駆動システムのねじり振動解析法

Torsional Vibration Analysis of Driving Systems

技術本部 森井茂樹[*1] 長井直之[*2]
株式会社リョーセンエンジニアズ 西本幸治[*3]

製鉄プロセスラインを始めとして，駆動系の応答性，ロール間の揃（せん）速性向上などの要求が厳しくなってきている．一方，機械本体については軽量化に伴い柔化傾向にあり，機械・制御系の連成した振動問題が顕在化しつつある．従来，設計においては機械系と制御系がそれぞれ個別に考えられることが多かったが，今後機械性能向上のためにはそれらの連成を考慮した評価が必要不可欠である．その対応として，機械・制御系の連成を考慮した周波数応答，過度応答，複素固有値解析が行えるシステムを開発した．これを設計時に用いることで，高品質の製品提供に寄与できる．

The driving system of machines tend to be high performance, such as high response and synchronization in rolls. Consequently, problems of mechanical vibration coupled with control system are remarkably increasing. It is important that the eigenvalue characteristics of the machines are changed by control, so that the analysis of dynamic behavior of the total system containing the control system is necessary to develop new machines that have high performance. The authors have developed a system of calculating the torsional vibration phenomena so as to estimate the dynamic characteristics of driving systems in the design stage. In this paper, the functions of this system and application examples are described.

1. まえがき

近年，アクチュエータ，コンピュータ処理技術が進歩することで，制御技術も発達し各所に適用されるようになってきた．それに伴い，機械系と制御系の連成した振動問題が顕在化してきている．その原因として，従来は制御系が機械系固有値特性の変化をほとんど引起こさなかったのに対し，機械系自体の大型化，軽量化に伴う低剛性化と機械性能向上，例えばロール間の揃（せん）速性向上，電気式同期化などに伴う高応答化が平行して進められてきたことで，固有値特性への影響が大きくなったことが挙げられる．

制御といえば，一般にフィードバック制御を意味しており，フィードバック制御を行うことで機械系の固有値特性が変化させられる(1)．特に駆動系では1次の固有振動数が低くなることが多く，したがって制御の影響を受ける振動モードも多くなってくる．前述のように，もはやこの固有値変化を無視しての設計では不十分な段階にきており，設計段階でその影響を正確に評価できる技術が必要不可欠である．

今回ねじり駆動系に対し，制御系が扱えるシステムを開発した．本報ではその概要について述べるとともに，適用例についても紹介する．

2. ねじり振動解析システム

2.1 定化式

多入力，多出力系に対し，状態方程式，出力方程式は以下のように表現される．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{2}$$

ここに，$\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$ はそれぞれ状態，出力，制御ベクトルを，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ はシステムの状態，制御，出力各ベクトル間の伝達行列を表す．まず，機械要素，制御要素をすべて含んだ状態，出力方程式を作り，それと各要素ごとの結合条件式を連立させることでフィードバック系を含んだ式(1)，(2)を得る．以下にその手順を述べる．

まず，機械系の要素についての運動方程式は次式となる．

$$\boldsymbol{J}_m\ddot{\boldsymbol{x}}_1+\boldsymbol{C}_m\dot{\boldsymbol{x}}_1+\boldsymbol{K}_m\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{f} \tag{3}$$

これを状態方程式，出力方程式に表すと式(4)，(5)となる．

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{J}_m^{-1}\boldsymbol{K}_m & -\boldsymbol{J}_m^{-1}\boldsymbol{C}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{J}_m^{-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{f} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\\ \boldsymbol{y}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{J}_m^{-1}\boldsymbol{K}_m & -\boldsymbol{J}_m^{-1}\boldsymbol{C}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{J}_m^{-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{f} \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_2=\dot{\boldsymbol{x}}_1$ で，$\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{y}_3$ は変位，速度，加速度である．

一方，制御系についてはその伝達関数を式(6)とすれば，

$$\frac{Y(\mathrm{s})}{U(\mathrm{s})}=\frac{\beta_m\mathrm{s}^m+\beta_{m-1}\mathrm{s}^{m-1}+\cdots\cdots+\beta_1\mathrm{s}+\beta_0}{\mathrm{s}^n+\alpha_{n-1}\mathrm{s}^{n-1}+\cdots\cdots+\alpha_1\mathrm{s}+\alpha_0},\quad (n\geq m) \tag{6}$$

状態変数を用いて式(7)，(8)のように内部表現できる(2)．

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdot & 0\\ \cdot & 0 & 1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \cdot & 0\\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdot & \cdot & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ 1\end{bmatrix}u \tag{7}$$

$$y=\{\beta_0-\alpha_0\beta_n,\ \beta_1-\alpha_1\beta_n,\ \cdots\cdots,\ \beta_{n-1}-\alpha_{n-1}\beta_n\}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{bmatrix}+\beta_n u \tag{8}$$

機械系も系の1つの要素と考えると，制御系も含めた状態，出力方程式は式(9)のようになる．

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \dot{\boldsymbol{x}}_l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \cdot & \cdot & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \cdot & \cdot & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \boldsymbol{x}_l\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} & \cdot & \cdot & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2 & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \cdot & \cdot & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_1\\ \boldsymbol{w}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \boldsymbol{w}_l\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \boldsymbol{v}_l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} & \cdot & \cdot & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2 & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \cdot & \cdot & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \boldsymbol{x}_l\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} & \cdot & \cdot & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \cdot & \cdot & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_1\\ \boldsymbol{w}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \boldsymbol{w}_l\end{bmatrix} \tag{10}$$

*1 広島研究所応物・振動研究室長
*2 広島研究所応物・振動研究室
*3 技術計算センター機械解析課

次に，各要素ごとの結合条件を与える．すなわち，各要素への入力を $\boldsymbol{w}$，出力を $\boldsymbol{v}$，また外部入力を $\boldsymbol{u}$ とすれば，

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{v}+\boldsymbol{K}_E\boldsymbol{u} \tag{11}$$

式(9)，(10)の右辺1，2項の行列を，それぞれ $\boldsymbol{A}_0$，$\boldsymbol{B}_0$，$\boldsymbol{C}_0$，$\boldsymbol{D}_0$ として(11)式を連立させると

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\{\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{C}_0\}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{K}_E\boldsymbol{u} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{y}=\{\boldsymbol{C}_0+\boldsymbol{D}_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{C}_0\}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{K}_E\boldsymbol{u} \tag{13}$$

となり，(1)，(2)式と全く同形の式を得る．

2．2　解析手法

本システムは，周波数応答解析，複素固有値解析，及び過度応答解析が行なえる．以下にその解析方を述べる．

(1) 周波数応答解析

以下のような直接解析法を用いている．

式(12)において $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0e^{j\omega t}$，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0e^{j\omega t}$ と置くと，

$$\begin{aligned}&[j\omega\boldsymbol{I}-\{\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{C}_0\}]\boldsymbol{x}_0\\&\qquad=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{K}_E\boldsymbol{u}_0\end{aligned} \tag{14}$$

これを $\boldsymbol{x}_0$ について解き，式(13)に代入すれば応答は次式にて求まる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}=[&\{\boldsymbol{C}_0+\boldsymbol{D}_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{C}_0\}\boldsymbol{x}_0\\&+\boldsymbol{D}_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{D}_0)^{-1}\boldsymbol{K}_E\boldsymbol{u}_0]e^{j\omega t}\end{aligned} \tag{15}$$

(2) 複素固有値解析

状態方程式(12)右辺第1項のシステム行列を，ダブルQR法を用いて固有値及び固有ベクトル（状態変数モード）を解析している．

(3) 過度応答解析

数値分析による直接解法を用いている．すなわち，状態方程式(12)をルンゲクッタ・ギル法，又はニューマーク—β 法にて積分し，その結果を出力方程式(13)に代入して出力を得る．

2．3　非線型項の扱い

(1) むだ時間要素

時間領域での $y(t)=x(t-T)$ なるむだ時間要素の伝達関数 e^{-sT} を，Padé の近似式，例えば式(16)の2次式にて展開している．

$$e^{-sT}=\frac{(sT)^2-6sT+12}{(sT)^2+6sT+12} \tag{16}$$

ここで，s はラプラス演算子を示す．過度応答解析では，まず初期条件として T 時間前の出力を与えて結合条件式(11)を求める．次に，それを入力としてむだ時間要素を自由度から外した式(9)を数値積分し，その結果を式(10)に与えて出力を求めている．

(2) サンプルホールド

$u(t)=1(t)-1(t-T)$ に対し，記述関数法を用いて伝達関数を求めると $(1-e^{-sT})/sT$ であり，これは積分要素と，比例とむだ時間との差の積である．そこで過度応答解析ではこの要素を積分要素と見なし，結合条件式(11)の入出力に現時間と T 時間との差を与えている．なお，周波数応答，複素固有値解析においては，むだ時間と同様 Padé の近似値を用いている．

(3) 機械系のがた要素

過度応答のみに考慮可能である．この要素の剛性は0とし，得られた相対変位より反力を系への入力として返している．

(4) ブライドル要素[3]

図1(a)に示すブライドル系においては，搬送体の伸びによって各ロールの速度が異なってくる．このような系では式(17)に示すような関係がある．

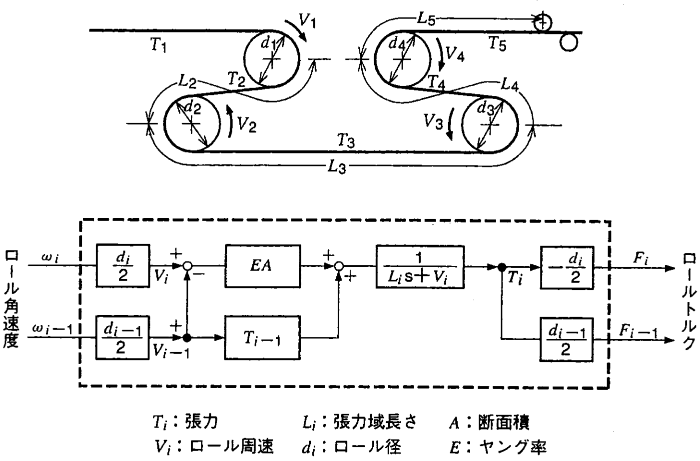


図1　ブライドル系の取扱い　ブライドル系を2入力2出力系として扱う．
Abstract of physical bridle model

$$T_i=\frac{EA(V_i-V_{i-1})+V_{i-1}T_{i-1}}{V_i(L_i/V_is+1)} \tag{17}$$

これを，図1(b)のブロック線図に示すような2入力2出力系として扱っている．

3．本システムの適用例

以上述べた本システムの適用例について3例紹介する．

3．1　天井クレーンの異音

図2に示す実機で，負荷巻き時に異音の発生が認められた．振動計測より約75 Hzの成分がハンチングしていることが判明したが，軸の曲げ，架台などには該当する固有振動数がなく，モータのベクトル制御による応答性増大で，ねじり振動が励起されているのではないかとの推測をした．

図3に，むだ時間をパラメータに複素固有値解析を行なった結果を示す．

これによると，実測された振動成分に近い固有振動数があり，それはむだ時間が約1 ms以上あると不安定となる．対策の方向としては，ASR（Automatic Speed Regulator）のゲインを下げる，むだ時間を小さくすることなどが考えられ，実際にもその対処を

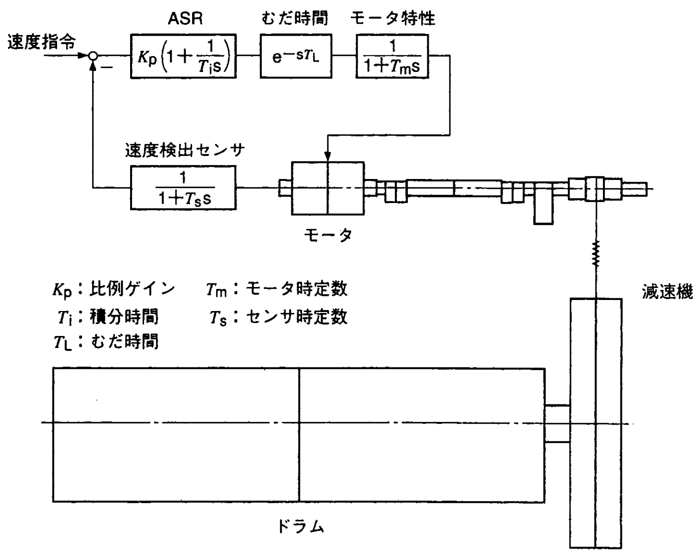


図2　クレーンの解析モデル　機械系と制御系を連成させて解析する．
Analitical crane model conbined with mechanical and control system

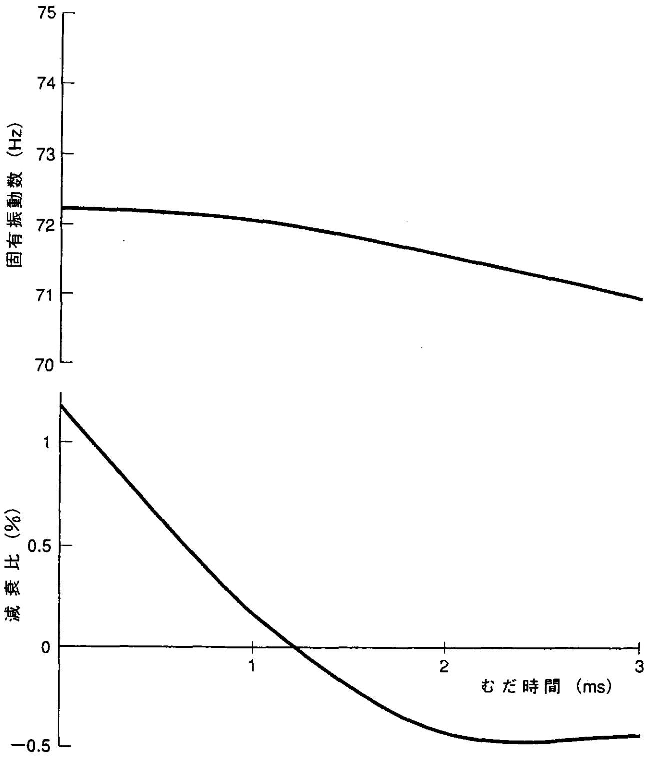


図3　複素固有値解析結果　本来安定な系が，わずかなむだ時間により不安定となることを示す.
Complex eigenvalues concerning time lag

行なったとの情報が入っている.

また，固有振動数を上げることも有効である.

無負荷で振動現象が発生しないのは，ゲインが低下していることもあるが負荷時に対して固有振動数が高くなっているためと推察される.

このように，応答性を上げるためにはかなり高い固有振動数にまで着目した解析をしておくとが必要であり，かつわずかなむだ時間でも，機械の安定性を左右し得ることに注意すべきである.

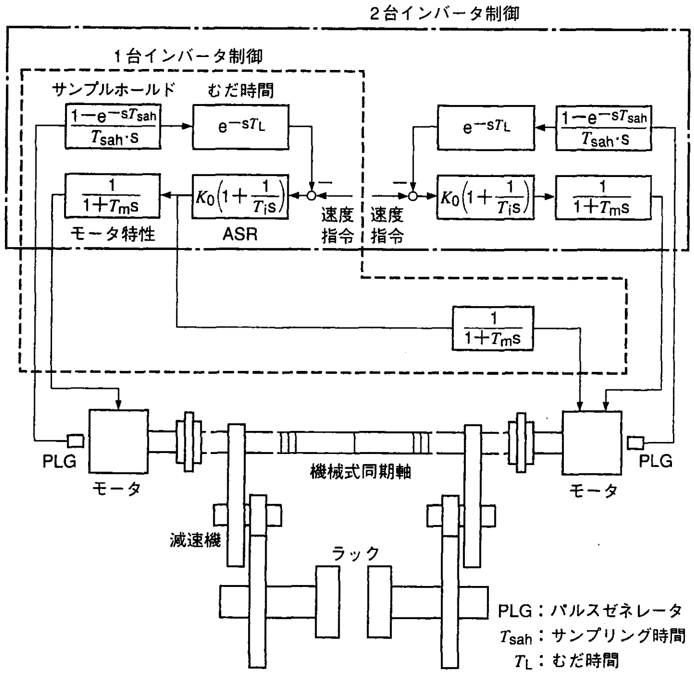
3．2　走行体におけるハンチング

図4(a)に示す，機械式同期結合の両側を独立に駆動制御（2台インバータ制御）した走行体において，図4(b)のように速度静定後約20 Hzの左右逆相の速度変動成長現象が観測された．この系について，ASRのゲインをパラメータに複素固有値解析した結果を図5(a)に示す.

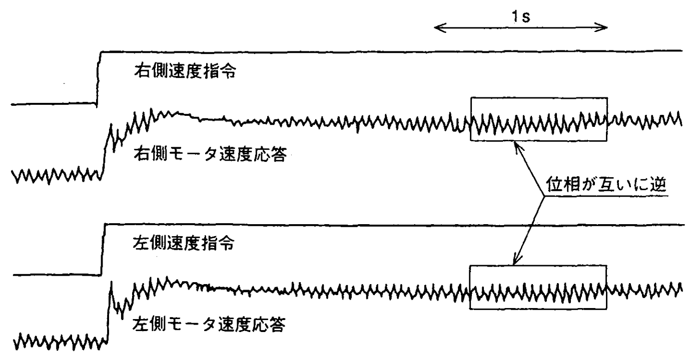
ゲインを上げていくと，実機設定ゲインよりもわずかに高いゲインで同相モードよりも逆相モードが先に不安定となり，ほぼ実現象と一致している．同相モードは逆相モードよりも等価質量が大きく，したがって剛性的にも高いため，安定限界となるゲインが高いものと判断される.

そこで，逆相モードに対し感度を下げ応答性を上げる方法として，ASRの信号をマスターすること（1台インバータ制御）が考えられる．この方式についての解析結果を図5(a)中に示すが，同相モードについては変化ないが逆相モードについては安定限界が大幅に向上しており，そのことは図5(b)の閉ループ周波数応答からも理解される.

この例から分かるように，検出センサの置く位置，さらにはアクチュエータの作用させる位置によっても安定性が変わることに注意を要する反面，その特徴をうまく利用して安定化に持っていくことも有効である.



(a) 走行体のシステム



(b) 2台インバータ制御時のステップ応答

図4　走行体システムと振動状況　2台のインバータ制御時，ステップ応答で左右逆相の速度変動が増大している.
Moving body system and step response with 2 independent ASR

3．3　ブライドル系

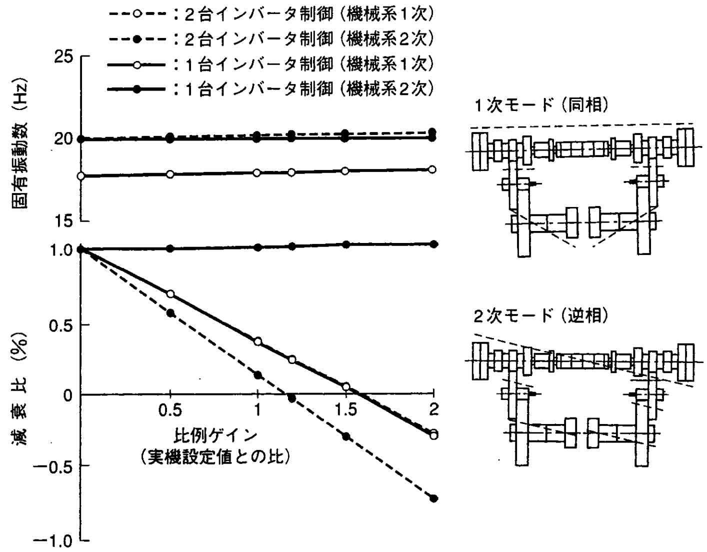
ブライドル系とは，搬送ラインの張力差を得る装置で，構造は図6に示すものであり，特にロール間の揃速性が不十分だと張力変動，スリップなどが発生し問題となる．本システムでの，速度指令に対する応答の解析例を図7に示す.

従来，ロール間は板ばね結合として解析していたが，その結果に対し式(17)を考慮すると1次遅れ効果により応答が鈍くなっている．また，ロール径差を付けないと張力は負となり板が緩むことになるが，適当なロール径差を付ければそれが回避されていることが分かる.

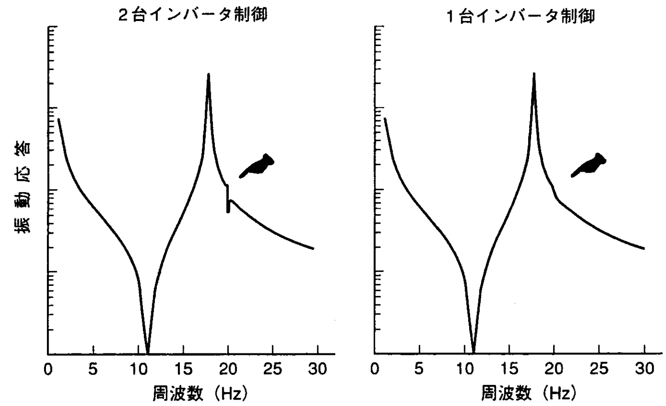
従来の板ばね結合モデルでは，ロール径差を付けた場合の揃速性，トルク変動などの評価はできなかったが，本システムによりそれが可能となった.

4．あ　と　が　き

冒頭にも述べたように，今後更なる機械性能向上のため高応答化，電気式同期制御化などの要求が高まってくることは必須であり，その実現のためには機械・制御系の連成を考慮した機械系固



(a) 複素固有値解析



(b) 周波数応答

図5　複素固有値解析及び閉ループ系の周波数応答　フィードバック信号の検出位置により，安定性が変化する．
Complex eigenvalue analysis and frequency response of closed loop

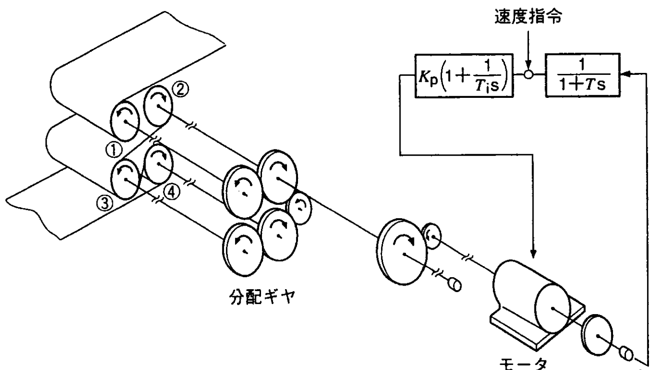
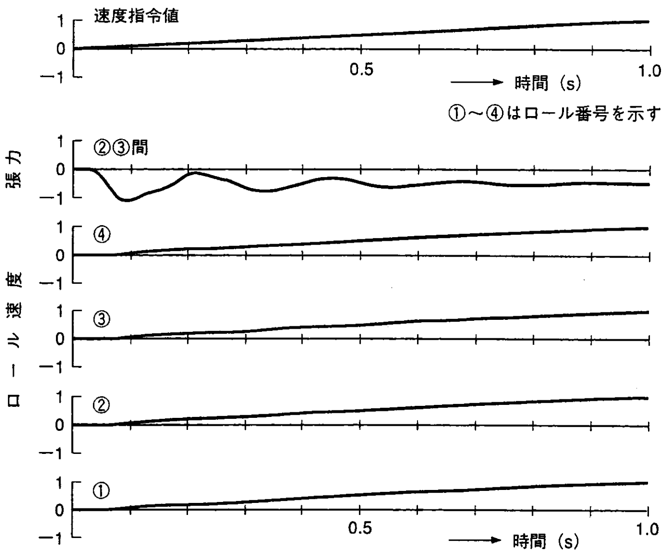
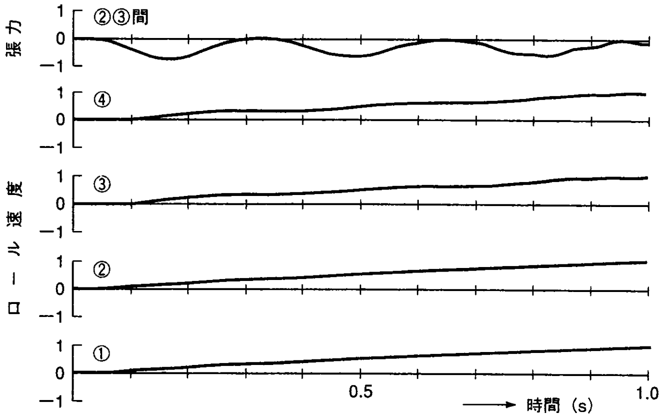


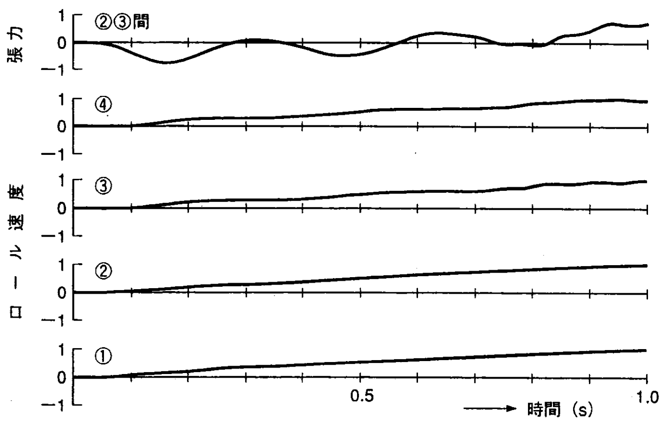
図6　ブライドル系の解析モデル　張力の作用する搬送系の揃速性を解析する．
Analitical model of bridle roll system



(a) 板ばね結合の場合



(b) ブライドル結合（ロール径差なし）



(c) ブライドル結合（ロール径差あり）

図7　ロール揃速性の解析結果　ロール間板結合による1次遅れ効果，ロール径差の影響が評価できる．
Calculation result of strip velocity response

有値特性の設計段階での検討が必要不可欠と考えられる．本システムは，その要求に対応できることを目的に開発を行なったもので，当社ロータダイナミクスCAEシステムの一ルーチンとして位置付けている．

今後の製品開発において適用を推進し，機械の性能，信頼性向上に寄与していく．

参考文献

(1) 片山ほか，制御系を含む回転軸系振動解析システムの開発，三菱重工技報　Vol.26　No.3（1989）
(2) 白石昌武，入門現代制御理論，啓学出版（1987）
(3) Boulter, B. T., A Novel Approrch for On-Line Self-tuning Web Tension Regulation, Proceedings of the 4th IEEE International Conference on Control Applications（1995）