# 直流磁場内の回転体に対する安定性評価法の研究

## Stability Analysis of Rotors Operating in Static Magnetic Field

技術本部　森井茂樹*1　長井直之*2
時安孝一*3　片山圭一*4
九州大学　末岡淳男*5

磁場中で回転するロータでは，ある回転数以上でロータの導体部に生ずるローレンツ力に起因した不安定振動が発生することが知られている．本研究では直流磁場中のロータ動特性評価を目的とし，磁場の感度解析を適用してロータへの磁気作用力を求めそれを減衰定数，ばね定数として表現することで，ロータの動特性を従来の回転軸振動解析システム上で扱えるようにした．本手法の妥当性はモデル試験により検証され，直流磁場中のロータ安定性について設計段階での定量評価が可能となった．

Subsynchronous vibration sometimes occurs on rotors operating in static magnetic field. The vibration of this type is considered as a self-excited vibration caused by Lorent'z force, but its dynamical mechanism has not cleared yet. This paper describes the destabilizing force from both experimental and theoretical works. It is suggested to apply the method used for oil film bearings to the Lorent'z force acting system. This method deals with 8 parameters to describe the dynamic characteristics of the system. The perturbation method of the Lorent'z force using FEM analysis of the magnetic field is applied to obtain those parameters. The calculation shows that the Lorent'z force acts as not only damping but also cross coupled stiffness, and these results have a good agreement with the experimental data of the test rotor. From this study, the stability check of rotors operating in static magnetic field is possible at the design stage.

### 1. まえがき

近年，回転機械分野では小型化・高速化傾向が進む中，非接触保持による低損失化，クリーン化が実現可能な磁気力を利用するケースが増加してきている．しかしながら，磁場中で運転されるロータでは，ある回転数以上で不安定振動が発生することが知られており[1]，当社でも受動型磁気軸受の開発時にこの振動を経験している．この不安定振動は，ロータの導体部に生ずるローレンツ力に起因した自励振動と考えられており，一部内部減衰的な効果としてまとめた例はあるが[2]，まだそのメカニズムについては十分解明されたとは言えず，ロータの安定性評価技術もまだ確立されていない．したがってこの種の振動が発生した場合には試行錯誤的に対処を行っているのが実状である．最近の磁場解析技術の進歩に伴い，ローレンツ力の減衰作用についての研究例は一部見られるものの[3][4]，回転場での作用について報告された例はまだ見られない．

筆者らは，直流磁場中のロータの安定性評価を目的とし，まず磁場解析を利用した回転場におけるローレンツ力の評価法を作成し，さらにそれを安定性評価が行えるよう減衰定数，ばね定数として求める手法を開発した．本手法をモデルロータに適用した結果，実用に供するだけの精度が確認できたのでここに報告する．

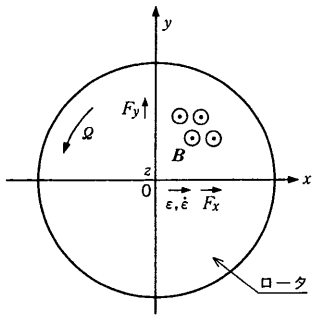
### 2. ローレンツ力による動特性

図1に示すような，直流磁場中に置かれた導体ロータを考える．このときロータには電場が発生しその大きさは次式にて表される．

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1}$$

ここに，$\boldsymbol{E}$：電場 (V/m)，$\boldsymbol{v}$：速度 (m/s)，$\boldsymbol{B}$：磁束密度 (T) であり，×は外積を表す．

式(1)における $X$ 方向の変位，速度微分を考え，微小項を無視すると次式が得られる．




$B$：磁束密度 (T)
$F_x, F_y$：ローレンツ力 (N)
$\varepsilon, \dot{\varepsilon}$：単位変位，単位速度 (m, m/s)
$\Omega$：ロータ回転角速度 (rad/s)
$x, y, z$：直交座標

図1　解析モデル　直流磁場中で回転するロータを示す．
Analytical model

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial\varepsilon}&=\Omega x\frac{\partial B_z}{\partial x}\\ \frac{\partial E_y}{\partial\varepsilon}&=\Omega y\frac{\partial B_z}{\partial x}\\ \frac{\partial E_z}{\partial\varepsilon}&=-\Omega\left(y\frac{\partial B_y}{\partial x}+x\frac{\partial B_x}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial\dot{\varepsilon}}&=0\\ \frac{\partial E_y}{\partial\dot{\varepsilon}}&=-B_z\\ \frac{\partial E_z}{\partial\dot{\varepsilon}}&=B_y\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式(2)の右辺の各項は，ロータの偏心に対する磁束密度の変化率，式(3)の右辺はロータの偏心がないときの磁束密度を表しており，これらは磁場解析により計算可能である．磁場解析は通常有限要素法が用いられるため，以下有限要素モデルについて定式化する．式(1)，(2)からロータの動きに対する電場の変化率が得られ，これらを要素長について積分すれば各要素ごとの起電力分布が求まる．

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\varepsilon}\right)_l=\int\left(\frac{\partial E}{\partial\varepsilon}\right)_l ds_l \qquad (l: x,\ y,\ z) \tag{4}$$

*1広島研究所応物・振動研究室主務　*4広島研究所主管
*2広島研究所応物・振動研究室　*5工学部機械工学科教授 工博
*3広島研究所実験課主務

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\varepsilon}}\right)_l = \int \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varepsilon}}\right)_l \mathrm{d}s_l \qquad (l: x,\ y,\ z) \tag{5}$$

ここに，$V$：起電力（V），$\mathrm{d}s_l$：要素長（m）である．なお以下の議論はすべてロータがある変位，速度で動いた場合の変化率についてのものであるが，記述においてはこれを省略してある．

今，ロータの導体部を図2に示すような起電力要素，抵抗要素とから構成される回路網と考える．これらの値は有限要素モデルにおける各要素間に対するものであり，起電力要素は式(4)，(5)から抵抗要素は幾何形状から求めることができる．要素（$i$, $j$, $k$）における起電力要素，抵抗要素を，座標の正の方向の隣接要素間の三成分から成るとし，その表示を次のように決める．

$$\boldsymbol{V}(i,\ j,\ k) = {}^{\mathrm{T}}[V(i+1/2, j, k),\ V(i, j+1/2, k),\ V(i, j, k+1/2)] \tag{6}$$

$$\boldsymbol{R}(i,\ j,\ k) = {}^{\mathrm{T}}[R(i+1/2, j, k),\ R(i, j+1/2, k),\ R(i, j, k+1/2)] \tag{7}$$

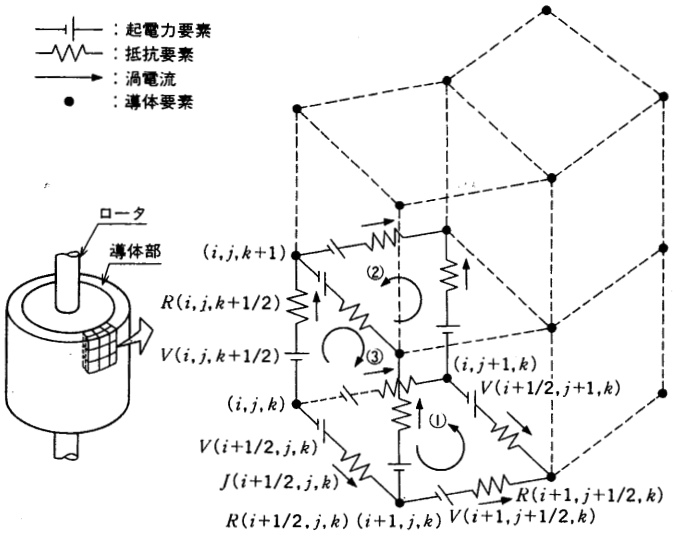



**図2　ロータ導体部の回路網モデル**　ロータ動体部を起電力要素，抵抗要素とから成る回路網と考えることで，ロータの運動により生じる渦電流を求める．
Electrical circuit model of rotor conductive part

ここでTは転置を示す．

同様に要素（$i$, $j$, $k$）から流れ出す渦電流を次のように決める．

$$\boldsymbol{J}(i,\ j,\ k) = {}^{\mathrm{T}}[J(i+1/2, j, k), J(i, j+1/2, k), J(i, j, k+1/2)] \tag{8}$$

キルヒホフの法則より，

$$[1,0,0]\boldsymbol{J}(i-1, j, k) + [0,1,0]\boldsymbol{J}(i, j-1, k) + [0,0,1]\boldsymbol{J}(i, j, k-1) - [1,1,1]\boldsymbol{J}(i, j, k) = 0 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}(i,j,k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{J}(i+1,j,k) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{J}(i,j+1,k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{J}(i,j,k+1) = \boldsymbol{E}\boldsymbol{V}(i,\ j,\ k) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{V}(i+1,\ j,\ k) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{V}(i,\ j+1,\ k) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{V}(i,\ j,\ k+1) \tag{10}$$

ここで，$\boldsymbol{A}$～$\boldsymbol{D}$は抵抗，$\boldsymbol{E}$～$\boldsymbol{H}$は起電力の関与を示す行列を示す．例えば，以下に示すごとくである．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -R\left(i+1/2, j, k\right) & R\left(i, j+1/2, k\right) & 0 \\ 0 & -R\left(i, j+1/2, k\right) & R\left(i, j, k+1/2\right) \\ R\left(i+1/2, j, k\right) & 0 & -R\left(i, j, k+1/2\right) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

式(9)は要素（$i$, $j$, $k$）における電流収支を，式(10)は図2中に示す①～③のループにおける起電力収支を表しており，式(9)，(10)を連立させて解くことで要素内の渦電流分布を求めることができる．

各要素のローレンツ力は

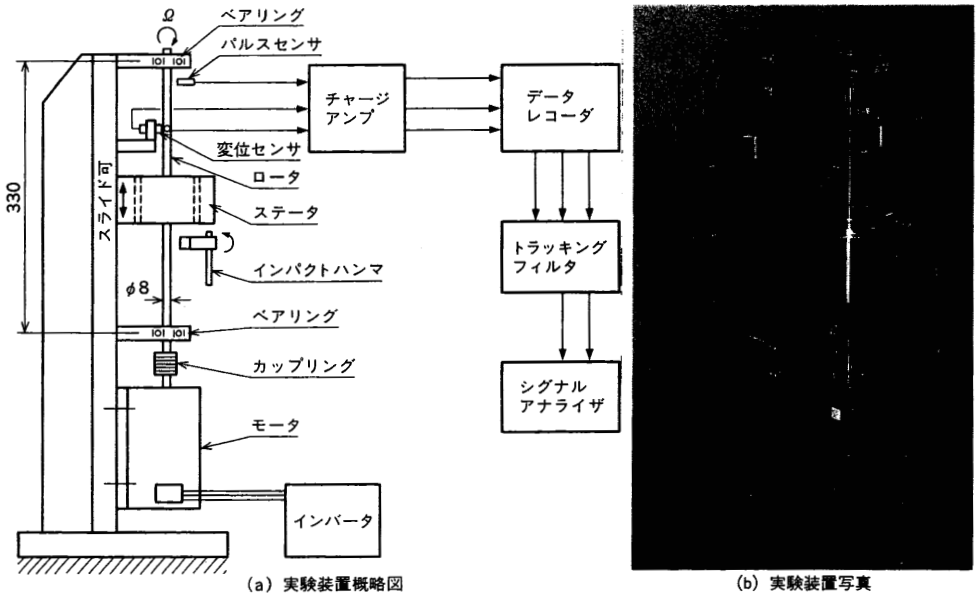
$$\mathrm{d}F_l = (J \times B)_l \cdot \mathrm{d}s_l \qquad (l: x,\ y,\ z) \tag{11}$$

で得られ，これをロータ導体部全体にわたって積分することでロータに作用するローレンツ力を求めることができる．

すなわち

$$K_{\mathrm{D}} = \int \mathrm{d}F_x,\quad K_{\mathrm{c}} = \int \mathrm{d}F_y \tag{12}$$

$$C_{\mathrm{D}} = \int \mathrm{d}F_x,\quad C_{\mathrm{c}} = \int \mathrm{d}F_y \tag{13}$$




(a) 実験装置概略図　　(b) 実験装置写真

**図3　実験装置**　ロータ中央部に磁場が与えられるようになっており，ステータをスライドさせることで磁場の影響をなくすことができる．
Experimental set-up

ここに，$C$：減衰定数（N·s/m），$K$：ばね定数（N/m）であり，添字のD，cはそれぞれダイレクト項，クロス項を示す．なお解析においては，変位微分した式(2)から式(12)を，速度微分した式(3)から式(13)を，それぞれ別々に計算すればよい．

## 3．実験及び解析結果との対比

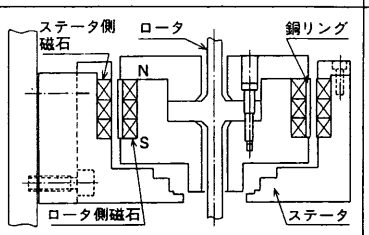
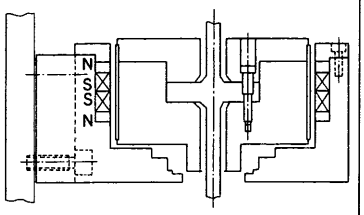
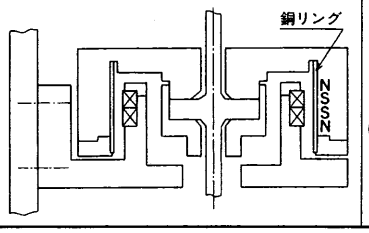
### 3．1　実験装置及び実験方法

以上に述べた解析手法の妥当性確認及び精度把握の目的で実験を行った．実験装置の構成及び写真を図3に示す．ロータは両側を転がり軸受で支え，ロータ径を細かくすることでJeffcottロータモデルとして扱えるようにしてあり，したがって1次の振動モードはピン支持の曲げモードである．ロータ中央部近傍のロータ側及びステータ側にはリング状の永久磁石が装着できるようになっており，それにより磁場を与えている．ロータには二つのタイプがあり，ステータに対しロータ側磁石が内側にあるものをインナロータタイプ，外側にあるものをアウタロータタイプと称する．またステータはロータ軸方向にスライドできるようになっており，ステータをスライドさせることでロータから見た磁場変化をなくすることができる．

表1に磁石配置の詳細を示す．(a)はロータ，ステータ側双方に永久磁石を配したインナロータタイプ，(b)はステータ側のみに永久磁石を配したインナロータタイプ，(c)は(b)と対応するアウタロータタイプであり，磁石は希土類製（残留磁束密度0.86 T）のものを用いた．またロータ側には導電性の良い銅リングが取付けられており，この部分主体にローレンツ力が作用するようにしてある．なおこの銅リング以外はほとんどステンレス製であり，磁場の乱れを極力抑えるとともに，この部分に作用するローレンツ力の影響を無視できるようにしてある．表1中に1次の固有振動数及び等価質量を併せ記してある．

前述の3ケースに対し，ステータの有無すなわち磁場の影響有無についてのロータ動特性計測を，ロータ回転数をパラメータに行った．動特性計測はロータをインパクトハンマにて直接加振し，回転数成分にノッチフィルタをかけた過渡振動波形により行った．

表1　磁石配置及びロータ諸元
Summary of test case

| ケース | 磁石配置 | 固有振動数 | 等価質量 |
|---|---|---|---|
| (a) |  | 27.8 Hz (1 668 cpm) | 3.46 kg |
| (b) |  | 同　上 | 2.90 kg |
| (c) |  | 21.0 Hz (1 260 cpm) | 4.78 kg |

永久磁石は次のペアのものを用いた．外径/内径/高さ　96/ 76/10（小径磁石）
120/104/10（大径磁石）

計測結果の一例を図4に示す．●印はロータ自体が有する減衰比であり，それと磁気作用の両方の効果が含まれた減衰比が○印で計測されていることから，磁場作用による減衰比は，回転数ごとに両者の差をとって求めた．

### 3．2　解析結果との比較

図5に磁場解析を行った要素分割図を示す．磁場はロータの変位方向に対して左右対称であることから半円筒部についてのみ行い，要素数は約2 500である．なお磁場解析は，磁気ベクトルポテンシャル法に基づく有限要素解析によった．

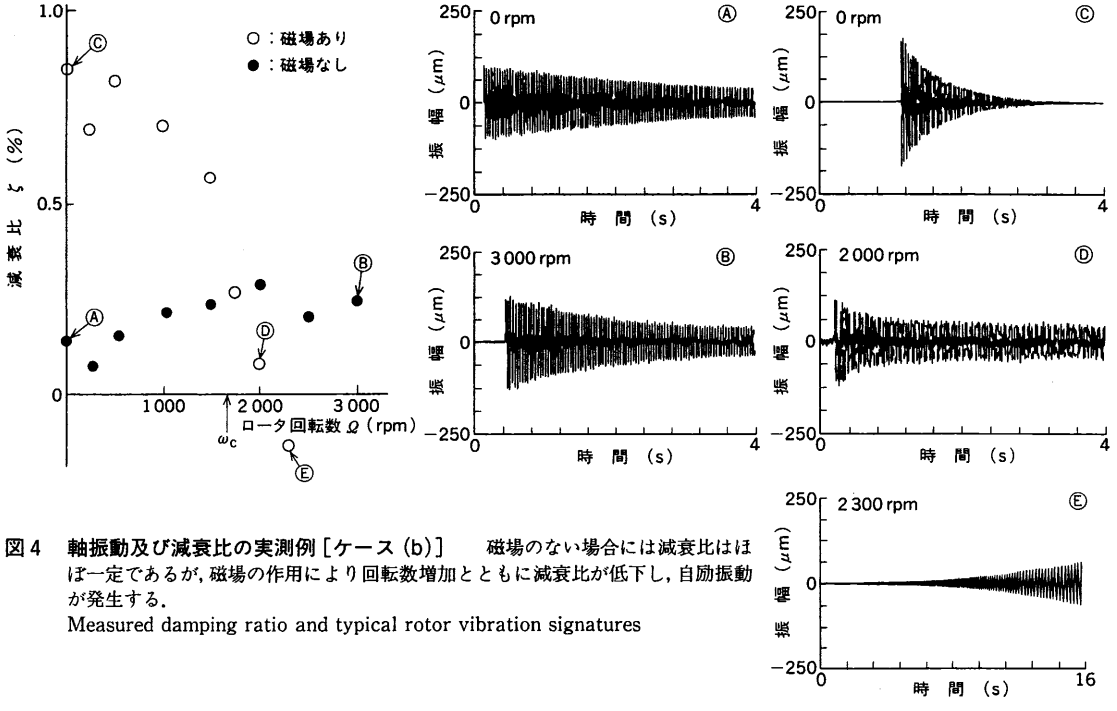



図4　軸振動及び減衰比の実測例［ケース(b)］　磁場のない場合には減衰比はほぼ一定であるが，磁場の作用により回転数増加とともに減衰比が低下し，自励振動が発生する．
Measured damping ratio and typical rotor vibration signatures

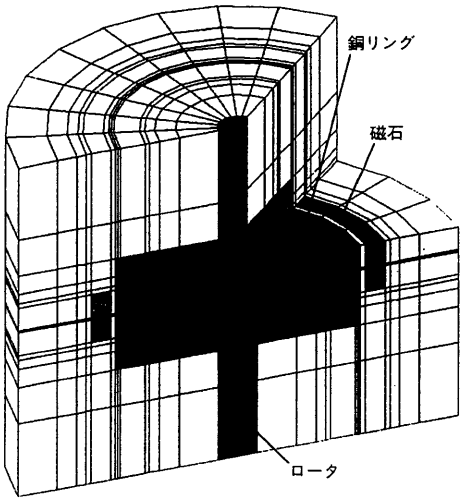



**図5　磁場解析時の要素分割**　変位方向に対し磁場は対象となることから半円筒部分を分割した．分割数は約2 500である．
Example of FEM analysis of static magnetic field

この結果を2章で述べた解析に適用すると $C_c$，$K_D$ は0となり，$C_D$，$K_c$ から減衰比は円形振れ回りを仮定して次式により求めた．

$$\zeta=\frac{C_D\omega_c-K_c}{2\,m_e\omega_c^2}$$

ここに，

$\zeta$：減衰比，

$m_e$：等価質量（kg），

$\omega_c$：固有角振動数（rad/s）

表1（a），(b)，(c）の各ケースについて，解析値と実験値の比較を行った結果を図6に示す．ケース(a)の場合，実測においてロータ回転数に対し減衰比の変化はほとんど認められず，その傾向は解析値とほぼ一致している．ケース(b)の場合（実験結果は図4参照），ロータ回転数を上げていくとロータ加振後振動がなかなか減衰しなくなり最終的には自励振動が発生し，振れ回り方向は前回りであった．すなわちロータ回転数の増加に伴い減衰比は低下し，解析においてもその傾向が認められる．回転数0での値は減衰作用を，こう配はクロスばね作用を表しており，前者は誤差はあるが後者についてはほぼ妥当な結果が得られている．ケース(c)は，ケース(b)に対して磁場の変化が逆になることから，振れ回り方向も逆になることを期待して行ったものである．しかしながら実測された振れ回り方向はケース(b)と同様前回りであったが，この結果の妥当性は本解析により実証された．

本データを見る限り，自励振動は危険速度よりも高いロータ回転数で発生しており，磁気作用による励振作用は内部減衰効果と同様の効果ではなく，クロスばね効果によるものと考えられる．このクロスばね効果の発生原因は，ロータ偏心方向のロータ前後面で磁束密度の変化率が異なることに起因するものである．

精度的には一部不十分な点もあるが，これについては現在磁場解析精度が原因と考えている．今回メモリー上の制約から要素数が十分とれておらず，それを増やすことで磁場解析精度を上げればそれに伴い動特性の推定精度も向上するものと予想される．

## 4. あ と が き

得られた結果をまとめると次のようになる．

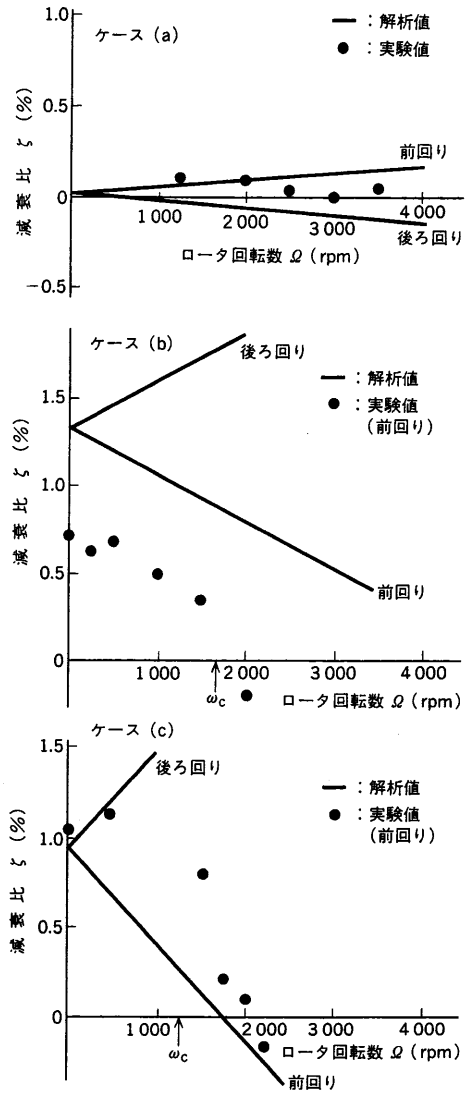



**図6　モデルロータによる減衰比の実測値と解析値の比較**　磁気作用による減衰比の実測値と本開発の評価法を比較したところ両者はほぼ一致し，実用可能なことが確認された．
Calculated and measured damping ratio

直流磁場中で運転される導体ロータに生ずるローレンツ力は，減衰効果としてだけでなく，クロスばね効果としての作用も有し，これが自励振動発生の原因であると考えられる．これらの効果の定量的評価法として，磁場解析を利用した手法を開発し，その妥当性をモデル実験により実証した．その結果，実用的にはおおむね適用可能なことが確認できた．

従来この種の振動の安定性評価技術が全くなく試行錯誤的に対処していたが，本手法の開発により設計段階でロータ安定性について評価ができるようになった．今後実機適用を推進し，信頼性の高いロータの提供に役立てていく所存である．

### 参 考 文 献

(1) Frederick, J. R. et al., Operation of an Electromagnetic Eddy-Current Damper with a Supercritical Shaft, ASME J. of Vib. Acoust., Technical Brief Vol. 116 (1994) p.578
(2) 川本ほか，磁気軸受と組み合わせたうず電流式ダンパの基礎的検討，日本機械学会論文集 47-419 (1981) p.849
(3) 長屋ほか，円形磁石と任意形状導体より構成される磁気ダンパの研究，日本機械学会論文集 50-453 (1984) p.806