

LMI 制御理論を用いた飛行制御則設計手法の開発

Flight Control Law Design Method Based on Linear Matrix Inequality Theory

名古屋航空宇宙システム製作所 山口 恭弘^{*1} 大野 正博^{*1}
 畑 剛^{*2}
 大阪大学 小原 敦美^{*3}

近年の航空宇宙機の飛行制御システムにおいては、高性能化と設計時間短縮が強く求められている。このような要求を解決する制御則設計理論として、LMI (Linear Matrix Inequality) 理論が注目されており、多数の設計要求を同時に満足し、スケジューリング機能を付加した高次ダイナミクスを有する制御則を、少ない試行錯誤で設計可能な手法として期待されている。本報では、LMI 理論を用いた新しい飛行制御則の設計手法を示し、宇宙往還輸送機の小型自動着陸実験 (ALFLEX) 飛行制御則の試設計を実施した結果を報告する。特に、従来困難であった安定余裕要求を他の設計要求と同様に設計仕様に直接盛り込む手法の開発について報告する。

High performance and low cost are the most important factors in developing flight control systems. Linear Matrix Inequality (LMI) theory is used to design flight control laws that satisfy various control requirements, and scheduled control laws with high-degree dynamics that ensure high control performance under a variety of flight conditions. This report describes new LMI-based flight control law design and a trial design result for a longitudinal flight control law for Automatic Landing Flight Experiment (ALFLEX) for future Japanese space shuttle vehicles. The stability margin of the control system is directly designed and repetition of the design process is reduced.

1. ま え が き

近年の戦闘機や宇宙往還機などの航空宇宙機開発においては、広範囲な飛行条件（速度、高度等）での運用、不安定な機体の安定化などが要求され、飛行制御システムの重要性が高まりつつある。このため、高性能な飛行制御システムを効率よく開発することが重要な要素である。

一方、H_∞制御理論等のアドバンスト制御理論は実製品への適用例も報告されており、その得失が明らかにされつつある。当社においても、平成8年に日本初の自動着陸に成功したALFLEXの飛行制御則設計にH_∞制御理論を適用し、実験の成功に貢献することができたが、設計時には応答性、安定性などの多様な設計要求を満たすための試行錯誤を必要とした。また、設計された高次のダイナミクスを有する制御則は、従来のPID等による制御則に比べて複雑なスケジューリング機能の付加が困難であった。

本報では、複数の設計要求を同時に満足でき、スケジューリング機能を有する制御則を設計可能なLMI (Linear Matrix Inequality) 制御理論の飛行制御則設計手法への適用結果を報告する。

2. 航空宇宙機の飛行制御則に対する要求と課題

航空宇宙機の飛行制御システムとは、機体運動の安定化を図り、速度、高度、風条件等の飛行条件の変化によらずコマンド（目標値）に対する機体運動を最適に保つ機能である。飛行制御則の設計においては、機体の運動方程式を線形化した状態方程式を制御対象モデルとして制御則を設計する。その際に用いる空力データはスケールモデルを用いた風洞試験の結果等に基づくものであり、必ずしも実機と精密に合致しているわけではない。また、制御則設計用のモデルは剛体運動の制御帯域（2～3 Hz 程度）において精度のあるものであり、機体の構造振動モードなどを考慮した高次

のダイナミクスは通常無視される。したがって飛行制御則の性能を劣化させる要因は、制御帯域内で影響を与える風や飛行条件の違いなどの低域外乱と、制御帯域外で影響を与えるセンサノイズや構造振動モードなどの高域外乱と見なすことができる。一方、航空宇宙機の安定余裕に関しては、米国のMILスタンダード等を参考にして設計要求が規定される。さらに、航空宇宙機は飛行条件の変化により、制御対象の特性が大きく変動する。そのため、あらかじめ変動範囲が既知である飛行条件の変化に対しては、計測可能なパラメータ情報等を用いて性能の劣化しない飛行制御則を構築する必要がある。従来は飛行制御則にスケジューリング機能等を持たせ、すべての飛行条件下において所定の性能要求を満足させている。

以上の飛行制御則に対する設計要求は、以下のとおりまとめることができる。

変動する既知の飛行条件下において、与えられた以下の設計仕様をすべて満足すること

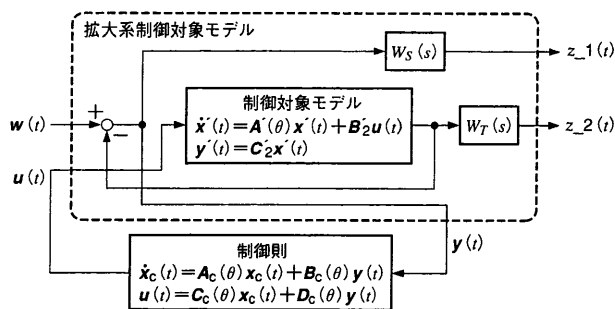
- (1) コマンドに対する機体運動の希望応答特性
- (2) 感度特性（低域外乱に対するロバスト性）
- (3) 相補感度特性（高域外乱に対するロバスト性）
- (4) 安定余裕要求

従来の制御則設計手法では、上記要求のすべてを設計仕様に直接盛り込むことが困難であり、結果的に設計作業の増大を招いていた。例えばH_∞制御理論を用いた設計手法では、(2)、(3)の設計要求はそれぞれの周波数帯域における重み関数として設計仕様に直接盛り込むことが可能であった。しかし、(1)、(4)については設計仕様に盛り込むことが困難であったため、設計者の経験と試行錯誤に依存する部分が大きかった。また、飛行条件の変化に対しても、高次のダイナミクスを有する制御則に複雑なスケジューリング機能を付加することが困難であったため、制御対象の変動により飛行性能が劣化することがあった。

*1 電子技術部宇宙電子設計課

*2 電子技術部宇宙電子設計課長 工博

*3 大学院基礎工学研究科システム科学分野助教授 工博



$z_1(t), z_2(t)$: 通常の混合感度問題における感度, 相補感度出力
 $W_S(s), W_T(s)$: 通常の混合感度問題における感度, 相補感度の重み関数

図1 制御系ブロック線図 本報で提案する制御系の構成を示すブロック線図.
 Block diagram of control system

3. LMI 制御理論の特徴と飛行制御則設計への適用

LMI 制御理論とは, これまでの制御理論と異なり, 解析的に解かれた計算式を用いて制御則を導出するのではなく, 設計仕様を線形行列不等式で記述し, 不等式を数値計算的に解くことにより制御則を得る手法である. さらに, 従来の設計理論の多くを包含する手法であるため, これまで設計に用いてきた手法を踏襲しつつ新たな設計要求を付加して, これまで以上に高性能な制御則を設計することが可能である.

既知の変動要素を含む複数の制御対象モデルに対して, 変動領域のすべてにおいて設計仕様を満たす制御則を導出する場合の線形行列不等式を, LMI 制御理論を用いて記述した⁽¹⁾⁽²⁾.

図1に示す制御系のブロック線図において, 重み関数を含む拡大系制御対象モデルの状態空間表現が式(1)で表現できる場合を考える⁽²⁾.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) \end{aligned} \quad (1)$$

$A(\theta)$ は制御対象モデルの測定可能なスケジューリングパラメータ θ を含む行列である. しかし, 制御則の計算を行う場合は, 参考文献(2)の手法を用いることにより, $A(\theta)$ の変動領域の端点において設計を実施すれば良く, $A(\theta)$ を係数行列 A_k として扱うことができる (添字 k は k 番目の端点に関する行列であることを表す).

設計する制御則の状態空間表現を式(2)で記述する.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c(\theta)x_c(t) + B_c(\theta)y(t) \\ u(t) &= C_c(\theta)x_c(t) + D_c(\theta)y(t) \end{aligned} \quad (2)$$

まず, $A(\theta)$ を係数行列 A_k とした k 番目の端点における制御対象モデルに対して, それぞれ設計仕様を満たす制御則を計算する.

はじめに, 前章の設計仕様(1)~(4)をそれぞれ個別に満足するための線形行列不等式を以下に示す.

3.1 閉ループ系の極配置 [設計仕様(1)に対応]

まず, 閉ループ系の極を配置したい領域を, 式(3)の複素平面上の集合 R として記述する.

$$R = \{z \in \mathbb{C} : L + Mz + M^T \bar{z} < 0\} \quad (3)$$

式(3)を用いることにより, 閉ループ極の減衰比や実部の上限值等を規定することができる⁽¹⁾.

式(3)の領域に閉ループ系の極が存在するための条件は, リアプノフ定理の拡張により, 行列 L, M の (i, j) 要素を示す λ_{ij}, μ_{ij} を用いて線形行列不等式(4), (5)で記述できる. そこで, 市販の制御系設計用ソフトウェア (MATLAB 等) で準備されている数

値計算アルゴリズムを用いて, 式(4), (5)を満たす変数 $P_f, P_g, W_{fk}, W_{gk}, W_{hk}, L_k$ を求める.

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda_{ij} \begin{bmatrix} P_f & I \\ I & P_g \end{bmatrix} \right. \\ & + \mu_{ij} \left[-\frac{A_k P_f + B_2 W_{fk}}{A_k + B_2 W_{hk} C_2 + L_k} \begin{bmatrix} A_k + B_2 W_{hk} C_2 \\ P_g A_k + W_{gk} C_2 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. \left. + \mu_{ji} \left[-\frac{A_k P_f + B_2 W_{fk}}{A_k + B_2 W_{hk} C_2 + L_k} \begin{bmatrix} A_k + B_2 W_{hk} C_2 \\ P_g A_k + W_{gk} C_2 \end{bmatrix} \right]^T \right] \right\}_{1 \leq i, j \leq m} < 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} P_f & I \\ I & P_g \end{bmatrix} > 0 \quad (5)$$

求めた変数 $P_f, P_g, W_{fk}, W_{gk}, W_{hk}, L_k$ を用いて, k 番目の端点における制御則は式(6)で計算できる.

$$\begin{aligned} D_{Ck} &= W_{hk} \\ C_{Ck} &= (W_{fk} - D_{Ck} C_2 P_f) (P_f - P_g^{-1})^{-1} \\ B_{Ck} &= (B_2 W_{hk} - P_g^{-1} W_{gk}) \\ A_{Ck} &= (A_k P_f + B_2 W_{fk} - B_{Ck} C_2 P_f) (P_f - P_g^{-1})^{-1} \\ & \quad + P_g^{-1} (A_k + B_2 W_{hk} C_2 + L_k)^T (P_f - P_g^{-1})^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

3.2 H_∞ 混合感度問題 [設計仕様(2), (3)に対応]

H_∞ 混合感度問題を解くための線形行列不等式は, 有界実条件を用いることにより, 図1で示した重み関数を含む拡大系制御対象モデルに関して式(7), (5)で記述できる. そこで, 前項と同様に MATLAB 等を用いて線形行列不等式(7), (5)を満たす変数 $P_f, P_g, W_{fk}, W_{gk}, W_{hk}, L_k$ を求める.

$$\begin{bmatrix} -(A_k P_f + B_2 W_{fk}) - (A_k P_f + B_2 W_{fk})^T & L_k \\ L_k^T & -(P_g A_k + W_{gk} C_2) - (P_g A_k + W_{gk} C_2)^T \\ (B_1 + B_2 W_{hk} D_{12})^T & (P_g B_1 + W_{gk} D_{12})^T \\ C_1 P_f + D_{12} W_{fk} & C_1 + D_{21} W_{hk} C_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

求めた変数 $P_f, P_g, W_{fk}, W_{gk}, W_{hk}, L_k$ を用いて, k 番目の端点における制御則は前項と同様に式(6)で計算できる.

3.3 安定余裕要求 [設計仕様(4)に対応]

1 入出力系のゲイン余裕要求, 位相余裕要求を満たす制御則を設計するためには, 特殊な重み関数を有する混合感度問題を解けばよく, 安定余裕要求問題は混合感度問題の一種と見なせる⁽²⁾⁽³⁾. 図2に安定余裕要求問題を解くための制御系ブロック線図を示す. 図2に示すとおり図1から新たに安定余裕要求用の出力 $z_3(t)$ を追加した. 図2の出力 $z_3(t)$ に関する H_∞ 問題を解くことにより, 制御系の安定余裕を確保することができる. その場合の $z_3(t)$ に関する係数行列は式(1)において以下のとおり設定する.

$$\begin{aligned} B_1 &= 0 & C_1 &= (\beta - \alpha) C_2, \\ D_{11} &= \alpha I, & D_{12} &= 0, & D_{21} &= I \end{aligned} \quad (8)$$

なお, $z_3(t)$ に関する H_∞ 問題は, 式(9)の混合感度問題を解くことと等価である.

$$\|\alpha S + \beta T\|_\infty < 1 \quad (9)$$

以上より, 設計仕様を個別に満足する制御則を設計する手法について説明した.

次に, (1)~(4)の仕様を同時に満足する制御則を設計する手法について述べる. まず, 式(7)として安定余裕要求用の出力である $z_3(t)$ を含めた図2の制御系に対する線形行列不等式を用いる. その式(7)と式(4), (5)の線形行列不等式を連立させ, MATLAB 等を用いて制御則を計算することにより, (1)~(4)の仕様を同時に満足することができる.

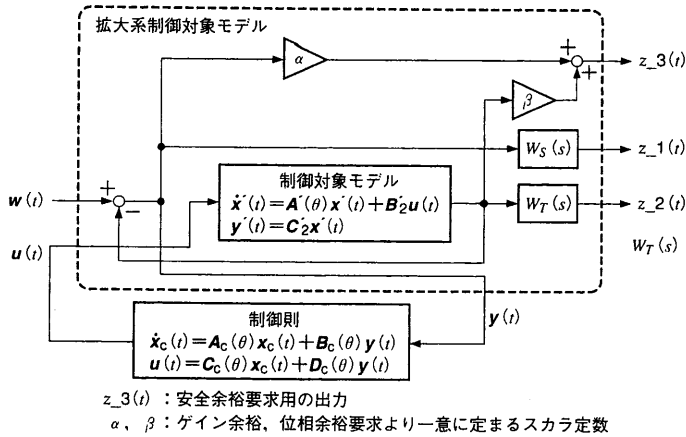


図2 安定余裕要求を含む制御系ブロック線図 図1のブロック線図に、安定余裕要求用の出力 $z_3(t)$ を加えた制御系ブロック線図を示す。
Block diagram of control system including stability margin output

さらに、各端点で個別に制御則を計算した後、式(10)によりすべての変動領域で設計仕様を満足する制御則を実現できる。

$$\begin{bmatrix} A_c(\theta) & B_c(\theta) \\ C_c(\theta) & D_c(\theta) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \begin{bmatrix} A_{ck} & B_{ck} \\ C_{ck} & D_{ck} \end{bmatrix} \quad \sum_{k=1}^p \alpha_k = 1 \quad (10)$$

以上の手順により、すべての変動領域において、すべての設計仕様(1)～(4)を同時に満足する制御則を設計することができる。

4. ALFLEX 縦系制御則の試設計結果

3章で導出した線形行列不等式を用いて、ALFLEX 縦系制御則の試設計を実施した結果を述べる。

ALFLEX とは、現在開発が進められている宇宙往還技術試験機 (HOPE-X) の自動着陸に関する技術課題を解決するための実験機であり、平成8年に豪州において無人自動着陸実験に成功した。図3に実験機の飛行経路の概要図を示す。実験機は母機より分離された後、滑空して滑走路へ自動着陸する。ALFLEX 飛行制御システムの主な機能は、航法、誘導、制御機能から成立っており、そのうち制御機能は、機体姿勢の安定化を図り誘導コマンドに対して機体姿勢を良好に追従させる機能である。

ALFLEX 制御機能は、主に縦系及び横・方向系制御則から構成されており、本報では、縦系制御則の試設計結果を示す。

試設計を実施した縦系制御対象モデルは、式(11)に示すとおり、制御入力エレベータコマンド、制御量がピッチレートの1入出力システムである。観測量としては、ピッチレートと垂直方向加速度が計測可能である。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \delta_{e_act} \end{bmatrix} = A_k \begin{bmatrix} w \\ q \\ \delta_{e_act} \end{bmatrix} + B_2 \delta_{e_com} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} q \\ az \end{bmatrix} = C_2 \begin{bmatrix} w \\ q \\ \delta_{e_act} \end{bmatrix}$$

実験機は、飛行速度 80 m/s から 45 m/s までの飛行条件に応じて飛行特性が変化する。今回の試設計実施に当り、縦系制御則に対する設計要求としては、実際の ALFLEX 飛行制御則設計仕様とほぼ同等に以下の設定とした。

グライドスロープ (速度 80 m/s) から着陸時 (速度 45 m/s) までの飛行条件において、以下の設計仕様をすべて満足すること。

- ① コマンドに対する機体運動の希望応答特性
ピッチレートコマンドのステップ入力に対して整定時間が 1.5 s 以下であること。
- ② 感度特性 (低域外乱に対するロバスト性)
0.1 Hz 以下で低感度であること。
- ③ 相補感度特性 (高域外乱に対するロバスト性)
15 Hz 以上で相補感度ゲインが十分小さいこと。
- ④ 安定余裕要求
ゲイン余裕：6 dB 以上、位相余裕：45° 以上

設計は速度と動圧をスケジューリングパラメータとして選択し、グライドスロープから着陸までの変動範囲を包含する端点として3種類の制御対象モデルを選択のうえ試設計を実施した。制御対象モデルの変動領域と端点の関係を図4に示す。制御対象モデルは、速度と動圧の2次曲線上を変動すると見なすことができるため、2次曲線を包含する図4の斜線部分を変動領域と考え、A、B、Cの端点で囲む領域で制御性能を保証する。式(4)、(5)、(7)に設計仕様の数値を代入し、連立線形行列不等式を各端点で解くことにより、それぞれ5次の制御則を設計した。設計した制御則の各評価ポイントにおけるボード線図を図5に示す。設計した制御則は、速度、動圧をスケジューリングパラメータとして式(12)で記述できる。

$$\dot{x}_c(t) = (A_v v + A_{\bar{q}} \bar{q} + A_0) x_c(t) + (B_v v + B_{\bar{q}} \bar{q} + B_0) \begin{bmatrix} q \\ az \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\delta_{e_com} = (C_v v + C_{\bar{q}} \bar{q} + C_0) x_c(t) + (D_v v + D_{\bar{q}} \bar{q} + D_0) \begin{bmatrix} q \\ az \end{bmatrix}$$

設計した閉ループ系のステップ応答特性を図6に、一巡伝達関数ボード線図を図7に示す。制御系は、評価ポイントとして選択

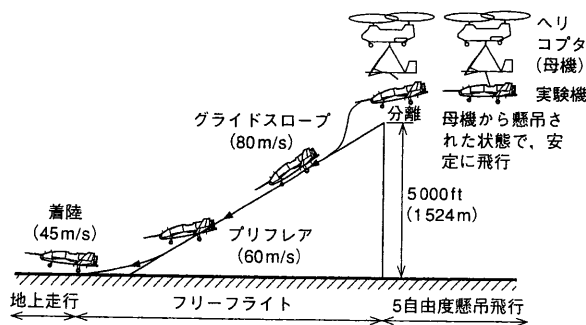


図3 実験機飛行経路図 ALFLEX 実験機の飛行経路と実験概要を示す。
ALFLEX flight path

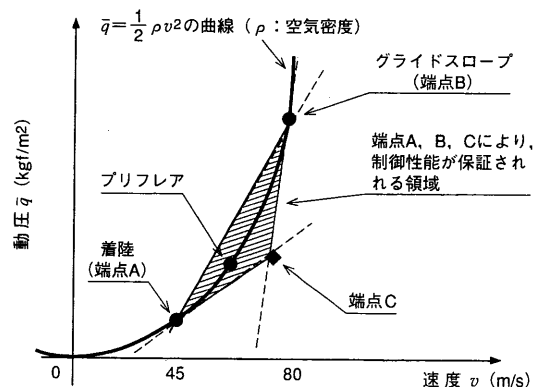


図4 ALFLEX 制御対象モデルの変動領域と端点の関係 飛行条件に応じて制御対象モデルが変動する領域とそれを包含する端点A、B、Cの関係を示す。
Varying region of controlled model and design points

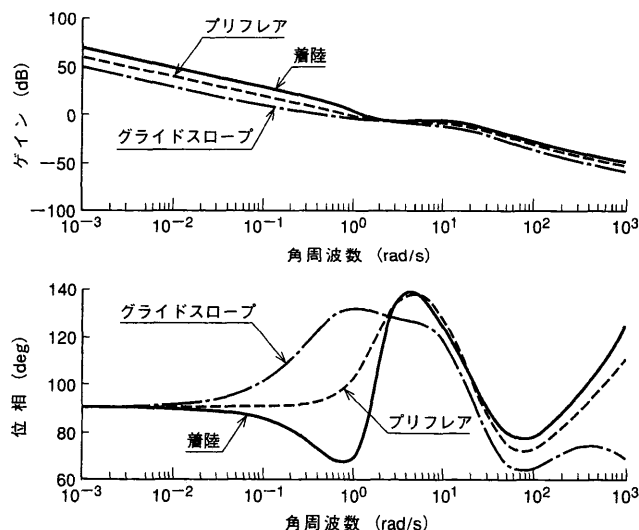


図5 制御則ボード線図 設計した縦系制御則の飛行条件に応じた周波数特性を示す。
Bode plots of designed controller

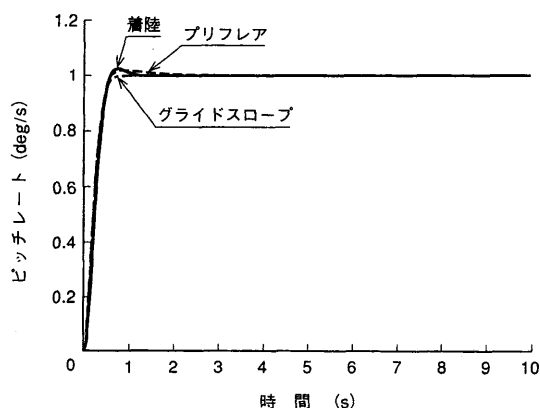


図6 ステップ応答特性 設計した制御系の飛行条件に応じたステップ応答特性を示す。
Step responses of control systems

したグライドスロープ、プリフレア（速度 60 m/s）、着陸時のすべてにおいて設計仕様①、④を満足している。設計仕様②、③を満足することは、一巡伝達関数ボード線図のゲイン特性が、それぞれ 0.1 Hz 以下で十分高いことと 15 Hz 以上で十分低いことから確認できる。また、すべての評価ポイントにおいてほぼ同じ特性を示しており、既知の制御対象モデルの変動に対してほぼ同一の制御性能が得られている。この結果は、設計前に制御対象モデルの変動状況を設計者が解析し、変動要素を補う制御則を設計したわ

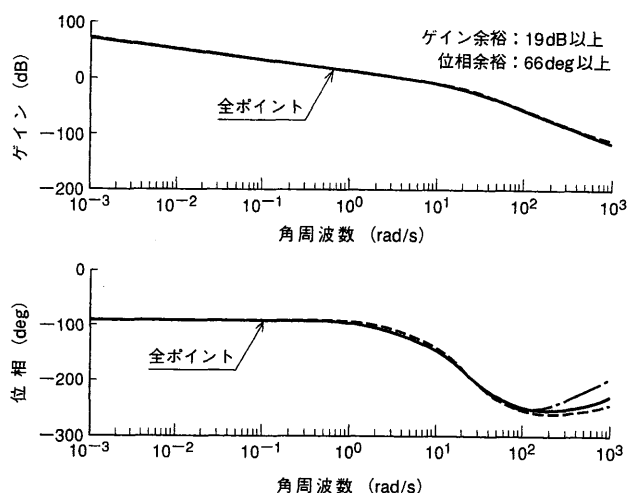


図7 一巡伝達関数ボード線図 設計した制御系の、飛行条件に応じた一巡伝達関数の周波数特性を示す。
Open loop bode plots of control systems

けではなく、変動領域すべてにおいて同一の設計仕様を採用したために、各評価ポイントにおいて同一の特性を有する制御系が導出されたものである。さらに、従来設計仕様として直接盛り込むことが困難であった安定余裕に関しても設計仕様を満足できており、本手法の妥当性を確認できた。

5. まとめ及び今後の課題

LMI 制御理論を用いて、複数の設計要求を同時に満たす制御則を、試行錯誤なしで設計可能な手法を構築した。特に、安定余裕を直接設計可能であることが大きな利点である。本成果は、航空宇宙機の商品価値を高める上で重要な要素技術になると考えられる。

今後は、設計した制御則の離散化手法を確認するとともに、本結果を多入出力系にも適用して、はん用的な飛行制御則設計手法としての確立を目指し、実機への適用を進めていく。

参考文献

- (1) 増淵 泉ほか、LMI条件を満たすコントローラの統一的構成法、計測自動制御学会論文集 Vol.31 No.10 (1995) p.1586
- (2) 井手政和ほか、ゲインスケジューリングを用いた ALFLEX 飛行制御系設計、第 27 回制御理論シンポジウム (1998) p.53
- (3) 穂高一条ほか、安定余裕を指定したコントローラの設計、第 26 回制御理論シンポジウム (1997) p.11

記号説明

θ : 測定可能なスケジューリングパラメータ t : 時間 $A(\theta)$: θ を含む A 行列 k : k 番目の端点 A_k : k 番目の端点に関する A 行列 $x(t)$: 状態変数 $u(t)$: 制御入力 $w(t)$: 外部入力 $y(t)$: 観測量 $z(t)$: 外部出力 $B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$: 係数行列 $x_c(t)$: 制御則の状態変数 $A_c(\theta), B_c(\theta), C_c(\theta), D_c(\theta)$: θ を含む制御則の A, B, C, D 行列 R : 実定数行列 C : 複素平面 $A_{ck}, B_{ck}, C_{ck}, D_{ck}$: k 番目の端点に関する制御則の A, B, C, D 行列	L : 実対称行列 M : 実定数行列 z : 複素数 $*^T$: 転置行列を示す $\bar{*}$: 共役複素数を示す λ_{ij} : 行列 L の (i, j) 要素 μ_{ij} : 行列 M の (i, j) 要素 I : 単位行列 $[*_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$: $\begin{bmatrix} *_{11} & \dots & *_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ *_{m1} & \dots & *_{mm} \end{bmatrix}$ を表す i : 整数 j : 整数 m : 整数 $P_b, P_g, W_{fb}, W_{gk}, W_{hk}, L_k$: 数値計算上の変数	α : ゲイン余裕, 位相余裕の要求値から一意に定まるスカラー定数 β : ゲイン余裕, 位相余裕の要求値から一意に定まるスカラー定数 S : 感度関数 T : 相補感度関数 p : 端点の個数 α_k : スケジューリングパラメータの関数 ≥ 0 w : 垂直方向速度 (m/s) q : ピッチレート (rad/s) δ_{e_act} : エレベータアクチュエータ状態量 (rad) δ_{e_com} : エレベータコマンド (rad) az : 垂直方向加速度 (m/s ²) v : 速度 (m/s) $\bar{q}$: 動圧 (kgf/m ²) $A_v, A_a, A_o, B_v, B_a, B_o, C_v, C_a, C_o$: 係数行列
---	---	--