量子論理の形式的体系 QL

小沢晴彦, 小寺平治, 千谷慧子

1　はじめに

量子力学の命題の真理値は，与えられた物理系の状態をベクトルとするヒルベルト空間内の閉部分空間によって表される．ヒルベルト空間の閉部分空間の全体は，包含関係を順序とする完備オーソモジュラー束である. したがって, 古典論理の構造がブール代数で表されるように, 量子力学を記述する論理, すなわち量子論理の構造は完備オーソモジュラー束で表される.

本論文の目的は, 量子論理の形式的体系 QL を提示し, その健全性 (soundness) を証明することである.

QL の論理記号は, 完備オーソモジュラー束の演算 $\vee, \wedge, \perp, \bigvee, \bigwedge$ に対応する記号と束の順序 $\leq$ に対応する次のような基本含意 $\rightarrow$ である:

$$(a \rightarrow b) = \begin{cases} 1 & a \leq b \text{である場合,} \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

2　完備オーソモジュラー束

次の公理 (C),(P) を満たす完備束 $\mathcal{L}$ は "**完備オーソモジュラー束**" と呼ばれている．$\mathcal{L}$ の最大元と最小元は 1 および 0 で記す.

(C) 各 $c \in \mathcal{L}$ に対して, 次の条件を満たす直交補元 $c^{\perp} \in \mathcal{L}$ がただ一つ存在する:

(C_1)　$c^{\perp\perp} = c$

(C_2)　$c \vee c^{\perp} = 1$　かつ　$c \wedge c^{\perp} = 0$

(C_3)　任意の $b \in \mathcal{L}$ に対して, $b \leq c \Longrightarrow c^{\perp} \leq b^{\perp}$

(P) $b, c \in \mathcal{L}$ かつ $b \leq c$ である時, $\{b, b^{\perp}, c, c^{\perp}\}$ で生成される $\mathcal{L}$ の部分束は, 分配的である.

さて, $b \neq c$ かつ $b \leq c$ とする．このとき,

$$b \leq x \leq c \implies x = b \text{ または } x = c$$

が満たされるならば c は b を "**カバーする**" と言う．完備オーソモジュラー束 $\mathcal{L}$ の元で 0 をカバーする元を "**原子元**" と言う.

量子力学の命題系は次の条件 (A) を満たす完備オーソモジュラー束として表現される.

(A) (A_1)　0 でない命題 b に対して, $p \leq b$ となる原子元 p が存在する.

(A_2)　p が原子元で $p \wedge b = 0$ である時, $p \vee b$ は b をカバーする.

次は, オーソモジュラー束のよく知られた性質である:

定理 2.1 オーソモジュラー束において,

$$b \leq c \text{ ならば } \quad c = b \vee (c \wedge b^{\perp}).$$

定義 2.1 b, c を完備オーソモジュラー束 $\mathcal{L}$ の元とする.

$\{b, b^{\perp}, c, c^{\perp}\}$ で生成される部分束が分配的であるとき, b と c は "**両立的**" であると言い, $b \,\underset{\circ}{\mid}\, c$ と記す.

また, $b \in \mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$ の部分集合 A に対して, $b \,\underset{\circ}{\mid}\, A$ を次のように定義する.

$$b \,\underset{\circ}{\mid}\, A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\text{各 } a \in A \text{ に対して } b \,\underset{\circ}{\mid}\, a \quad)$$

定理 2.2 (Piron (1976) pp.25–27) 完備オーソモジュラー束 $\mathcal{L}$ の元 b, c に対して, 次の 4 条件は同値である.

1. $b \,\underset{\circ}{\mid}\, c$
2. $(b \wedge c) \vee (b^{\perp} \wedge c) \vee (b \wedge c^{\perp}) \vee (b^{\perp} \wedge c^{\perp}) = 1$
3. $(b \wedge c) \vee (b^{\perp} \wedge c) = c$
4. $(b \vee c^{\perp}) \wedge c = b \wedge c$

定理 2.3 (Piron (1976) p.27,p.28) 完備オーソモジュラー束 $\mathcal{L}$ の部分集合 C と $b \in \mathcal{L}$ に対して, $b \,\underset{\circ}{\mid}\, C$ のとき, 次が成立する.

1. $\bigvee_{c \in C}(b \wedge c) = b \wedge (\bigvee C), \quad \bigwedge_{c \in C}(b \vee c) = b \vee (\bigwedge C)$
2. $b \,\underset{\circ}{\mid} \bigvee C, \quad b \,\underset{\circ}{\mid} \bigwedge C$

3 量子論理の形式的体系 QL

QL の基本記号は, 次の通りである:

1. 個体変数
   自由変数: $a_1, a_2, \cdots$
   束縛変数: $x_1, x_2, \cdots$
2. 述語記号: $P, Q, R, \cdots$
3. 論理記号: $\wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ ^{\perp},\ \forall,\ \exists$
4. 補助記号: (,) (括弧), ,(コンマ)

QL の "**項** **(term)**" は, 自由変数だけであり, QL の "**論理式** **(formula)**" は通常どおりに, 基本論理式 $P(a_1, \cdots, a_n)$ から論理記号により構成される.

以下において, $a, b, \cdots$ を自由変数のメタ記号, $x, y, \cdots$ を束縛変数のメタ記号, $\varphi, \psi, \xi, \cdots$ を 論理式を表わすメタ記号, $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda, \cdots$ を論理式の有限列 (空列のこともある) を表わすメタ記号とする.

定義 3.1 論理式 φ, ψ に対して,

$$\Box\varphi \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\varphi \to \varphi) \to \varphi$$
$$\varphi \midcir \psi \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi \to (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi^{\perp})$$

Γ が論理式の有限列 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ であるとき,

$$\varphi \midcir \Gamma \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\varphi \midcir \psi_1) \wedge (\varphi \midcir \psi_2) \wedge \cdots \wedge (\varphi \midcir \psi_n)$$

論理式の有限列 Γ, Δ に対し, $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ の形を “**式**” という.

定義 3.2 “**$\Box$-閉論理式**”を, 帰納的に定義する.

1. $\varphi \to \psi$ の形の論理式は, $\Box$-閉論理式である.
2. φ, ψ が $\Box$-閉論理式のとき, $\varphi \wedge \psi, \quad \varphi \vee \psi$ および $\varphi^{\perp}$ は, $\Box$-閉論理式である.
3. $\varphi(a)$ が $\Box$-閉論理式のとき, $\forall x\varphi(x)$ および $\exists x\varphi(x)$ は, $\Box$-閉論理式である.
4. $\Box$-閉論理式は, $1, 2, 3$ によって得られるものに限る.

$\Box$-閉論理式を表わすのに, $\overline{\varphi}, \overline{\psi}, \ldots$ を用い, $\Box$-閉論理式の有限列を表わすのに, $\overline{\Gamma}, \overline{\Delta}, \overline{\Pi}, \overline{\Lambda}, \ldots$ を用いる.

定義 3.3 QL の公理および推論規則

1. 論理的公理

1. $\varphi \Longrightarrow \varphi$
2. $\Longrightarrow \varphi \midcir \overline{\psi}, \quad \Longrightarrow \overline{\varphi} \midcir \psi$
3. $(\varphi \to \psi) \Longrightarrow \psi \midcir \varphi$

2. 推論規則

(1) 構造に関する推論規則:

増 : $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi}$

減 : $\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi}$

換 : $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Longrightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Lambda}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Lambda}$

三段論法 : $\dfrac{\{\ \Longrightarrow \varphi \midcir \pi \mid \pi \text{ in } \Pi\} \quad \{\ \Longrightarrow \varphi \midcir \delta \mid \ \text{ in } \Delta\} \quad \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Pi \Longrightarrow \Lambda}{\Gamma,\, \Pi \Longrightarrow \Delta, \Lambda}$

(2) 論理記号に関する推論規則:

$\wedge$:
$$\frac{\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi}{\varphi \rfloor_{\circ} \Delta, \psi \rfloor_{\circ} \Delta, \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

$\vee$:
$$\frac{\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi \rfloor_{\circ} \Gamma, \psi \rfloor_{\circ} \Gamma, \varphi \vee \psi,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$\rightarrow$:
$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \overline{\Delta}, \varphi \quad \psi, \overline{\Pi} \Longrightarrow \Lambda}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \overline{\overline{\Pi}} \Longrightarrow \overline{\Delta}, \Lambda} \qquad \frac{\varphi, \overline{\Gamma} \Longrightarrow \overline{\Delta}, \psi}{\overline{\overline{\Gamma}} \Longrightarrow \overline{\Delta}, \varphi \rightarrow \psi}$$

$^{\perp}$:
$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi}{\varphi \rfloor_{\circ} \Delta, \varphi^{\perp}, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi^{\perp\perp}} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi \rfloor_{\circ} \Gamma,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi^{\perp}}$$

$\forall$:
$$\frac{\varphi(a), \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\forall x \varphi(x), \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi(a)}{\varphi(b) \rfloor_{\circ} \Delta, \Gamma \Longrightarrow \Delta, \forall x \varphi(x)}$$

ただし, a は任意の項である.

ただし, a は下式に現れない自由変数, b は上式に現れない自由変数である.

$\exists$:
$$\frac{\varphi(a), \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi(b) \rfloor_{\circ} \Gamma, \exists x \varphi(x), \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \exists x \varphi(x)}$$

ただし, a は下式に現れない自由変数, b は上式に現れない自由変数である.

ただし, a は任意の項である.

式 $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ の "**証明 (図)**"および "**証明可能性**"は, 通常通りに定義する. また, $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ を $\varphi \leftrightarrow \psi$ と略記することがある. われわれの体系 QL でも, 置換定理が成立することをまず注意しておく.

定理 3.1 (置換定理) $\Longrightarrow \theta_1 \leftrightarrow \theta_2$ が証明可能ならば, $\Longrightarrow \varphi(\theta_1) \leftrightarrow \varphi(\theta_2)$ も証明可能である.

定理 3.2 次の式は QL で証明可能である.

1. $\Longrightarrow \varphi \leftrightarrow \varphi^{\perp\perp}$
2. $\Longrightarrow \varphi \vee \varphi^{\perp}$, $\quad \varphi \wedge \varphi^{\perp} \Longrightarrow$
3. $\varphi \rightarrow \psi \Longrightarrow \psi^{\perp} \rightarrow \varphi^{\perp}$
4. $(\varphi \vee \psi)^{\perp} \iff \varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp}$, $\quad (\varphi \wedge \psi)^{\perp} \iff \varphi^{\perp} \vee \psi^{\perp}$
5. $\varphi \rfloor_{\circ} \psi \Longrightarrow \psi \rfloor_{\circ} \varphi$
6. $\Box \varphi \Longrightarrow \varphi$
7. $\overline{\varphi} \Longrightarrow \Box \overline{\varphi}$
8. $\forall x \Box \varphi(x) \Longrightarrow \Box \forall x \varphi(x)$
9. $\xi \rfloor_{\circ} \varphi,\ \xi \rfloor_{\circ} \psi \Longrightarrow \xi \wedge (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\xi \wedge \varphi) \vee (\xi \wedge \psi)$
10. $\xi \rfloor_{\circ} \varphi,\ \xi \rfloor_{\circ} \psi \Longrightarrow \xi \vee (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\xi \vee \varphi) \wedge (\xi \vee \psi)$
11. $\forall x(\varphi \rfloor_{\circ} \psi(x)) \Longrightarrow (\varphi \wedge \exists x \psi(x)) \leftrightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi(x))$

証明 例として, 3,4,5,9 のみを示す.

3.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \to \psi \Longrightarrow \varphi \mathbin{|_{\circ}} \psi$}
\LeftLabel{B}
\UnaryInfC{$\varphi \to \psi \Longrightarrow \varphi \mathbin{|_{\circ}} \psi^{\perp}$}
\AxiomC{$A \quad \Longrightarrow \varphi \mathbin{|_{\circ}} (\varphi \to \psi)$}
\AxiomC{$\varphi \Longrightarrow \varphi$}
\AxiomC{$\psi \Longrightarrow \psi$}
\BinaryInfC{$\varphi, \varphi \to \psi \Longrightarrow \psi$}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi^{\perp}, \varphi \to \psi \Longrightarrow$}
\UnaryInfC{$\varphi \mathbin{|_{\circ}} (\varphi \to \psi), \varphi \mathbin{|_{\circ}} \psi^{\perp}, \psi^{\perp}, \varphi \to \psi \Longrightarrow \varphi^{\perp}$}
\BinaryInfC{$\varphi \mathbin{|_{\circ}} \psi^{\perp}, \psi^{\perp}, \varphi \to \psi \Longrightarrow \varphi^{\perp}$}
\BinaryInfC{$\varphi \to \psi, \psi^{\perp}, \varphi \to \psi \Longrightarrow \varphi^{\perp}$}
\UnaryInfC{$\psi^{\perp}, \varphi \to \psi \Longrightarrow \varphi^{\perp}$}
\UnaryInfC{$\varphi \to \psi \Longrightarrow \varphi^{\perp} \to \psi^{\perp}$}
\end{prooftree}
$$

ただし, A は “ $\Longrightarrow ((\varphi \mathbin{|_{\circ}} (\varphi \to \psi)) \mathbin{|_{\circ}} (\varphi \mathbin{|_{\circ}} \psi^{\perp})) \quad \Longrightarrow ((\varphi \mathbin{|_{\circ}} (\varphi \to \psi)) \mathbin{|_{\circ}} \psi^{\perp}) \quad \Longrightarrow ((\varphi \mathbin{|_{\circ}} (\varphi \to \psi)) \mathbin{|_{\circ}} (\varphi \to \psi))$”, B は “ $\Longrightarrow ((\varphi \mathbin{|_{\circ}} \psi^{\perp}) \mathbin{|_{\circ}} \psi^{\perp}) \quad \Longrightarrow ((\varphi \mathbin{|_{\circ}} \psi^{\perp}) \mathbin{|_{\circ}} (\varphi \to \psi))$”であり, これらは両立性の定義と論理的公理 2 により明らかである.

4.

3 より,

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \Longrightarrow \psi$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\psi^{\perp} \Longrightarrow \varphi^{\perp}$}
\end{prooftree}
\qquad (*)
$$

が得られる. この $(*)$ を用いて証明する.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp} \Longrightarrow \varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp}$}
\UnaryInfC{$\varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp} \Longrightarrow (\varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp})^{\perp\perp}$}
\AxiomC{$\varphi \Longrightarrow \varphi$}
\UnaryInfC{$\varphi \Longrightarrow \varphi^{\perp\perp}$}
\AxiomC{$\varphi^{\perp} \Longrightarrow \varphi^{\perp}$}
\UnaryInfC{$\varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp} \Longrightarrow \varphi^{\perp}$}
\RightLabel{$(*)$}
\UnaryInfC{$\varphi^{\perp\perp} \Longrightarrow (\varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp})^{\perp}$}
\BinaryInfC{$\varphi \Longrightarrow (\varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp})^{\perp}$}
\AxiomC{$\vdots$}
\UnaryInfC{$\psi \Longrightarrow (\varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp})^{\perp}$}
\BinaryInfC{$\varphi \vee \psi \Longrightarrow (\varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp})^{\perp}$}
\RightLabel{$(*)$}
\UnaryInfC{$(\varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp})^{\perp\perp} \Longrightarrow (\varphi \vee \psi)^{\perp}$}
\BinaryInfC{$\varphi^{\perp} \wedge \psi^{\perp} \Longrightarrow (\varphi \vee \psi)^{\perp}$}
\end{prooftree}
$$

4 の他の式については省略する.

5.

両立性の定義と 3,4 などにより, 次のことが得られる.

$$
\begin{aligned}
\varphi \mathbin{|_{\circ}} \psi \quad &\Longrightarrow \quad \varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi^{\perp}) \\
&\Longrightarrow \quad ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi^{\perp}))^{\perp} \leftrightarrow \varphi^{\perp} \\
&\Longrightarrow \quad ((\varphi \wedge \psi)^{\perp} \wedge (\varphi \wedge \psi^{\perp})^{\perp}) \leftrightarrow \varphi^{\perp} \\
&\Longrightarrow \quad ((\varphi \wedge \psi)^{\perp} \wedge (\varphi^{\perp} \vee \psi)) \leftrightarrow \varphi^{\perp} \\
&\Longrightarrow \quad (\psi \wedge (\varphi \wedge \psi)^{\perp} \wedge (\varphi^{\perp} \vee \psi)) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi^{\perp}) \\
\therefore \varphi \mathbin{|_{\circ}} \psi \quad &\Longrightarrow \quad (\psi \wedge (\varphi \wedge \psi)^{\perp}) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi^{\perp}) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

一方, 論理的公理 3 より,

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad (\varphi \wedge \psi) \to \psi \\
&\Longrightarrow \quad \psi \mathbin{|_{\circ}} (\varphi \wedge \psi) \\
&\Longrightarrow \quad \psi \leftrightarrow (\psi \wedge (\varphi \wedge \psi)) \vee (\psi \wedge (\varphi \wedge \psi)^{\perp})
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \Longrightarrow \quad \psi \leftrightarrow (\psi \land \varphi) \lor (\psi \land (\varphi \land \psi)^{\perp}) \tag{2}$$

また, QL では次の式が成立する.

$$(\psi \leftrightarrow (\gamma \lor \delta)) \land (\delta \leftrightarrow \lambda) \Longrightarrow \psi \to (\gamma \lor \lambda) \tag{3}$$

したがって, (1),(2) を (3) に適用し，三段論法を用いると,

$$\varphi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \psi \quad \Longrightarrow \quad \psi \to (\psi \land \varphi) \lor (\psi \land \varphi^{\perp})$$

つまり,

$$\varphi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \psi \quad \Longrightarrow \quad \psi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \varphi$$

となる.

9.

$$
\begin{array}{cccc}
\varphi \Longrightarrow \varphi & \xi \Longrightarrow \xi & \psi \Longrightarrow \psi & \xi \Longrightarrow \xi \\
\hline
\varphi, \xi \Longrightarrow \varphi & \varphi, \xi \Longrightarrow \xi & \psi, \xi \Longrightarrow \psi & \psi, \xi \Longrightarrow \xi \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\varphi, \xi \Longrightarrow \varphi \land \xi} & \multicolumn{2}{c}{\psi, \xi \Longrightarrow \psi \land \xi} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\varphi, \xi \Longrightarrow (\varphi \land \xi) \lor (\psi \land \xi)} & \multicolumn{2}{c}{\psi, \xi \Longrightarrow (\varphi \land \xi) \lor (\psi \land \xi)} \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{\varphi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \xi, \psi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \xi, \xi, \varphi \lor \psi \Longrightarrow (\varphi \land \xi) \lor (\psi \land \xi)} \\
\hline\hline
\multicolumn{4}{c}{\varphi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \xi, \psi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \xi, \xi \land (\varphi \lor \psi) \Longrightarrow (\varphi \land \xi) \lor (\psi \land \xi)} \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{\varphi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \xi, \psi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \xi \Longrightarrow \xi \land (\varphi \lor \psi) \to (\varphi \land \xi) \lor (\psi \land \xi)} \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{\text{論理的公理 2 と定理 3.2.5 と三段論法を何回か用いる}} \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{\xi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \varphi, \xi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \psi \Longrightarrow \xi \land (\varphi \lor \psi) \to (\varphi \land \xi) \lor (\psi \land \xi)}
\end{array}
$$

$\xi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \varphi, \xi \mathbin{\rfloor_{\circ}} \psi \Longrightarrow (\varphi \land \xi) \lor (\psi \land \xi) \to \xi \land (\varphi \lor \psi)$ は, ほとんど明らかなので省略する. ∎

4 QL モデルと健全性

この節では QL のモデルの定義を与え, そのモデルに関する QL の健全性を証明する. 次の条件を満たす三重対 $\langle L, D, f \rangle$ を "QL **モデル**" という.

L は完備オーソモジュラー束, D は空でない集合とする. f は述語記号の全体から成る集合上の写像で, R を n 変数の述語記号とするとき, $f(R)$ は D^n から L への写像である.

さらに, 自由変数の全体 FV から集合 D への写像を, "D-**指定**" とよび, D-指定 v と, 自由変数 a および D の元 d に対して,

$$v'(b) = \begin{cases} v(b) & (b \text{ が } a \text{ でないとき}), \\ d & (b \text{ が } a \text{ であるとき}) \end{cases}$$

なる D-指定 v' を, $v(d/a)$ と記す.
QL モデルと D-指定が与えられたとき, 各論理式に真理値を割り当てる対応, 即ち "**解釈**" が与えられる.

さて, モデル $M = \langle L, D, f\rangle$ と D-指定 v に関する論理式 φ の真理値 $\varphi[M,v] \in L$ を, 次のように定義する.

$$\begin{array}{rcl}
R(a_1,\ldots,a_n)[M,v] & = & f(R)(v(a_1),\ldots,v(a_n)) \\
(\psi\wedge\theta)[M,v] & = & \psi[M,v]\wedge\theta[M,v] \\
(\psi\vee\theta)[M,v] & = & \psi[M,v]\vee\theta[M,v] \\
(\psi\to\theta)[M,v] & = & \begin{cases} 1 & (\psi[M,v]\le\theta[M,v] \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases} \\
(\psi^{\perp})[M,v] & = & (\psi[M,v])^{\perp} \\
\forall\psi(x)[M,v] & = & \bigwedge\{\psi(a)[M,v(d/a)] \mid d\in D\} \\
\exists\psi(x)[M,v] & = & \bigvee\{\psi(a)[M,v(d/a)] \mid d\in D\}
\end{array}$$

このとき, 式 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ が “QL-**恒真**”である, ということを次のように定義する.

$$\bigwedge\{\varphi[M,v] \mid \varphi \text{ in } \Gamma\} \le \bigvee\{\psi[M,v] \mid \psi \text{ in } \Delta\}$$

以上の準備の下に, 次の定理を証明する:

定理 4.1 (QL の健全性) QL-証明可能な式は, QL-恒真である.

証明 証明図の長さについての数学的帰納法による. 論理的公理はどれも明らかに恒真である. 次に, 各論理規則について上式が恒真のとき, 下式も恒真であることを示す.

他の場合も, 同様または簡単であるから推論規則が次に記す [$\to$ 左] と [$\perp$ 右] の場合だけを述べることにする.

1.

$$\frac{\Gamma\Longrightarrow\overline{\Delta},\varphi \quad \psi,\overline{\Pi}\Longrightarrow\Lambda}{(\varphi\to\psi),\Gamma,\overline{\Pi}\Longrightarrow\overline{\Delta},\Lambda} \text{ の場合:}$$

$$\begin{array}{rl}
\gamma = & \bigwedge\{\theta[M,v] \mid \theta \text{ in } \Gamma\}, \quad \pi = \bigwedge\{\theta[M,v] \mid \theta \text{ in } \overline{\Pi}\} \\
\delta = & \bigvee\{\theta[M,v] \mid \theta \text{ in } \overline{\Delta}\}, \quad \lambda = \bigvee\{\theta[M,v] \mid \theta \text{ in } \Lambda\}
\end{array}$$

とおく. $\overline{\Delta}$ および $\overline{\Pi}$ の論理式は, すべて $\Box$-閉論理式という仮定から, δ,π は 0 か 1 である.

(a) $\pi = 0$ または $\delta = 1$ のとき:
下式は, 明らかに恒真である.

(b) $\pi = 1$ かつ $\delta = 0$ のとき:
帰納法の仮定を用いて, $\pi = 1$ より, $\psi[M,v]\le\lambda$. $\delta = 0$ より, $\gamma\le\varphi[M,v]$.

i. $\varphi[M,v]\le\psi[M,v]$ のとき:

$$\gamma\le\varphi[M,v]\le\psi[M,v]\le\lambda.$$

よって, 下式は恒真である.

ii. $\varphi[M,v] \leq \psi[M,v]$ でないとき:
   $(\varphi \to \psi)[M,v] = 0$ より, 下式は恒真である.

2.

$$\frac{\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi \mathrel{\rfloor_{\!\circ}} \Gamma, \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi^{\perp}} \text{ の場合:}$$

上式が恒真とすると,

$$\varphi[M,v] \wedge \bigwedge\{\theta[M,v] \mid \theta \text{ in } \Gamma\} \quad \leq \quad \bigvee\{\xi[M,v] \mid \xi \text{ in } \Delta\}$$

となる.

(a) Γ のある論理式 θ が $\varphi \mathrel{\rfloor_{\!\circ}} \theta$ を満たさないとき

$$\bigwedge\{(\varphi \mathrel{\rfloor_{\!\circ}} \theta)[M,v] \mid \theta \text{ in } \Gamma\} = 0$$

となるので, 下式は恒真である.

(b) Γ のすべての論理式 θ が $\varphi \mathrel{\rfloor_{\!\circ}} \theta$ を満たすとき

$$\bigwedge\{(\varphi \mathrel{\rfloor_{\!\circ}} \theta)[M,v] \mid \theta \text{ in } \Gamma\} = 1$$

このとき, 上式の恒真性を用いて,

$$\begin{aligned}
&\bigwedge\{\theta[M,v] \mid \theta \text{ in } \Gamma\} = \bigwedge\{\theta \wedge (\varphi \vee \varphi^{\perp})[M,v] \mid \theta \text{ in } \Gamma\} \\
&= \bigwedge\{(\theta \wedge \varphi)[M,v] \vee (\theta \wedge \varphi^{\perp})[M,v] \mid \theta \text{ in } \Gamma\} \\
&\leq \bigwedge\{(\theta \wedge \varphi)[M,v] \vee \varphi^{\perp}[M,v] \mid \theta \text{ in } \Gamma\} \\
&= \bigwedge\{(\theta \wedge \varphi)[M,v] \mid \theta \text{ in } \Gamma\} \vee \varphi^{\perp}[M,v] \\
&= (\varphi[M,v] \wedge \bigwedge\{\theta[M,v] \mid \theta \text{ in } \Gamma\}) \vee \varphi^{\perp}[M,v] \\
&\leq (\bigvee\{(\xi[M,v] \mid \xi \text{ in } \Delta\}) \vee \varphi^{\perp}[M,v].
\end{aligned}$$

したがって, 下式が恒真であることが示された. ∎

参考文献

[1] C. Piron, *Foundation of Quantum Physics*, W.A Benjamin Inc, (1976).

[2] M. Takano, "Strong Completeness of Lattice Valued Logic", *Archive for Mathematical Logic* 41 (2002), 497-505.

[3] G. Takeuti, "Quantum Set theory", *Current Issues in Quantum Logic*, eds. E. Beltramatti and B.C. van Fraassen. Plenum, New York (1981), 303-322.

[4] S. Titani, "A lattice-valued set theory", *Archive for Mathematical Logic*, 38(1999), 395-421.

[5] 前田周一郎,「束論と量子論理」, 槙書店 (1980).

小沢晴彦
(中部大学大学院工学研究科研究生)
小寺平治
(愛知教育大学非常勤講師)
千谷慧子
(中部大学教授, 情報科学研究所, 理学教室)