条件つき確率を教えることの何が難しいのか

植野義明 *

概要

In this note, we deal with the problem why it is especially difficult to teach conditional probabilities in secondary school mathematics.

Probability problems are often presented in the form of word problems along with daily life circumstances. The reason why these problems are difficult to solve lies in the fact that then the brain's strategy based on the evolutionary process in forming the human genes, the stragegy that is effective in understanding the situation in daily life, will be used unconsciously. In fact, the brain does not understand the circumstances so logically as it does intuitively, so that it causes a mismatch with the logical structure of mathematics. This is the conclusion adopted in the work of Artstein [1].

In Chapter X of [1], two exercise problems are discussed concerning conditional probabilities. Although the author's conclusion is clear, the detailed calculations are omitted, on which we focus.

key words : secondary school mathematics, conditional probability

1 はじめに

数学教育の中で確率は統計の基礎としても重要であるが、代数や幾何などの分野に比べてどこか特殊で、公式に当て嵌めれば解けるいわゆる数学らしい数学からは少し異質で、離れているイメージがあるのではないか。

人間の確率的現象の理解の基礎には、自然環境の中でのランダムな現象に対応するための動物的な直感がある。一方、確率が数学の体系の中で基礎となる性質 (公理) に基づいて定式化されたのは近代になってからである。

人類は、古代からくじ引きや賭け事などの遊びや、無益な政治的対立を回避して公正な決断を行うために確率的現象を利用してきた。そのような場面では、基礎として確率的現象に対する直観の働きがあった。

ガリレオ・ガリレイは、3 個のサイコロを投げて, 目の和が 9 または 10 になる数の組合せの数はともに 6 個であるが経験的には和が 10 になる場合の方が多いのはなぜかという問題を当時のギャンブラーから訊ねられた。ガリレイはそれに正しく答えたが、その時代にはまだ確率という言葉そのものがなかった。

数学的概念としての確率が登場したのは、1654 年のフェルマーとパスカルの間の書簡が初めてであり、これが確率が現代的な公理に基づく理論となる道に進むきっかけとなった。

このような歴史的な事情から考えると、人間が確率的な現象について考えるとき、無意識のうちに直感的な判断に頼ってしまう部分と、数学的、論理的に計算する部分とがうまく助け合うことで正しい判断に導けるといえる。

2 男の子・女の子

これは、[1] の第 10 章の中で、「ある教育関係の雑誌に載っていた記事の中の問題」として取り上げられている問題で、具体的な問題文は次のようになる（和訳は筆者：以下も同様）。

> 男子の出生確率が $\frac{1}{2}$ であることは与えられているものとします。ある家族に子どもが三人います。この例には二つの段階があります。

* 東京工芸大学工学部基礎教育研究センター 准教授

2015 年 9 月 28 日受理

> 第一段階は、家族が住むマンションの外にその家の女の子が二人見えているというものです。残りの子どもが男の子である確率はいくらでしょうか。
>
> 第二段階は、女の子二人に加えて、マンションの部屋の中に赤ちゃん、つまり、庭で会った二人の女の子の弟か妹がシルエットで見えているというものです。このとき、三人目の子どもが男の子である確率はいくらでしょうか。

Artstein は [1], p. 402 において、次のように書いている。

> (この記事の) 書き手は、「多くの生徒が問題の前半部分に対する答は $\frac{1}{2}$ だと確信している」とまず述べており、同書き手によれば、「生徒たちの説明は、対称性によるものである」ということである。

ここに書かれている生徒の解答は、つまり、三番目の子どもが男の子である確率は女の子である確率に等しいからというもので、この解答は数値としてはいちおう正解であるように思われるが、理由として不適切であるように思われる。なぜなら、この問題では、始めに「男子の出生確率が $\frac{1}{2}$ であることは与えられているものとします。」と書かれており、生徒たちがいう「対称性」はこの条件に意味を与えて言い換えたものに過ぎない。

生徒たちが、男子の出生確率が $\frac{1}{2}$ であることから女子の出生確率も $\frac{1}{2}$ であり、したがって、この意味で男子と女子の間には対称性が成り立っているとしても、このことが、問の前半で問われている内容に関しても対称性が成り立つことを保証するとは直ちにはいえない。そこには何らかの理由付けの付加が必要である。生徒たちの理由付けは言葉による説明ができていないという意味において直感的であるといえる。

実は、この問題では、記事の書き手にも間違いがある。真相は、解答に必要な条件が明示されておらずそのために解答ができないのである。

別の言い方をすると、明示されていない条件を補う補い方が複数存在し、従って、解答者によって異なる複数の正解が存在するため、論争が起きる。しかも、やっかいなのは、明示されていない条件を補う脳の活動は、無意識かつ自動的に起きることである。そのため、論争に加わる人たちの間で、その論争がなぜ起きているのかが理解できず、論争の原因を理解することは極端に困難である。

3　モンティー・ホールの問題

この問題は [1] p.404 で取り上げられている。はじめに、モンティー・ホールの問題とはどのような問題であるのかを [1] に従って説明してから、問題に欠けている条件について考えよう。

> あなたはいまゲームに参加しています。あなたの前には閉じた三つのドアが示され、一つのドアの向こうには高額の賞金がありますが、他の二つのドアそれぞれの向こうにはヤギがいると告げられます (ここで、ヤギは外れの印である。)。あなたには一つのドアを選ぶ権利が与えられます。そのドアが開かれ、高額の賞金かヤギが現われる前に、ホストが他のドアの一つを開くと、そこからヤギが現われました。ホストはそれぞれのドアの向こう側に何があるかを知っているのです。
>
> さて、ここでホストは、あなたに考えを変えてもう一つのドアを選ぶチャンスを与えます。選択を変える、つまりホストが開けなかった方のドアを選ぶことには意味があるでしょうか。

この問題は、Monty Hall 氏がホスト (司会役) を務め、アメリカで人気番組となった Let's make a deal (手を打ちましょう) という視聴者参加のゲーム番組がもとになっている。これを生徒用の確率の問題として提示するにあたって、著者によって多少記述に相違が生じる可能性があるが、ここでは [1] に沿った上記の記述に基づいて分析を進めよう。

アートシュタインによれば、モンティー・ホールの問題でも解答に必要な条件が明示されておらずそ

のために解答ができない。

しかも、この問題についても、前述の「男の子・女の子」の問題と全く同様に、明示されていない条件を補う補い方が複数存在し、従って、解答者によって異なる複数の正解が存在するため、論争が起きる。そして、明示されていない条件を補う脳の活動が無意識かつ自動的に起きるために、論争に加わる人たちの間で、その論争がなぜ起きているのかということすらが理解できず、論争の原因を理解して解決することが極端に困難となるのである。

以下では、まずどのような条件が問題文に欠けているのかを指摘し、次に欠けている条件をどのように補えば正しい解答がどのように変わるのかということをいくつかの例によって示す。欠けている条件の補い方を変えることによって実際に正解が変化することから、読者はその条件が確かに欠けていることに会得がいくだろう。

欠けている条件

問題に欠けている条件は、あなたがドアを選んだとき、(1) ホストは残りの二つのドアのうちからヤギがいるドアを選んで開けることを義務付けられているのか、そして、(2) もし、義務付けられているならば、ホストは残りのドアから開けるドアをどのようにして選んでいるのかという条件である。

解答

三つのドアをドア 1, 2, 3 とする。

ドア 1, 2, 3 の向こうに賞金がある確率はどれも $\frac{1}{3}$ であるとし、あなたはドア 1 を選んだとする。

以下では、説明を簡単にするために、はじめに、ホストがドアを開けることを義務付けられている場合を扱う。

ケース 1

ホストは残っているドア 2, 3 のうちヤギのいるドアが一つだけならば、そのドアを開ける。どちらにもヤギがいるとき、どちらのドアを開けるかはホストが恣意的に選び、あなたには分らない。

このとき、選んだドアを必ず変更した場合に賞金が当る確率を求めてみよう。下図に示すよう、当りのドアがドア 2 または 3 であるときには必ず賞金が当り、当りのドアがドア 1 であるときは、ホストがドア 2, 3 のどちらを開けても賞金は当らない。したがって、賞金が当たる確率は $\frac{2}{3}$ である。

逆に、ドアを変えないときに賞金が当たる確率は $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ となり、選ぶドアを変えることによって当たる確率は $\frac{1}{3}$ だけアップすることが分る。

表 1　ホストが開けるドアを恣意的に決めているとき
ドアを変えることによって当る確率は 2/3 に増加する。

当りのドア	始めに選んだドア	ホストが開けるドア	選び直すドア	その確率	当る確率	当る確率（合計）
1	1	2	3	?	0	2/3.
		3	2	?	0	
2	1	3	2	1/3.	1/3.	
3	1	2	3	1/3.	1/3.	

注意：ホストがドア 2 を開けたとき、あるいはドア 3 を開けたときのそれぞれの場合に賞金が当る確率（条件つき確率）は、求められない。ホストの行動が恣意的であるために、条件つき確率の定義式における分母が計算できないからである。

ケース 2

ホストは残っているドア 2, 3 のうちヤギのいるドアが一つだけならば、そのドアを開ける。どちらにもヤギがいるとき、ホストは必ずドア 2 を選ぶ。

このとき、下図に示すように、ホストがドア 2 を開けた場合、あなたが選ぶドアを変えたときに賞金が当たる確率は $\frac{1}{2}$ であり、ホストがドア 3 を開けた場合、あなたが選ぶドアを変えたときに賞金が当たる確率は 1 である。

注意：もしあなたがこのようなホストの行動指針を知っているならば、ホストがドアを開けた時点で賞金が当る確率（条件つき確率）を知ることができる。特に、ホストがドア 3 を開けたときには必ず賞金が当ることが分る。

ケース 3

これは、上記のケース 2 の一般化である。

表2　ホストが開けるドアを予め決めているとき、ドアを変えることによって当る確率（条件つき確率）は 1 になることもある。

当りのドア	始めに選んだドア	ホストが開けるドア	選び直すドア	その確率	当る確率	当る確率（合計）
1	1	2	3	1/3.	0	2/3.
		3	2	0	0	
2	1	3	2	1/3.	1/3.	
3	1	2	3	1/3.	1/3.	

ホストはドア 2, 3 のうち、ヤギのいるドアが一つだけならば、そのドアを開ける。二つともヤギがいるとき、ホストは確率 p でドア 2 を選び、確率 q でドア 3 を選ぶ。ただし、$p \geq 0, q \geq 0, p+q=1$ とする。（前出のケース 2 では、$p=1$, $q=0$ である。）

このとき、下図に示すように、ホストがドア 2 を開けた場合、あなたが選ぶドアを変えたときに賞金が当たる確率は $\frac{1}{p+1}$ であり、ホストがドア 3 を開けた場合、あなたが選ぶドアを変えたときに賞金が当たる確率は $\frac{1}{q+1}$ である。

表3　ホストが開けるドアを確率的に決めているとき、ドアを変えることによって当る確率は少なくとも 1/2 まで上昇する。

当りのドア	始めに選んだドア	ホストが開けるドア	選び直すドア	その確率	当る確率	当る確率（合計）
1	1	2	3	p/3	0	2/3.
		3	2	q/3	0	
2	1	3	2	1/3.	1/3.	
3	1	2	3	1/3.	1/3.	

注意：$0 \leq p \leq 1$ であることから、$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p+1} \leq 1$ であり、q についても同様である。

ケース 1〜3 の計算結果を総合すると、いずれの場合でもあなたは選ぶドアを変えることによって賞金を当てる確率を最低でも $\frac{1}{2}$ まで上昇させることができ、うまくするとその確率が 1 となることもあり得る。なお、欠けている条件を補う常識的に考えられ得る補い方は以上で網羅されているように思われるが、ホストがドアを選ぶ選び方のモデルが他にも考えられるかもしれない。

なお、この問題はイスラエルの教科書にも載っているということである。そこでは、解説はこれほど記述が正確ではなく、どのケースを想定しているのかが曖昧であるが、選ぶドアを変えることによって当る確率は $\frac{1}{3}$ から $\frac{2}{3}$ に上昇すると結論付けている。

ホストがドアを開けることを義務付けられていない場合にはさらにいろいろな変種が考えられる。例えば、ホストはあなたが選んだドアの向こうに賞金がある場合にだけ別のドアを開けて選択を変えることを促し、そうでない場合はドアを開けないとしたらどうだろうか。この場合、ホストはあなたを「騙すだけのために」ドアを開けるのであるから、選んだドアを変ることはあなたにとって有利な選択ではない。

4　封筒の問題

これは、「2 枚の封筒があり、一方が他方の 2 倍の金額のお金が入っている。参加者はこれらの封筒から 1 枚を選び、持ち帰ることができる。いま、1 枚の封筒を開けたところ 1 万円入っていた。ここで司会者が 1 回だけもう 1 枚の封筒に取り替えてもよいと言った。あなたは封筒を取り替えるべきだろうか。」という問題である。

ネット上では 10 年ほど前にこの問題の話題で盛り上がり、数学教育関係者の間でも活発な議論があった。今でも、面白い数学の話題としてときどきブログなどの記事に取り上げられている。

もし、番組のスポンサーが、この 1 回のゲームに総額 3 万円を投資した確率が p で、総額 1.5 万円を投資した確率が q であるとするならば、封筒を取り替えたときの獲得金額の期待値は（$q=1-p$ であるから）変数 p を含む式として求められる。もし、スポンサーの行動が恣意的であり、確率的なプロセスによって決まっているのではないのであれば、これは確率的な現象ではないので、期待値を求めることはできない。

5 結論

ここでの考察が数学教育においてどのような意味を持つであろうか。

まず、未来に起こる不確実な現象にはランダムだが確率は決まっている現象と、そうではなく、確率の概念が適用できない現象とがあることを理解すべきである。ある試行の結果が 2 通りあり、どちらが起こりやすいかについて全く情報がないからといって、どちらも $\frac{1}{2}$ の確率で起こると結論付けてはならない。

確率では、教える側は、必要な条件が欠落している問題を出題しないように注意すべきである。

子どもたちは、直感的に答が分っている問題については、たとえその答が間違っている場合でも、全く同じ問題を論理的な側面から考えなおすことは苦手である。例外は、生徒にそのような複眼的な思考の経験が十分にある場合であるが、それは稀なケースである。

一方で、確率は統計データを読み取る力をつける基礎となる重要なテーマである。

なお、動物における確率的行動の実験的研究の結果については、[1] の文献によって知ることができる。

参考文献

[1] Zvi Artstein, Mathematics and the Real World, Prometheus Books, 2014.