{c}_Y} \right) \left(\frac{\bar{p}_i}{p_i} \right) \right]^{\sigma} \quad (56)$$

と求まる。