電　力　輸　送

電力中央研究所報告

短い時間領域の現象を含む電力系統の動特性解析手法の開発

－数値的安定性に優れた**ETDRK**法の適用－

研究報告：R18001

2019年7月

電力中央研究所

CRIEPI

Central Research Institute of Electric Power Industry

短い時間領域の現象を含む電力系統の動特性解析手法の開発
－数値的安定性に優れた ETDRK 法の適用－

河村　集平 *[1]　　小関　英雄 *[2]　　内田　直之 *[3]

キーワード：数値積分手法
動特性解析
数値的安定性
ルンゲクッタ法
固有値

Key Words：Numerical Integration Method
Dynamic Simulation
Numerical Stability
Runge-Kutta Method
Eigenvalue

Development of Dynamic Simulation Method for Power System Including Short Term Electric Phenomena -Application of ETDRK Method with Superior Numerical Stability-

Shuhei Kawamura, Hideo Koseki and Naoyuki Uchida

Abstract

Conventionally, an explicit method such as the classical Runge-Kutta method has been used in dynamic simulation. In recent years, power electronic devices with fast control response such as renewable energy sources are increasingly introduced to power system. When it is simulating these short term electric phenomena in Root Mean Square (RMS) simulation domain, numerical instability can be the problem. This paper describes a new RMS simulation method improved numerical stability using Exponential Time Differencing Runge-Kutta (ETDRK) method. The ETDRK is a class of exponential integrators, where the linear term of a differential equation is treated exactly, while the non-linear term is numerically integrated. The effectiveness of the proposed method verified by numerical simulation using the IEEJ EAST-10 benchmark power system model. The results showed that the proposed method is outperformed the classical Runge-Kutta method in terms of numerical stability and precision.

*[1] システム技術研究所　電力システム領域　研究員
*[2] システム技術研究所　電力システム領域　主任研究員
*[3] 東京理科大学　工学部　電気工学科　元教授

背　　景

近年，再生可能エネルギー電源等の高速な制御動作をもつパワーエレクトロニクス機器の系統連系が増加しており，電力系統の実効値動特性解析もより短い時間領域を含む現象に対応していく必要がある。当所のY法[1)]では数値積分手法として4段4次の陽的ルンゲクッタ（RK4）法が用いられているが，上記のような速い動特性を含む系統を解析対象とする場合においては，時間刻みが大きいと物理的には収束すべき数値解が発散してしまう性質（数値的不安定性）がある。そのため，時間刻みを小さく設定する必要があるが，その結果として計算量が増大し，計算時間が膨大となる欠点がある。

目　　的

短い時間領域の現象を含む電力系統を数値的安定かつ効率的に解析可能な新たな動特性解析手法を開発する。

主な成果

1. ETDRK法を用いた系統解析手法の開発

近年注目されている数値積分手法であるETDRK法[2)]（表1）を用いた新たな電力系統の動特性解析手法を開発した。開発手法では，電力系統の微分方程式を線形項と非線形項に分離し，ETDRK法を適用して線形項を厳密に取り扱うことにより，数値的安定に積分計算できる。また，微分方程式の変数変換を行うことにより，電力系統の定態安定度解析で用いられる固有値を活用して，ETDRK法で必要となる行列指数関数を容易に計算できるアルゴリズムとしている（図1）。

2. シミュレーションによる検証

電気学会EAST10機系統モデル[3)]を用いて，小さい時間刻みでのRK4法での解析結果をリファレンス[4)]として，①時間刻みを変更した場合の数値解の精度と，②時定数の短い制御を含むPVがある系統の動特性解析への適用性を検証した。①では，0.002秒～0.1秒の時間刻みでのRK4法とETDRK4法（4段4次のETDRK法）の結果の誤差を比較した（図2）。その結果，ETDRK4法はRK4法と同等以上の精度であり，時間刻みに関わらず数値的安定に計算できることが分かった。②では，解析する時間刻みよりも短い時定数を含むPVをEAST10機系統に連系した場合について両者の解析結果を比較した（図3）。RK4法はシミュレーション開始直後に数値的不安定となり解が発散するのに対し，ETDRK4法はリファレンスと概ね解析結果が一致しており，数値的安定に計算できることが分かった。また，シミュレーション計算時間の比較より，ETDRK4法はRK4法に比べて，同じ時間刻みでは計算時間が少し増えるが，短い時定数を含む場合には時間刻みを小さくせずに効率的に計算できる（表2）。

注 1) 当所で開発された電力系統実効値動特性解析プログラムであり，電力系統統合解析ツール CPAT の一機能。詳しくは「大規模電力系統の安定度総合解析システムの開発」，電力中央研究所総合報告 T14 (1990) を参照。

2) Exponential Time Differencing Runge-Kutta (ETDRK)法は，Exponential Integrator と呼ばれる数値積分手法の一種である。詳しくは，Krogstad, "Generalized integrating factor methods for stiff PDEs", J. Comput. Phys. 203 (2005) 等を参考にされたい。

3) 電力系統標準化モデル調査専門委員会：「電力系統の標準モデル」，電気学会技術報告第 754 号

4) 解析解（真値）を求めることは困難であるため，時間刻み 0.001 秒にて RK4 法を用いてシミュレーションした結果をリファレンスの解析結果とした。

表 1 数値積分手法の比較

手法の種類		手法の概要	利点と欠点
陽解法	オイラー法・RK法などの一般的な手法	現在の値から次ステップの値を算出する手法	○：計算手順が簡単で，収束計算が必要ない ×：計算する時間刻みよりも速い動特性（短い時定数）が含まれていると解が数値的不安定になる可能性がある
	ETDRK法	線形項と非線形項に分離した微分方程式に対し，現在の値から次ステップの値を算出する手法（線形項は厳密に取り扱う）	○：数値的安定に計算でき，RK法と計算手順が同様のため収束計算が必要ない ×：一般的な陽解法よりも係数が複雑（行列指数関数等の計算が必要）
陰解法		現在の値と将来の値（未知数）から次ステップの値を算出する手法	○：数値的安定に計算可能 ×：微分方程式が非線形の場合には収束計算が必要

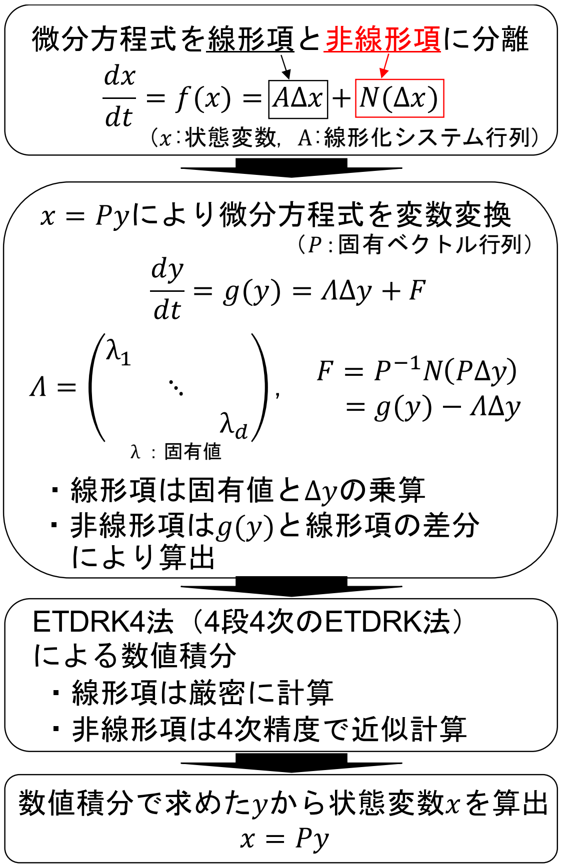


図 1 開発手法の概要*1
（ETDRK 法を用いた数値積分の計算手順）

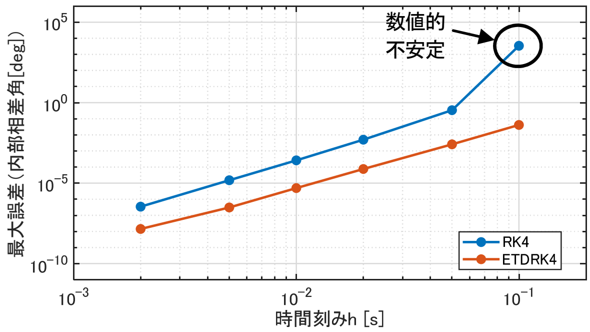


図 2 数値誤差の比較*2（発電機 G8 の内部位相角）

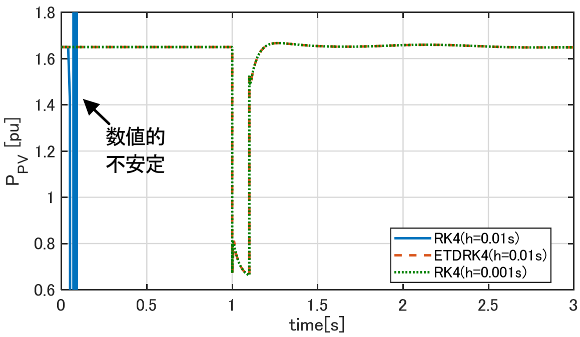


図 3 PV がある EAST10 機系統での解析結果
（PV#Node18 の有効電力出力）

表 2 計算時間の比較

手法（時間刻み）	シミュレーション計算時間*3	
	①PVなし	②PVあり
RK4(刻み0.01秒)	1.71 秒	—*4
ETDRK4(刻み0.01秒)	2.02 秒	3.30 秒
RK4(刻み0.001秒)	15.84 秒	23.53 秒

*1 ETDRK4 法は 4 段の手法であるため，シミュレーションでは時間刻み 1 ステップにつき変数変換と積分計算を 4 回行う。
*2 数値誤差はシミュレーション区間における最大誤差（絶対値）である。
*3 計算時間は，シミュレーションの開始時刻を 0 秒，終了時刻を 10 秒として計算した場合にかかった時間である。
*4 数値的不安定性により発散したため，途中で計算停止した。

目　　　次

1. はじめに

過渡安定度解析をはじめとする電力系統の実効値動特性解析では，電力系統の動特性を表現する微分方程式とネットワークの電圧・電流特性を表現する代数方程式を時間軸に沿って解くことが行われる。電力系統の微分方程式は通常，非線形方程式であり解析的に解くことは困難であるため，時間変数の離散化により近似解を求める数値積分手法が用いられる。

微分方程式の数値解法である数値積分手法には様々な手法が存在するが，電力中央研究所の過渡安定度解析ツールである Y 法においては古典的 4 段 4 次のルンゲクッタ法（RK4 法： Runge-Kutta 4th order method）が用いられている[1]。RK4 法は計算アルゴリズムが簡単，計算精度が比較的良い，1 ステップあたりの計算が高速，といった特徴があり，有用な手法として知られている。

一方で，近年では電力系統へ再生可能エネルギー電源やパワーエレクトロニクス機器の導入が拡大しており，それらの機器には短い時間領域で動作する時定数の短い要素が含まれている場合が考えられる。先述した RK4 法は陽解法の一種であり，計算対象の時間刻みに対して時定数の短い要素が含まれている場合に，物理的には減衰するはずの現象が数値計算上では発散するといった数値的不安定現象が起こる恐れがある。

将来の電力系統では，上述した機器の更なる増加が予想されることから，時間領域の短い応動から従来存在する同期発電機の慣性応答といった時間領域の長い応動までの幅広い時間領域の動特性解析を行うニーズが高まることが予想される。そこで，本研究では将来の電力系統に対しても高精度かつ効率的なシミュレーションを行うため，短い時間領域の現象を含む電力系統を数値的安定に解析することができる新たな電力系統の動特性解析手法について検討した。

数値的安定性に優れた数値積分手法の一つとして，微分方程式を線形項と非線形項に分離し，線形項を厳密に取り扱うといった Exponential Integrator と呼ばれる手法がある。本研究では，Exponential Integrator の中でも高次の精度までの係数が検討されている ETDRK（Exponential Time Differencing Runge-Kutta）法と呼ばれる手法に着目し，ETDRK 法を組み込んだ新たな電力系統の動特性解析手法を提案する。

2. 指数関数型ルンゲクッタ法の概要

本章では Exponential Integrator と呼ばれる数値積分手法の概要とその一種である ETDRK 法の計算手順および性質について説明する。

2.1 Exponential Integrator

Exponential Integrator は式(2.1)に示すような線形項Axと非線形項$N(x)$で構成されている微分方程式に対して，線形項を厳密に取り扱う数値積分手法である。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + N(x) \tag{2.1}$$

式(2.1)において，線形項を左辺に移行して左からe^{-At}を乗算すると式(2.2)となる。

$$e^{-At}\frac{dx}{dt} - e^{-At}Ax = e^{-At}N(x) \tag{2.2}$$

式(2.2)の両辺をt_nから$t_{n+1}(= t_n + h)$の区間で積分すると式(2.3)となる。なお，hは積分計算で用いるステップ幅（計算時間刻み）である。

$$\int_{t_n}^{t_n+h} \frac{d}{d\tau}\left(e^{-A\tau}x(\tau)\right)d\tau = \int_{t_n}^{t_n+h} e^{-A\tau}N\left(x(\tau)\right)d\tau \tag{2.3}$$

左辺の積分を計算し，$x(t_{n+1})$について解くと式(2.4)となる。

$$x(t_{n+1}) = e^{Ah}x(t_n) + e^{A(t_n+h)}\int_{t_n}^{t_n+h} e^{-A\tau}N(x(\tau))d\tau \tag{2.4}$$

ここで，右辺の積分変数を$\tau = t_n + \theta h$と置き換えると式(2.5)のように表現される。

$$x(t_{n+1}) = e^{Ah}x(t_n) + h\int_0^1 e^{(1-\theta)Ah}N(x(t_n+\theta h))d\theta \tag{2.5}$$

式(2.5)は時刻t_nの状態量$x(t_n)$と時刻t_{n+1}の状態量$x(t_{n+1})$の関係式である積分方程式の形である。式(2.5)の積分項に含まれる関数Nを変数θに関する多項式で近似し，積分を計算することで数値積分公式を導出する。導出した式を時間ステップごとに計算することで各ステップ点における数値解を得ることができる。

Exponential Integrator は硬い方程式[1]に対しても数値的不安定にならずに計算できることが特徴として挙げられる。また，式(2.5)の積分項をいかに近似計算するかによって更にいくつかの手法に分かれるが，本研究ではその中でもルンゲクッタ法と同様の手順で計算する ETDRK 法に着目した。

2.2 ETDRK 法の計算手順

ETDRK 法は RK4 法に代表される陽的ルンゲクッタ法と同様に，一段階法であり，精度良く解を求めるために内部段（中間段）を設けた手法である。

式(2.5)をルンゲクッタ法の一般形で表現すると次式のようになる。

$$X_i = e^{c_iAh}x_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}(Ah)N\left(t_n + c_jh, X_j\right) \qquad i = 1,\cdots,s \tag{2.6}$$

$$x_{n+1} = e^{Ah}x_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i(Ah)N(t_n + c_ih, X_i) \tag{2.7}$$

X_iは積分計算における中間値であり，x_nは現ステップの値，x_{n+1}は時間刻みhだけ進んだ次ステップの値である。添字iは計算段（ステージ）を表しており，第s段までを順番に計算する。また，係数a_{ij}，b_i，c_iはルンゲクッタ法の係数パラメータである。

係数a_{ij}，b_iは式(2.5)における積分項の多項式近似で決定される係数であり，φ関数の線形結合で表現される。φ関数は行列指数関数にθのべき乗を掛けたものの積分であり，式(2.8)で定義される。なお，$z = Ah$とする。

$$\varphi_l(z) = \int_0^1 e^{(1-\theta)z}\frac{\theta^{l-1}}{(l-1)!}d\theta\ ,\quad l \geq 1 \tag{2.8}$$

ここで， $\varphi_0(z) = e^z$と定義すると，φ関数は以下の漸化式で表現される。

$$\varphi_l(z) = \frac{\varphi_{l-1}(z) - \varphi_{l-1}(0)}{z}，\ \varphi_l(0) = \frac{1}{l!} \tag{2.9}$$

例えば，$l = 1,2,3$の場合は，式(2.10)となる。

$$\varphi_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}\ ,\quad \varphi_2(z) = \frac{e^z - z - 1}{z^2}\ ,$$
$$\varphi_3(z) = \frac{e^z - \frac{z^2}{2} - z - 1}{z^3} \tag{2.10}$$

ETDRK 法の各係数の組み合わせを表現するための形式として，図 2.1 に示すブッチャー配列を用いる。図 2.1 に示されている係数は式(2.6),(2.7)における係数と対応している。

$$\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s
\end{array}$$

図 2.1 ブッチャー配列の一般形

ETDRK 法の係数にも次数・段数によって様々な種類があるが，本研究では Krogstad が提案した 4段4次のETDRK法であるETDRK4を用いる[3]。図 2.1 のブッチャー配列により ETDRK4 係数を表現したものを図 2.2 に示す。なお，図 2.2 の中で

[1] 解の緩やかな変化と急激な変化が混在する方程式の事を意味する[2]。スティフ方程式とも呼ばれる。

示されている$\varphi_{l,i}$は，$\varphi_{l,i}(z) = \varphi_l(c_i z)$を意味する。

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\varphi_{1,2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\varphi_{1,3} - \varphi_{2,3}$	$\varphi_{2,3}$	0	0
1	$\varphi_{1,4} - 2\varphi_{2,4}$	0	$2\varphi_{2,4}$	0
	$\varphi_1 - 3\varphi_2 + 4\varphi_3$	$2\varphi_2 - 4\varphi_3$	$2\varphi_2 - 4\varphi_3$	$-\varphi_2 + 4\varphi_3$

図 2.2 ETDRK4 係数（Krogstad）のブッチャー配列

図 2.2 の係数を式(2.6),(2.7)に代入することで，各段での数値解を求める積分計算式を導出できる。なお，ブッチャー配列において$i \leq j$に対するa_{ij}が 0 である積分手法は陽解法と分類されるため，ETDRK4 法も陽解法の一種と言える。

2.3 ETDRK 法の特徴

本節では ETDRK 法の特徴（数値的安定性，数値精度）について，各積分手法との比較により説明する。

2.3.1 数値的安定性の評価と他の積分手法との比較

数値積分手法における数値的安定性の評価は安定性関数と呼ばれる指標を用いて行われることが多い。安定性関数は Dahlquist のテスト方程式[4]

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \tag{2.11}$$

に対して，数値積分手法を適用した場合に

$$x_{n+1} = P(\lambda h) x_n \tag{2.12}$$

となるような多項式$P(a)$が安定性関数である（なお，$a = \lambda h$とする）。このとき，

$$\{a \in \mathbb{C} : |P(a)| < 1\} \tag{2.13}$$

で定まる複素平面上の領域を安定領域と呼ぶ。$Re(a) < 0$（すなわち，$Re(\lambda) < 0$）で

$$|P(a)| < 1 \tag{2.14}$$

が満たされる場合には，hの大きさに関わらず数値積分による解も減衰する性質[2]があり，この性質を持つ手法を A 安定な手法と呼ぶ。A 安定な手法では物理的に減衰する解が数値計算上は発散していくといった数値的不安定現象が生じないため，数値解析を行う上では都合が良い。

例えば，RK4 法の安定性関数は以下で表される（導出は文献[5]などを参照）。

$$P(a) = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} + \frac{a^4}{24} \tag{2.15}$$

式(2.15)の安定領域を図 2.3 に示す。RK 法は A 安定な手法ではないため，aの値によっては安定領域外となる可能性がある。その場合，解析する系が物理的には減衰する特性であったとしても，数値的不安定現象により数値解は発散する。

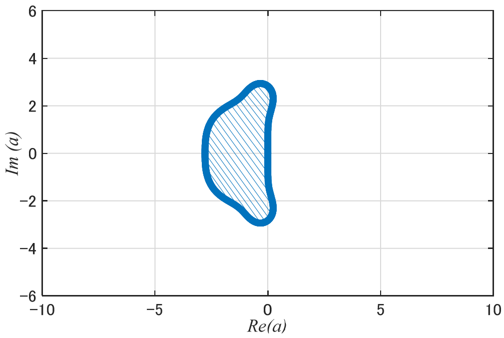


図 2.3 古典的 RK4 法の安定領域（斜線部）

一方で ETDRK 法では，線形項に対しては解析解として厳密に求めており，安定性関数を考えた場合には，

$$P(a) = e^a \tag{2.16}$$

となる。式(2.16)の安定領域は図 2.4 となり，$Re(a) < 0$であれば$|P(a)| < 1$が満たされる。そのため，ETDRK 法は A 安定な手法であり，解析

---

[2] $P(a) = x_{n+1}/x_n$であるため，$|P(a)| < 1$であれば積分手法による数値解x_nは任意の初期点x_0について$x_n \to 0\ (n \to \infty)$となり解は収束する[5]。

対象が硬い系であったとしても，時間刻みhの大きさに関わらず数値的不安定にならない。

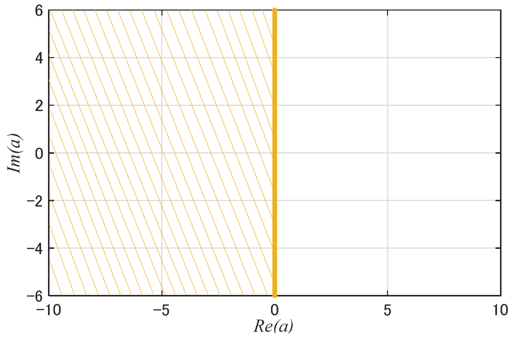


図 2.4 ETDRK 法の安定領域（斜線部）

表 2.1 に陰解法を含めた積分手法の比較を示す。陰解法は数値的安定性には優れているものの，微分方程式が非線形の場合に収束計算が必要であるため，計算手順が複雑になりやすい。特に，電力系統の解析のように非線形微分方程式と代数方程式を両方解く必要がある場合には，非線形微分方程式と代数方程式を連立して系全体を収束計算により解く必要がある。一方で，Exponential Integrator の一種である ETDRK 法は数値的安定性に優れており陽解法と同じ計算手順である特徴から，微分方程式の積分計算に収束計算を必要としないという利点がある。

なお，陽解法で計算する場合において，解析する電力系統に発電機の突極性や負荷の非線形電圧特性といった電圧・電流関係の非線形特性が含まれている際には，代数方程式の計算において収束計算を行う必要がある[3]。ただし，この収束計算は微分方程式の積分計算とは切り離して計算することとなる。詳しくは文献[1]を参照されたい。

表 2.1 積分手法の比較

手法の種類		手法の概要	利点と欠点
陽解法	オイラー法・RK法などの一般的な手法	現在の値から次ステップの値を算出する手法	○：計算手順が簡単で，収束計算が必要ない ×：計算する時間刻みよりも速い動特性（短い時定数）が含まれていると解が数値的不安定になる可能性がある
	ETDRK法	線形項と非線形項に分離した微分方程式に対し，現在の値から次ステップの値を算出する手法（線形項は厳密に取り扱う）	○：数値的安定に計算でき，RK法と計算手順が同様のため収束計算が必要ない ×：一般的な陽解法よりも係数が複雑（行列指数関数等の計算が必要）
陰解法		現在の値と将来の値（未知数）から次ステップの値を算出する手法	○：数値的安定に計算可能 ×：微分方程式が非線形の場合には収束計算が必要

[3] 電力系統の実効値動特性解析においては，非線形度合いを表すパラメータが計算時間刻みと同程度の速さで変化してしまうような非常に強い非線形現象を含む場合はあまり無いため，通常は上述した収束計算で対応できる。

2.3.2 ETDRK 法の数値精度

ETDRK 法の数値精度について，極端な場合を例に説明する。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + N(x) \qquad (2.1\ 再掲)$$

式(2.1)に対して，線形項が無い場合（$A = 0$）と非線形項が無い場合（$N = 0$）について考える。

〇線形項が無い場合（$A = 0$）

この場合，非線形項$N(x)$だけが残ることになり，通常の陽的ルンゲクッタ法と等価な精度での計算となる。例えば，図 2.2 の Krogstad の ETDRK4 において$A = 0$の場合（すなわち$z = 0$）を考える。式(2.10)よりφ関数の値は,

$$\varphi_1(0) = 1\,,\quad \varphi_2(0) = \frac{1}{2}\,,\quad \varphi_3(0) = \frac{1}{6} \qquad (2.17)$$

となるため，係数は図 2.5 のようになる。

この係数は RK4 法と同じ係数となっていることが分かる。すなわち，微分方程式に線形項が無く非線形項のみである場合は，ETDRK4 法は RK4 法と等価な計算を意味する。

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

図 2.5 $A = 0$の場合の ETDRK4 係数

〇非線形項が無い場合（$N = 0$）

この場合には線形項Axのみが残ることとなるが，ETDRK 法の特徴として線形項は厳密に計算するため正確な解が求まる。

以上より，ETDRK 法は同じ次数の陽的 RK 法と比較する場合において，理論的には陽的 RK 法よりも精度が悪くなることは無い。

ただし，実際に数値計算する上で$z = \lambda h$が非常に小さい（行列 A に非常に小さい固有値λが含まれる，もしくは計算刻み h が非常に小さい）場合にはφ関数の計算において数値計算誤差の影響に注意する必要がある。電力系統の実効値解析で一般的に使用される計算刻み h は 0.01 秒程度であるため，zが極端に小さくなることはあまり多くないと考えられるが，解析する系統もしくは時間刻みの条件次第では数値誤差に注意する必要がある。付録 A にφ関数の計算における数値誤差に関する内容を整理した。

3. 電力系統の動特性解析への適用

本章では 2 章で紹介した ETDRK 法を電力系統の動特性解析に適用する方法について説明する。

3.1 モードによる変数変換

電力系統の動特性を表す式は，機器の時間的応動を表現する微分方程式と送電ネットワークの電気的特性を表す代数方程式の組み合わせからなり，次のように表すことができる。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, v) \\ 0 = g(x, v) \end{cases} \qquad (3.1)$$

ただし，x：状態変数，v：系統電圧である。

電力系統の動特性解析では，これらの微分方程式と代数方程式を時間軸に沿って交互に解く。ここで，式(3.1)からvを消去すると式(3.2)のように表現される。

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad (3.2)$$

式(3.2)を線形項と非線形項へ分離することを考える。$x = x_0 + \Delta x$として，式(3.2)の右辺をx_0のまわりでテイラー展開すると，式(3.3)のように表現できる。なお，$x_0 (= x(t_0))$は初期定常状態（平衡点）における状態変数である。

$$\frac{dx}{dt} = f(x_0 + \Delta x)$$
$$= f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \cdots \tag{3.3}$$

x_0は平衡点なので

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x_0 + \Delta x)}{dt} = \frac{d\Delta x}{dt}$$

および$f(x_0) = 0$となり，2 次以上の項をまとめて$N(\Delta x)$と表現すると，式(3.3)は式(3.4)のように表現できる。

$$\frac{d\Delta x}{dt} = f(x) = A\Delta x + N(\Delta x) \tag{3.4}$$

なお，$A = \partial f(x_0)/\partial x$であり，行列 A は初期定常状態の時刻$t_0$における線形化システム行列である。式(3.4)は式(2.1)と同じ形になっており，線形項と非線形項（2 次以上の項）に分離した式で表現されていることが分かる。

式(3.4)に ETDRK 法を適用することで微分方程式の数値解を求めることができるが，そのためにはφ関数に含まれる行列指数関数の計算が必要となる。行列指数関数の計算方法には様々な方法が存在するが，本研究では行列 A の固有値と固有ベクトルを用いて式(3.4)を変形し，行列指数関数を直接計算する代わりに固有値の指数関数を用いて計算する。

電力系統の固有値は定態安定度解析の指標として使われており，それ自体が有用な情報として活用できる。また，固有値解析手法や電力系統の線形化については従来研究が行われていることから，上記方法は既存の解析技術の組み合わせにより構築できる。

ここでは，固有ベクトルを用いた変数変換により行列を対角化し，行列指数関数を固有値の指数関数として計算する手順について説明する。

まず，Aの固有ベクトル$p_k(k = 1, \cdots, d)$（dは系に含まれる状態変数の数）を並べた固有ベクトル行列

$$P = \left(p_1 \vdots p_2 \vdots \cdots \vdots p_d \right)$$

を用いて，次の変数変換を行う。

$$x = Py \tag{3.5}$$

式(3.5)を式(3.4)に代入し，$d\Delta y/dt$について解くと，

$$\frac{d\Delta y}{dt} = g(y) = P^{-1}f(Py)$$
$$= P^{-1}AP\Delta y + P^{-1}N(P\Delta y)$$
$$= \Lambda\Delta y + F \tag{3.6}$$

なお，$\Lambda(= P^{-1}AP)$は対角成分にAの固有値が配置されている対角行列である。式(3.6)は線形項（$\Lambda\Delta y$）と非線形項$F(= P^{-1}N(P\Delta y))$に分かれており，非線形項Fは$g(y)$と線形項$\Lambda\Delta y$の差分として算出できる。

また，式(3.6)は固有値$\lambda_k(k = 1, \cdots, d)$ごとに式(3.7)のように表現することができる。

$$\frac{d\Delta y_k}{dt} = \lambda_k \Delta y_k + F_k \tag{3.7}$$

式(3.7)に式(2.6),(2.7)の ETDRK 法を適用すると式(3.8),(3.9)のようになる。

$$(Y_i)_k = e^{c_i\lambda_k h}(y_n)_k + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}(\lambda_k h)\, F_k\left(t_n + c_j h, \left(Y_j\right)_k\right)$$
$$i = 1, \cdots, s \tag{3.8}$$

$$(y_{n+1})_k = e^{\lambda_k h}(y_n)_k + h\sum_{i=1}^{s} b_i(\lambda_k h)\, F_k(t_n + c_i h, (Y_i)_k) \tag{3.9}$$

ただし，上式ではy_n, Y_iの第k成分を$(y_n)_k, (Y_i)_k$と表現している。また，状態変数のΔ記号は省略している。

式(3.8),(3.9)による積分計算から変数変換後の微分方程式の数値解を得ることができる。求めたyを式(3.5)の関係からxに変数変換することで，状態変数の更新値を算出することができる。

以上の手順をまとめたものを図 3.1 に示す。図では 1 段分のみの計算手順を記載しているが，ETDRK4 法は 4 段の手法であるため，シミュレー

ションに組み込む際には時間刻み 1 ステップにつき変数変換と積分計算を 4 回行うことになる。

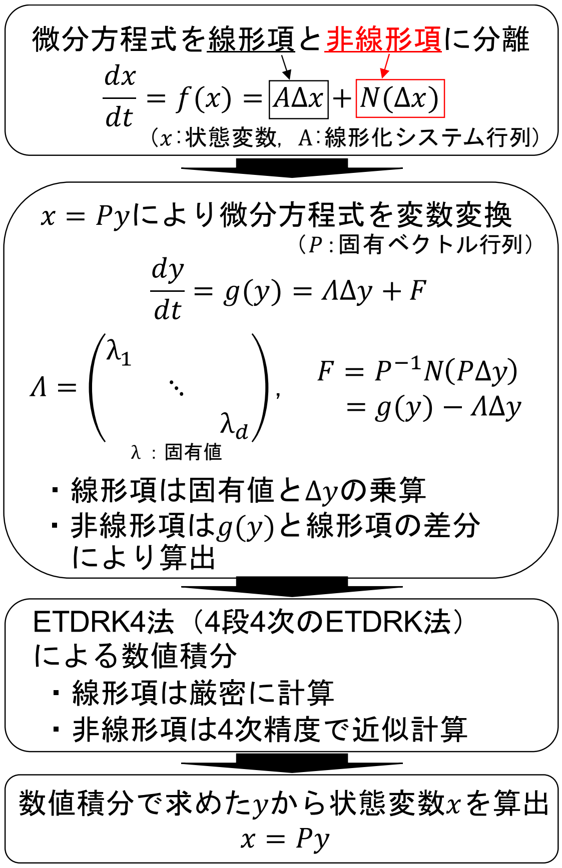


図 3.1 ETDRK 法を用いた数値積分の計算手順

3.2 系統解析への組み込み

3.1 節にて説明した手順を用いて，図 2.2 に示したKrogstadの係数を用いたETDRK4法を電力系統解析に導入したシミュレーションフローを図 3.2 に示す。

シミュレーションフローの構造としては，微分方程式の積分計算と代数方程式の系統計算を交互に行うという点において，従来の RK4 による計算手順と同じである。以下，図 3.2 のフローにおける特徴的な部分である①～④について説明する。

① 固有値計算とφ関数の計算

潮流計算と初期値設定により，系統の初期定常状態が決定したら，QR 法による固有値解析を行う。得られた固有値および固有ベクトルをもとに，積分計算で必要となるφ関数を計算する。

具体的には，初期時刻$t = t_0$での系統の線形化システム行列$A = \partial f(x(t_0))/\partial x$（d 次正方行列）の固有値解析を行い，求めた固有値を用いて式(2.10)に示したφ関数に$z_k = \lambda_k h (k = 1, \cdots, d)$を代入して計算する。

② 時間刻みの変更

ETDRK4 法は数値的安定性に優れており任意の時間刻みで安定に解析可能であるという特徴から，シミュレーションの途中で時間刻みを変更可能な構造とした。シミュレーション途中で時間刻みを変更する場合には$\lambda_k h$の値が変わるため，φ関数の再計算を行う（ただし，今回の検証ではこの機能は使用していない）。

文献[6]などで扱われているように，シミュレーション途中での時間刻みの変更については必要となる精度と解析時間に応じた適切な刻みを設定する必要がある。時間刻みを決定するアルゴリズムについては今後の検討課題とする。

③ 変数変換と非線形項の計算

3.1 節で説明したように固有ベクトル行列による変数変換を行い，変数変換後の微係数および非線形項の計算を行う。非線形項は，各段で微係数と線形項の差分により算出する。

④ ETDRK4 法による積分計算

2 章で説明した ETDRK 法を用いて積分計算を行う。各段（S=1～4）での計算式は図 2.2 の Krogstad の ETDRK4 係数より，式(3.9)~(3.12)のようになる。

時刻$t = t_n$での状態変数$y_n = y(t_n)$とすると，$c_1 = 0$より，中間値$Y_1 = y_n$である。

・S=1

$$Y_2 = e^{\frac{z}{2}} y_n + h\frac{1}{2}\varphi_{1,2}(z)F(t_n, Y_1) \tag{3.10}$$

・S=2

$$Y_3 = e^{\frac{z}{2}} y_n + h\left\{\left(\frac{\varphi_{1,3}(z)}{2} - \varphi_{2,3}(z)\right)F(t_n, Y_1) + \varphi_{2,3}(z)N\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_2\right)\right\} \tag{3.11}$$

・S=3

$$Y_4 = e^{z} y_n + h\left\{\left(\varphi_1(z) - 2\varphi_2(z)\right)F(t_n, Y_1) + 2\varphi_2(z)F\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_3\right)\right\} \tag{3.12}$$

・S=4

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= e^{z} y_n \\ &+h\left(\varphi_1(z) - 3\varphi_2(z) + 4\varphi_3(z)\right)F(t_n, Y_1) \\ &+h\left(2\varphi_2(z) - 4\varphi_3(z)\right)\left\{F\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_2\right) + F\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_3\right)\right\} \\ &+h\left(-\varphi_2(z) + 4\varphi_3(z)\right)F(t_n + h, Y_4) \end{aligned} \tag{3.13}$$

以上の式により算出されたY_i, y_{n+1}を変数変換することで状態変数の更新値X_i, x_{n+1}を得ることができる。

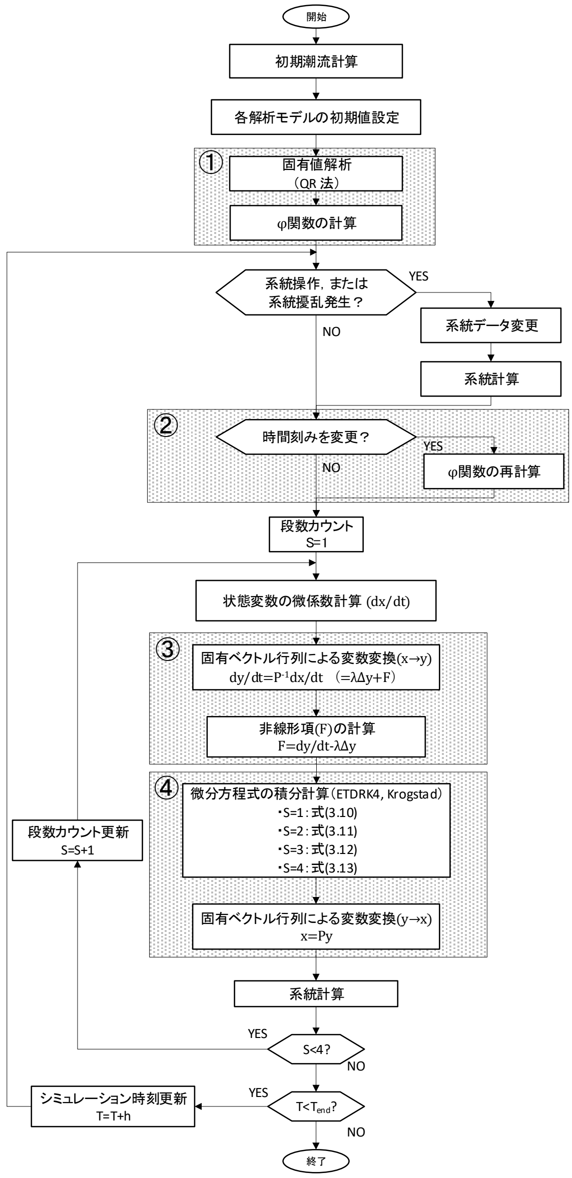


図 3.2 シミュレーションフロー

4. シミュレーションによる検証

提案する手法を用いた際の数値精度，数値的安定性および計算速度についてモデル系統を用いたシミュレーションにより検証を行った。

4.1 節では，計算する時間刻みを変更した際の数値的安定性，数値精度について検証した。4.2 節では，応答速度の速い機器の一例として太陽光発電（PV）を導入した系統を対象に解析し，既存手法と提案手法の数値的安定性，計算速度について検証した。

なお，本検討で扱うシミュレーションプログラムは MathWorks 社の MATLAB R2018a で構築した。またプログラムの実行環境として OS：Windows 10 pro，CPU：Intel Core i7 7700 (3.6GHz)の PC を使用してシミュレーションプログラムを実行した。

4.1　時間刻みの変更による数値的安定性と精度の検証

本節では，電気学会の標準モデルを対象に従来の RK4 法と提案手法を用いた際の数値精度・数値的安定性について複数の時間刻みによるシミュレーション解析を実施し，その解析結果を比較する。

4.1.1 検討対象モデル

検討対象として，図 4.1 に示す EAST10 機系統モデル[7]を用いた。また，系統モデル条件を表 4.1 に示す。

また，シミュレーションに用いる事故条件は，送電線<36>の 1 回線 3LG-O とし，事故除去は発生から 0.1 秒後に 1 回線除去（事故発生時刻 t=1.0 秒，事故除去時刻 t=1.1 秒）とする。また，シミュレーションは開始時刻を 0 秒，終了時刻を 10 秒とする。

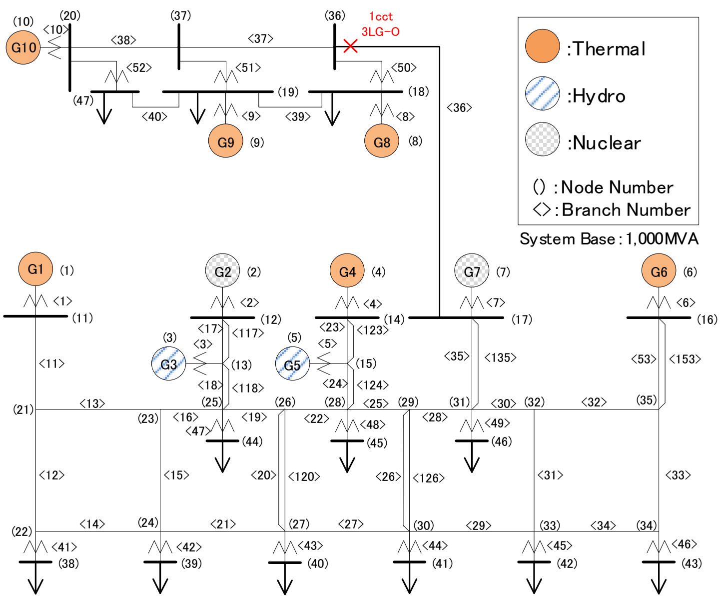


図 4.1 EAST10 機系統モデル

表 4.1 系統モデル条件

機器，条件	内容	備考
発電機	LGT=4	・d軸1つq軸1つのダンパ回路を持つモデル ・発電機飽和特性，突極性は考慮しない
励磁系	LAT=1	・交流励磁機モデル ・パラメータは標準定数
調速機系	無し	
負荷電圧特性	有効分：定Z特性 無効分：定Z特性	
負荷周波数特性	無し	
需給断面	昼間断面（9割）	発電機出力・負荷を標準の昼間断面の9割とする
送電線モデル	π型等価回路	

4.1.2 シミュレーション結果

様々な時間刻みを用いて，従来の RK4 法と提案手法であるETDRK4法によるシミュレーションした結果を比較し，各手法の数値的安定性・数値精度について検証する。

なお，各手法での数値精度を評価するには本来は正確な解を知る必要があるが，シミュレーションの解析解を求めるのは非常に困難であるため，今回は時間刻み 0.001 秒にて RK4 法で解析した結果を真値扱いとし，リファレンスとする。

まず，シミュレーションの時間刻みを以下の

・ケース A：時間刻み 0.01 秒

・ケース B：時間刻み 0.1 秒

とした場合について，各手法の結果を波形で比較する。比較に使用する波形は，事故点に近い発電機 G8 の内部相差角（G3 基準）と有効電力出力 PG とする。ケース A の結果を図 4.2 に，ケース B の結果を図 4.3 に示す。なお，有効電力出力 PG の単位は発電機容量ベース pu である。

ケース A では，いずれの波形も重なっており，各手法での結果が波形レベルで一致している。数値的安定性が問題にならない時間刻みでは，各手法の結果に大きな差は無いことが分かる。

ケース B では，RK4 法は途中で数値的不安定性により数値解が発散し，脱調現象が生じてしまう。一方でETDRK4法は数値的安定性に優れているため，安定に計算できており，リファレンス波形とも結果が一致している。

ケース B において，RK4 法が数値的不安定になった理由としては，時間刻み h が系に含まれる時定数に対して大きく，RK4 法の安定性関数が式(2.14)の条件を満たせていないためと考えられる。RK4 法の安定性関数である式(2.15)に時間刻みと系統の固有値を代入して，安定性関数$|P(a)|$を計算すると，最大で

$|P(a)| = 1.19$（この時，$\lambda = -29.02 + j0.0$）

となり安定条件である$|P(a)| < 1$を満たせていないことが分かる。ゆえに，解析する系に対して時間刻み h が大きすぎてしまい，数値的不安定になったと考えられる。提案するETDRK4法を用いた手法では，時間刻みに関わらず数値的安定であるため，上記の数値的不安定性を懸念せずに任意の時間刻みを用いることができる。

○ケース A：時間刻み 0.01 秒

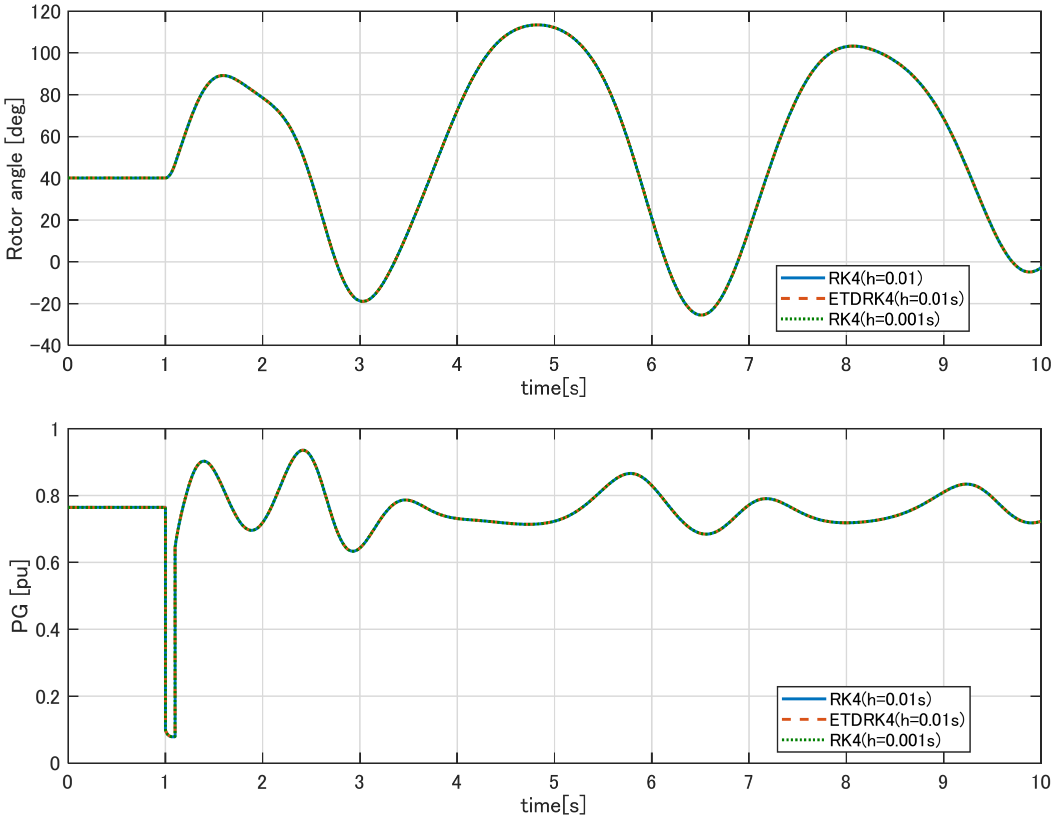


図 4.2 ケース A のシミュレーション結果（G8 の内部相差角と有効電力出力 PG）

○ケース B：時間刻み 0.1 秒

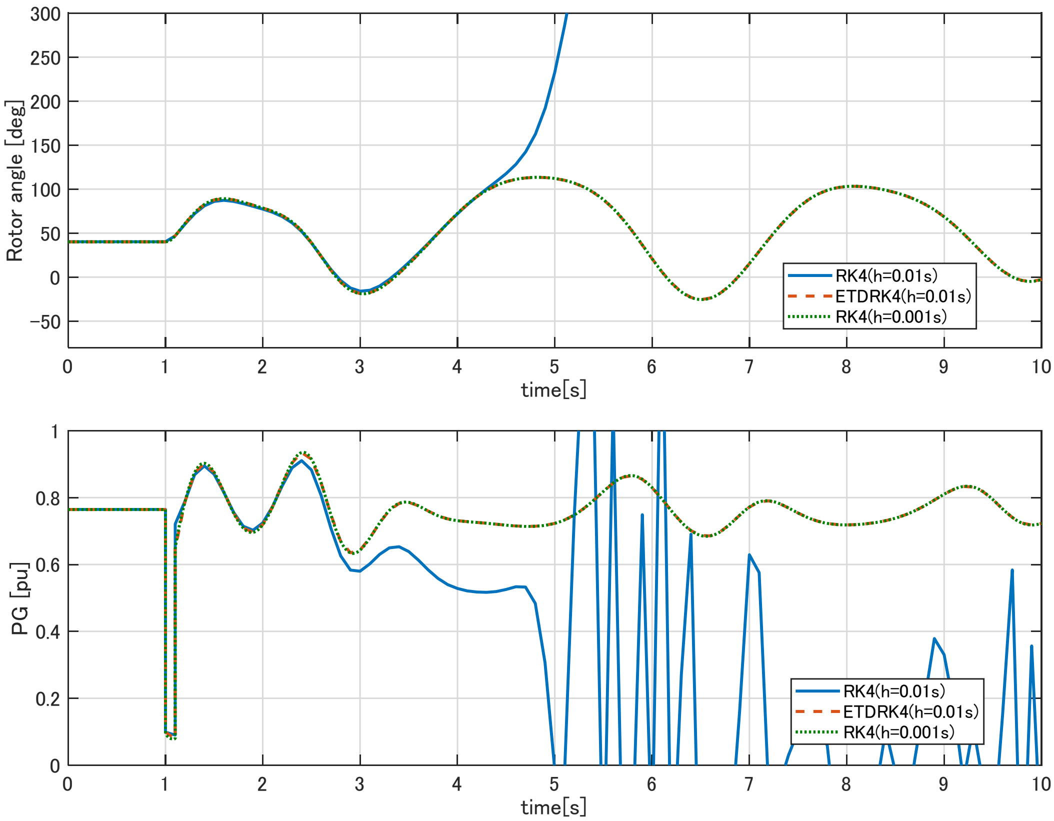


図 4.3 ケース B のシミュレーション結果（G8 の内部相差角と有効電力出力 PG）

波形ベースの比較では数値積分手法の数値精度を十分評価することは難しい。そこで，時間刻み h を2×10^{-3}～10^{-1}秒の範囲で変化させ，RK4 法およびETDRK4法で解析した結果とリファレンス（刻み 0.001 秒の RK4 法の解析結果）との誤差を算出することにより数値精度を評価する。

精度評価に用いる誤差εは以下の式で定義する。

$$\varepsilon = \max_{1\le n\le N}|x_n^* - x_n| \qquad (4.1)$$

x_n^*：時刻t_nにおけるリファレンスの解

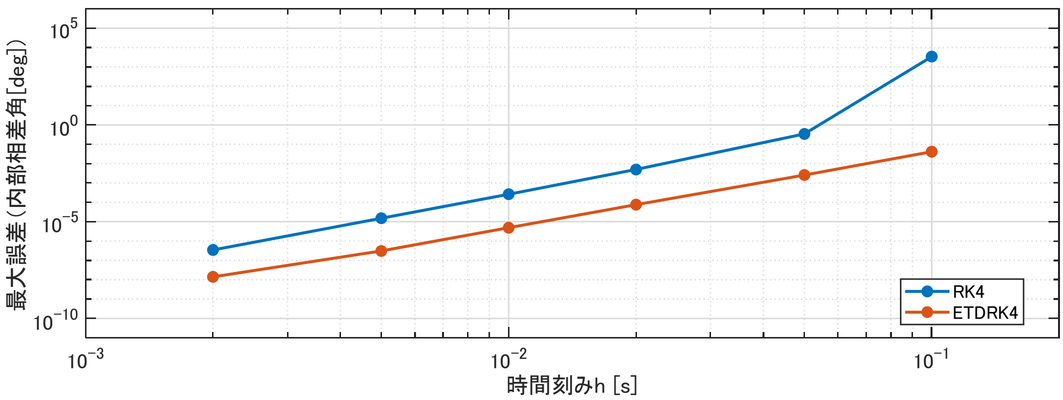
x_n：時刻t_nにおける各手法の数値解

N：合計ステップ数（シミュレーション開始から終了までの区間を時間刻み h で分割した数）

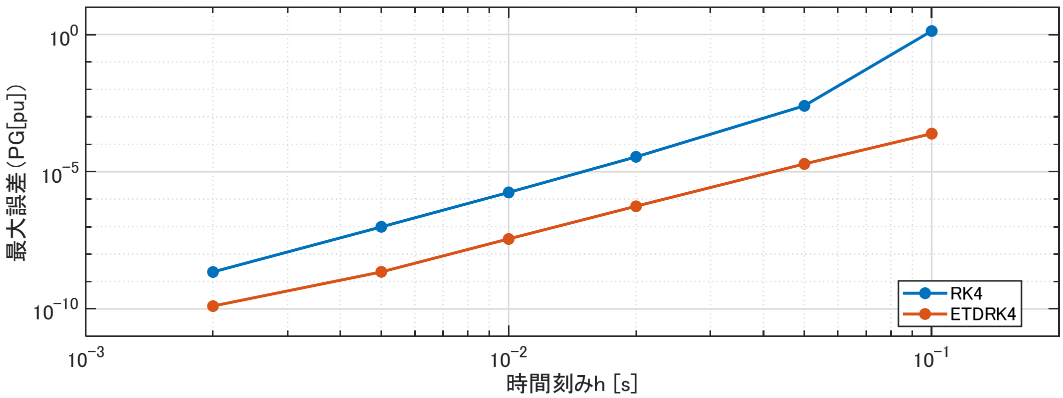
すなわち，誤差εはシミュレーション区間で最大となる絶対誤差を表している。また，誤差算出に用いる数値解xは先述の波形比較と同様に，発電機 G8 の内部相差角（G3 基準）と有効電力出力 PG とする。

図 4.4 に時間刻みに対する最大誤差を両対数グラフでプロットした結果を示す。いずれの時間刻みにおいてもETDRK4法の方が誤差が小さく，数値精度が良い。この理由としては，手法の次数は共に 4 次精度であるが，ETDRK4 法は線形項を厳密計算しているため， RK4 法よりも少しだけ精度が良くなったと考えられる。なお，時間刻み 0.1 (10^{-1}) 秒で RK4 法の誤差が急増しているのは，先述の波形比較でも述べたように数値的不安定性が原因である。

以上の結果より，提案するETDRK4法を用いた解析手法は，従来の RK4 法に比べて数値的安定性に優れており，なおかつ数値精度に関しても同等以上であると言える。



(a) 内部相差角（G8）



(b) 有効電力出力 PG（G8）

図 4.4 各手法の最大誤差

また，時間刻みh=0.01秒における各手法のシミュレーション計算時間と参考までにリファレンス（RK 法で時間刻み h=0.001 秒）の計算時間を表4.2に示す。なお，計算時間はMATLABの時間計測関数（tic/toc）にて測定し，シミュレーション開始時刻 0 秒から終了時刻 10 秒までにかかった時間とした。

ETDRK4法はRK4法に比べて係数が複雑であるため，同じ計算刻みでは計算時間が少し増える。

表 4.2 計算時間の比較（EAST10 機系統）

手法（時間刻み）	計算時間
RK4(刻み0.01秒)	1.71 秒
ETDRK4(刻み0.01秒)	2.02 秒
RK4(刻み0.001秒)	15.84 秒

4.2 PV 導入系統を用いた検証

本研究の目的として，再生可能エネルギー電源やパワーエレクトロニクス機器といった従来存在する同期発電機などと比較して応答速度が速い機器が含まれた場合においても，効率的かつ数値的安定にシミュレーションを行える環境を構築することが挙げられる。

そこで，再エネ電源として太陽光発電（PV）が導入された電力系統を対象に，提案手法の有効性を検証する。

4.2.1 PV を導入した電力系統モデル

検討対象とする負荷ノードに PV が連系された EAST10 機系統を図 4.5 に示す。PV を連系するため，4.1 節で示した表 4.1 の系統条件から，以下の点を変更している。

- 負荷の大きさは標準モデルと同様とする。
- EAST10機系統の全ての負荷ノードに並列させる形で PV を連系する。
- PV は負荷ノードに直接連系する（下位系統の表現方法については開発途上であり標準的なモデルも無いため，簡易表現として直接連系した）。
- 初期状態の PV の有効電力出力は昼間負荷の 3 割とし，各負荷ノードの負荷有効分の大きさに比例した出力とする。また，PV の出力分だけ，各発電機の出力を均等割合で抑制する。なお，発電機容量は変化させせず出力のみを変化させる（すなわち，発電機停止は行わないものとする）。
- 初期状態の PV の無効電力出力は 0 とする。

次に PV モデルについて説明する。PV モデルは，インバータ制御系と PLL 動作のみを簡易的に模擬した電流注入型モデルを用いる。図 4.6 にモデルの制御ブロックを示す。また，モデルの仕様は以下のとおりとする。

- モデルは可変電流源として，制御出力であるI_d, I_qをノードに注入する形で表現した。
- シミュレーション中においては有効電力指令値P_{Gref}，および無効電力指令値Q_{Gref}は一定とし変化しないものとする。
- PI 制御系は，無効電力優先制御（I_{qref}優先）とし，電流容量（リミッタ）を無効電力Q_Gに優先的に割り当てる。また，リミッタは Non-windup 動作とする。
- 制御系の各パラメータ値は表 4.3 に示す。速い動特性が含まれている場合について検証するため，一部のパラメータの時定数を短く設定している。また，系統内の全 PV でパラメータは統一する。
- FRT 動作，脱落動作などの模擬は省略する。

また，シミュレーションの事故条件については 4.1 節と同様とした。

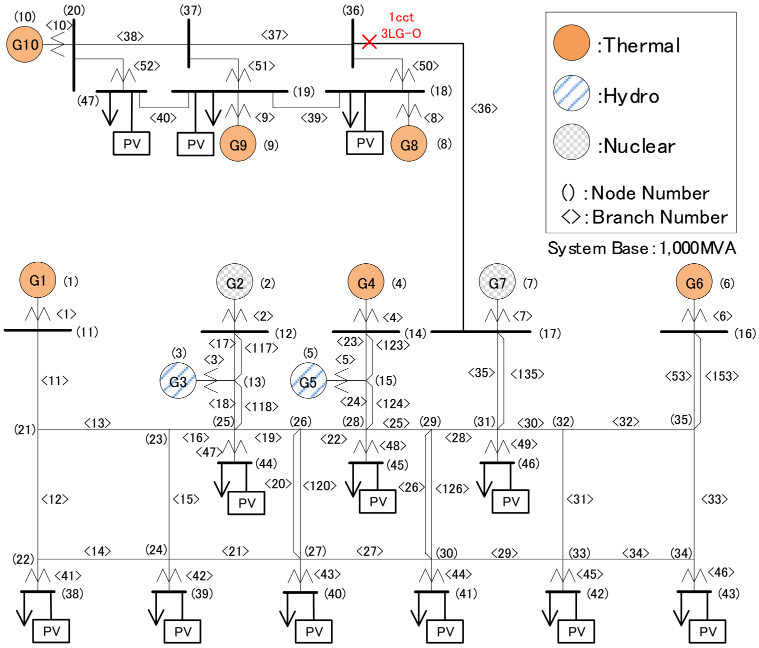


図 4.5 PV が連系された EAST10 機系統

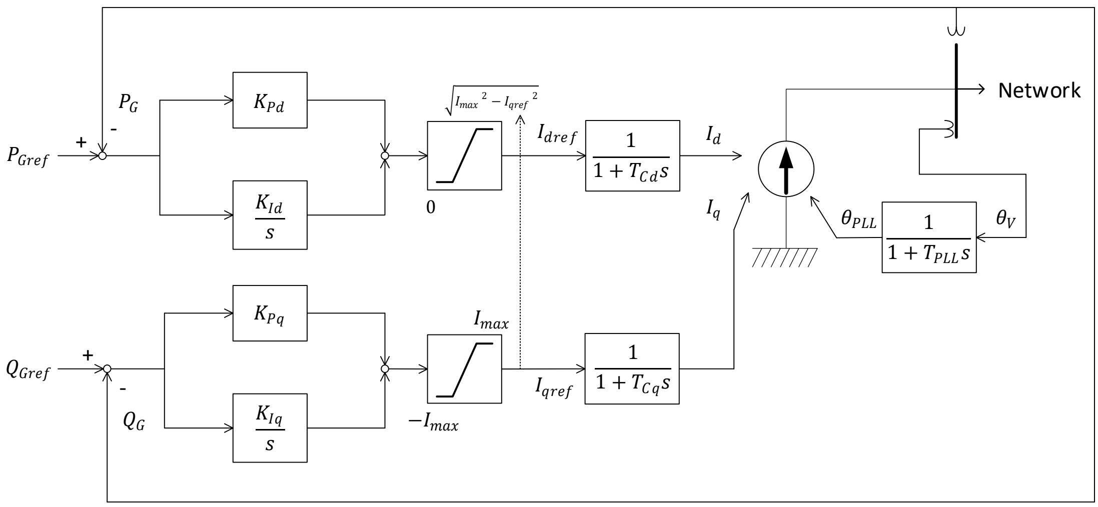


図 4.6 PV のインバータ制御系モデル

表 4.3 インバータ制御系のパラメータ

パラメータ		値	備考
d軸	K_{Pd}	1	
	K_{Id}	1/0.03	
	T_{Cd}	0.002	速い動作を模擬
q軸	K_{Pq}	1	
	K_{Iq}	1/0.005	
	T_{Cq}	0.002	速い動作を模擬
PLL	T_{PLL}	0.002	速い動作を模擬

4.2.2 シミュレーション結果

4.2.1 項で示した系統を対象に，従来の RK4 法と提案手法であるETDRK4法によるシミュレーションを行い，その結果を比較する。解析に用いる時間刻みは h=0.01 秒とする。

なお，解析結果のリファレンスとして，4.1 節と同様に時間刻み h=0.001 秒とした RK4 法の結果についても併せて記載する。

解析結果の比較には，事故点に近い発電機 G8 およびノード#18 に連系した PV の波形を比較する。図 4.7 に発電機 G8 の内部相差角（G3 基準）の解析結果を，図 4.8 に PV（ノード#18）の有効電力出力 P と無効電力出力 Q の解析結果を示す。なお，PV 出力波形の単位は系統容量ベース（1,000MVA）の pu である。

時間刻み h=0.01 秒の RK4 法はシミュレーション開始直後に数値的不安定性となり，数値解が発散している。PV の制御系に短い時定数が含まれているため，RK4 の性質により発散したと考えられる。波形を確認すると擾乱が生じる t=1.0 秒よりも前に発散しているが，擾乱発生前の定常状態計算で生じる微小な丸め誤差がきっかけとなり解が急速に発散したと考えられる。今回の系統のように特に短い時定数を含む機器が含まれている場合には，解析する時間刻みが十分短くないと急速に解が無限大へと発散し，本来の物理的に収束すべき解とはかけ離れたものとなってしまう可能性がある。

また，数値的不安定性の原因となっているのは特定の時定数が短いモードのみであるが，発散が生じた場合には全体の解析結果にすぐさま波及してしまうため，全てのモードが不安定な解となり発散する[4]。

そのため，RK4 法で数値的安定に解析するためには，リファレンスとした時間刻み h=0.001 秒の RK4 法のように時間刻みを PV 制御系に含まれる時定数よりも短くする必要がある。

一方，提案手法の ETDRK4 法を用いたケースでは時間刻み h=0.01 秒でも数値的安定に解析できており，数値的安定性に優れていることが分かる。また，リファレンスである時間刻み h=0.001 秒の RK4 法と波形を比較すると，概ね結果は一致しており，提案手法を用いることで精度良く解析できる。

ただし，数値的安定性が良い解法は短い時定数による状態変数の非常に高速な変化を厳密に計算するという訳では無く，定常的な解へ減衰するという点のみを保証している。そのため，解析の目的として減衰の仕方そのものが重要な場合は時間刻みを十分小さくして計算する必要があることには注意されたい。

また，各手法を用いた際の計算時間の比較を表 4.4 に示す。ETDRK4 法は時間刻みが大きくとも数値的不安定にならないため，リファレンスのように RK4 法で小さい時間刻みで解析する場合と比較してかなり高速に計算できる。また，今回は検討しなかったが，ETDRK4 法でシミュレーション中に時間刻みを適切に調整することで更に高速化を図ることができる可能性がある。

表 4.4 計算時間の比較
（PV ありの EAST10 機系統）

手法（時間刻み）	計算時間
RK4(刻み0.01秒)	―*
ETDRK4(刻み0.01秒)	3.30 秒
RK4(刻み0.001秒)	23.53 秒

*数値不安定性により発散したため，途中で計算停止した。

[4] なお，Y 法においては，系統に含まれる機器モデルの時定数が解析時間刻みよりも短い場合，数値的安定に解析できるパラメータ値へ変更するといった処理が行われている。その場合には安定に解析できるものの，元々設定したパラメータ値とは異なる値を用いた解析結果となるため注意が必要である。

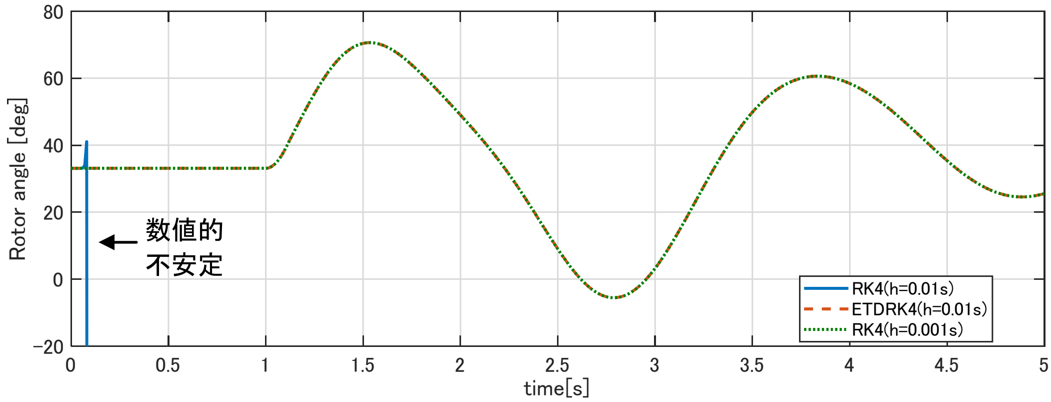
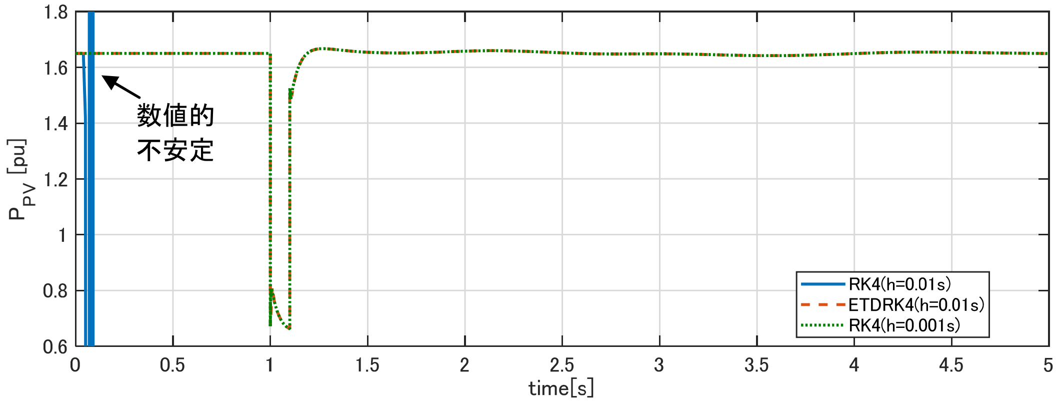
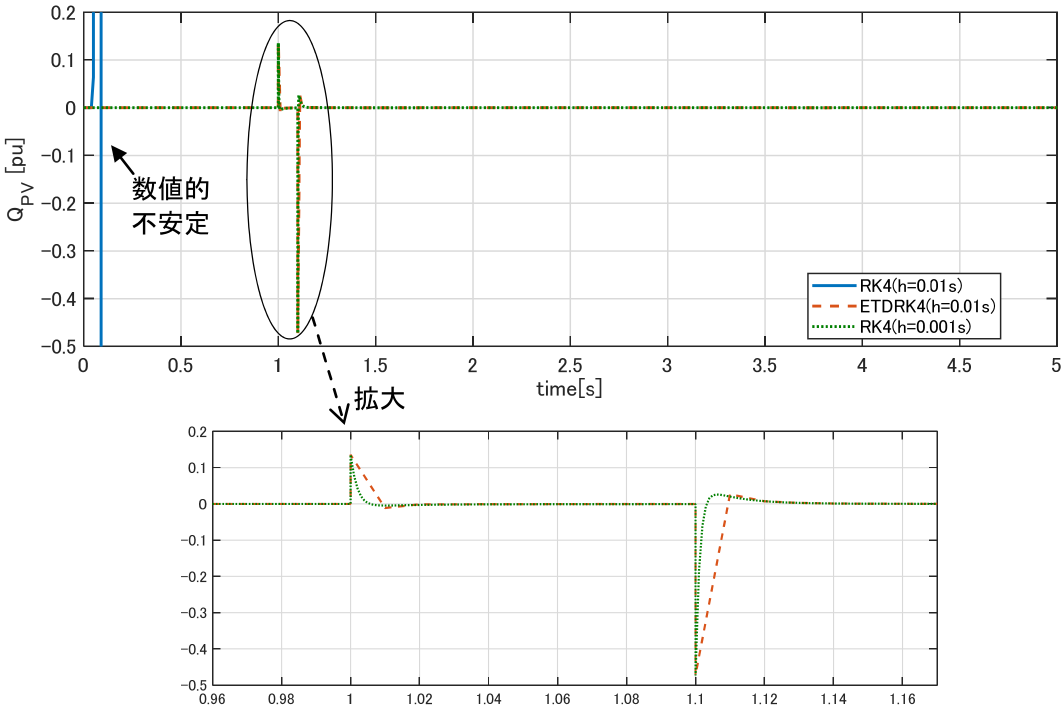


図 4.7 発電機 G8 の内部相差角



(a) 有効電力出力P_{PV}



(b) 無効電力出力Q_{PV}

図 4.8 PV（ノード#18）の有効電力出力と無効電力出力（系統基準容量ベース）

5. おわりに

本研究では，幅広い時間領域の系統現象を高精度かつ効率的に解析するための新たな電力系統解析手法について検討し，Exponential Integrator の一種である 4 次の ETDRK 法を用いた解析手法を提案した。また，シミュレーション検証により，提案手法は従来の RK4 法を用いた解析手法と比較して数値的安定性・数値精度に優れていることを確認した。

提案手法の特徴を整理すると，以下のようになる。

- 数値的安定性は，RK4 法よりも優れている。
- 数値精度は，RK4 法と同等以上である。
- 計算手順が陽解法であるため，RK4 と同様に積分計算で収束計算を必要としない。

また，数値的安定性に優れている系統解析を行う上で以下の性質があるため，これらを活用することで解析を効率的に行うことができる。

- 時間刻みを任意に設定できる。
- 時定数の短い動特性（インバータ制御系など）が含まれていても，時間刻みを小さくする必要が無い。

今回は非常に簡易的な PV モデルでの検証を行ったが，より実用的なモデルに対しても提案手法が適用可能か検証していく必要がある。また，計算途中で系統構成が大きく変わる場合（例えば，発電機脱落など）については，固有値の再計算が必要になると考えられるため，そのような条件に対しても提案手法を適用する方法について検討の余地がある。

謝辞

本研究の研究内容に関して，何度にもわたり議論の場を設けさせて頂きました。ご参加頂きました当所システム技術研究所 電力システム領域の吉村研究参事，天野上席研究員，佐藤主任研究員，野本研究員に深く感謝申し上げます。

参考文献

[1] 安定度総合解析システム開発グループ，報告書執筆編集グループ，「大規模電力系統の安定度総合解析システムの開発」，電力中央研究所総合報告 T14 (1990)

[2] 高倉葉子，「数値計算の基礎－解法と誤差－」，コロナ社 (2007)

[3] Krogstad, “Generalized integrating factor methods for stiff PDEs”, J. Comput. Phys. 203 (2005)

[4] J. C. Butcher, “Numerical Methods for Ordinary Differential Equations”, Wiley (2008)

[5] 三井斌友，小藤俊幸，「常微分方程式の解法」，共立出版 (2000)

[6] 井上 俊雄，田中 和幸，市川 建美，「電力系統長時間動特性解析プログラムの開発－基本プログラムの開発－」，電力中央研究所研究報告 T92048 (1993)

[7] 電力系統標準化モデル調査専門委員会，「電力系統の標準モデル」，電気学会技術報告第 754 号，電気学会 (1999)

[8] A.K. Kassam, L.N. Trefethen, “Fourth-order time-stepping for stiff PDEs”, SIAM J. Sci. Comput. 26 (2005)

[9] S. Koikari, “An error analysis of the modified scaling and squaring method”, Comput. Math. Appl. 53 (2007)

[10] B. Skaflestad, W.M. Wright, “The scaling and modified squaring method for matrix functions related to the exponential”, Appl. Numer. Math. 59 (2009)

[11] 中村真輔，小澤一文，廣田千明，「Exponential Integrator に現われる行列関数の改良計算法」，日本応用数理学会論文誌，Vol. 27, No. 1 (2017)

付録 A　φ関数計算における数値誤差

非常に小さい$z = \lambda h$に対するφ関数の数値計算上の誤差について考える。本文の式(2.10)より，$l = 1$としたφ関数は

$$\varphi_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

と表現されるが，zが非常に小さい場合に上記の計算は桁落ちによる誤差を生じやすい。実際に計算機でzに値を入力して数値計算を行うと以下の表 A.1 の結果になる。なお，MATLAB の倍精度浮動小数点データ型で計算した。

表 A.1 φ関数の数値計算の結果

z	式(A.1)による数値計算	真値	誤差（絶対値）
1.00E+01	2202.54657948067	2202.54657948067	0
1.00E+00	1.71828182845905	1.71828182845905	0
1.00E-01	1.05170918075648	1.05170918075648	0
1.00E-02	1.00501670841680	1.00501670841681	0.00000000000001
1.00E-03	1.00050016670838	1.00050016670834	0.00000000000004
1.00E-04	1.00005000166714	1.00005000166671	0.00000000000043
1.00E-05	1.00000500000697	1.00000500001667	0.00000000000970
1.00E-06	1.00000049996218	1.00000050000017	0.00000000003799
1.00E-07	1.00000004943368	1.00000005000000	0.00000000056632
1.00E-08	0.99999999392253	1.00000000500000	0.00000001107747
1.00E-09	1.00000008274037	1.00000000050000	0.00000008224037
1.00E-10	1.00000008274037	1.00000000005000	0.00000008269037
1.00E-11	1.00000008274037	1.00000000000500	0.00000008273537
1.00E-12	1.00008890058234	1.00000000000050	0.00008890058184
1.00E-13	0.99920072216264	1.00000000000005	0.00079927783741

表 A.1 に示したとおり，zが非常に小さい（すなわち解析する系に$\lambda = 0$に近いモードが含まれている，もしくは時間刻み h が非常に小さい）場合においては数値誤差の影響が大きくなる。また，$l = 1$以上のφ関数も同様に数値誤差の影響を受ける。そのため，zが非常に小さい場合にφ関数の計算を精度良く行うためには何らかの工夫が必要となる。φ関数の数値誤差に関して，さらに詳しい内容については文献[8]などを参照されたい。

本研究においては，zが小さい場合にe^zのテイラー展開である

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

から 1 を差し引いた数式

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

を用いて直接$e^z - 1$を計算することにより数値誤差に対処している。この方法は，MATLAB を代表とするプログラム言語にて関数 expm1 として実装されており，非常に小さいzを扱う際に生じる誤差を回避することができる（表 A.1 の範囲で真値と同じ値となる）。

なお，本研究では行列指数関数を変数変換により固有値・固有ベクトルを用いて計算しているため，$z = \lambda h$としてφ関数を計算すればよいが，$z = Ah$としてφ関数を行列指数関数のまま直接計算する方法も考えられる。

行列指数関数の計算方法はいくつかあるが，簡単に計算するならば，行列指数関数e^{Ah}が

$$e^{Ah} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ah)^n}{n!} = I + Ah + \frac{(Ah)^2}{2!} + \cdots$$

と定義されることから，$\varphi_0(Ah) = e^{Ah}$の定義と本文の式(2.9)の漸化式より，

$$\varphi_l(Ah) = \frac{I}{l!} + \frac{Ah}{(l+1)!} + \frac{(Ah)^2}{(l+2)!} + \cdots$$

と表現し，ある次数まで近似してφ関数を計算する方法が考えられる。ただし，この近似計算で打ち切り誤差を十分小さくするためには高い次数まで計算する必要があり，計算コストが大きいといった問題がある。

そのため，高速かつ高精度にφ関数を数値計算する方法として，Pade 近似といった有理関数近似に Scaling and Squaring を組み合わせた計算方法[5]が近年研究されている[9][10][11]。

---

[5] 行列$(z = Ah)$を 2 の s 乗で割り，割った行列を引数としたφ関数$[\varphi(z/2^s)]$を有利関数近似で計算した後，その近似値を s 回自乗して$\varphi(z)$を求める方法

電力中央研究所報告
〔不許複製〕
編集・発行人 一般財団法人 電力中央研究所
システム技術研究所長
神奈川県横須賀市長坂2-6-1
e-mail serl-rr-ml@criepi.denken.or.jp
発行･著作･公開 一般財団法人 電力中央研究所
東京都千代田区大手町1-6-1
ISBN978-4-7983-1752-6