

早稲田商学第405号  
2005年9月

2004年度学生懸賞論文（学部学生の部）第一席受賞

## 再呼を考慮した情報通信システムの トラヒック特性

高橋 彰良

- 1 はじめに
- 2 モデル化と数値解法
  - 2.1 トラヒック理論概説
  - 2.2 対象モデル
  - 2.3 定式化
  - 2.4 状態方程式の数値解法
  - 2.5 性能評価尺度
  - 2.6 数値例
- 3 シミュレーション
  - 3.1 再呼回数上限の分布によるモデル化
  - 3.2 シミュレーション結果と理論モデルとの比較
- 4 まとめ
- 付録

### 1 はじめに

ネットワークが混雑している時、通信要求を行ってもサービスを受けられないユーザが発生する。電話の例で考えれば、昨今各地で洪水や大地震などの巨

大災害が頻発しているが、このような場合には被災地へ向かっての電話が集中する。あるいは、大規模なコンサートやスポーツイベントが終了した直後などには大勢の人が一斉に電話を掛け始める。こうした場合、通信要求を処理するシステムのキャパシティを大幅に超えるような電話呼が発生しており、さばききれなかった客の要求は無視される。また、負荷が非常に深刻な場合には設備保護の観点から通信会社によって通信規制が敷かれることがある。

こうした混雑現象は勿論電話に限ったことではなく、身近な通信サービスとなったインターネットでもしばしば観察あるいは体験される。サービスサイトへアクセスしたのに、ブラウザは何かを必死で読み込んでいるが画面は真っ白のままで処理が止まったようになる状況を多くの人は経験しているだろう。

近年ではインターネット上で実に様々なサービスが展開されるようになっている。オンラインショッピングはますます広範な領域に進出し、株式の売買や銀行振り込みなどの金融手続き、飛行機やホテルの予約、音楽や動画コンテンツの購入・鑑賞なども盛んに行われている。旧来からあったチャットあるいはメッセンジャーと呼ばれるコミュニケーションサービスはテキストデータのやり取りという枠を超えて音声（ボイスチャット）、さらには音声と動画（ビデオチャット）にまで発展しており、テレビ電話などのサービスがほぼ無料で利用可能である。また、総務省は今後既存の固定電話通信網を IP 化させて、従来の電話を IP 電話へ完全に移行させる方針を打ち出している。PC ベースで機能する IP 電話ソフトは急速に普及しつつあり、研究者間の遠隔会議などにも利用されていると聞く。インターネットを利用したサービスは、今後も行政・福祉・医療・教育・娯楽といった分野を中心にますます盛んになっていくことが予想される。

こうした Web 上のサービスは普通、ユーザ（PC や携帯電話といった端末）とサービス提供者（サーバなど）との間で複数回のやり取りが行われて、初めて 1 回のセッションが完結するものである。例えばオンラインショッピングで

は、ユーザがまず購入対象を指定する。すると業者側からユーザに対して商品・価格の確認や支払い方法の指定依頼がなされる。それを受けたユーザが支払い方法指定などをして、最後に業者の方から購入確認や手続き完了を知らせる通知が届き、ここで売買が完了する。ところが、もしサービスを受けていたり最中に、その業者に過剰なアクセスが集中して途中で通信ができなくなってしまったらどうであろうか。小額の買い物ならば放っておいて後で問い合わせようということにできるかもしれないが、これが高額な銀行の振込みや株取引の途中であつたら処理が正常に完了したのかどうか非常に不安になるだろう。

したがって、Webサービスを含む電子商取引全体が今後さらに発展していくためには、こうしたビジネスの基盤となる情報通信システムの高信頼化が必要不可欠である。通信システムのサービス品質を悪化させる要因のひとつとしてアクセス集中などの混雑が挙げられる。混雑は情報通信の分野では“輻輳”と呼ばれ、顧客であるユーザの行動によって引き起こされるという点で制御が大変困難である。品質を確保するには混雑時に何らかの規制を掛けることが必要となるが、下手に規制を行えばサービス品質を低下させかねないからだ。高品質のサービスを提供するにはこの輻輳を可能な限り回避し、また輻輳に陥った場合の対処法を完備して設計・構築・運用されねばならない。

通信が輻輳状態に陥り情報のやり取りができない状態でも、ユーザの中には1度で通信要求を諦めず、何度も繰り返し試みる人が出てくる。Webサービスの途中で輻輳が発生した場合などは、取引内容が気になるユーザは何度も何度もアクセスを繰り返すことだろう。それが重大な内容であれば特にそうなるだろう。また、2004年11月の新潟県中越大地震では、NTT東日本の発表によれば発生当日の23日に全国から被災地への着信が通常時の45倍に達したが、こうした状況がおよそ6時間近くにわたり続いた。また、新潟県内での発着信も通常時の5倍以上であった。非常に切迫した状況では多くの人がかなり忍耐強く通信要求を繰り返す可能性があることを示唆しているように思われる。

このように、1度通信要求が拒絶された場合にそこで諦めず再度要求を繰り返す行動は電話通信網の研究では再呼と呼ばれ、以前からネットワークの混雑を悪化させている要因として注目されてきた。

再呼を含む通信システムの研究は比較的歴史が深く、1940年代後半にその重要性が指摘されて以来、多くの研究がなされてきた。再呼を含む複数サーバの損失系に関する先駆的研究は、いくつかの性能評価尺度の陽形式解を導いている[2][3][9]。しかしこれらの結果に基づいて、実際に評価尺度を計算することは必ずしも容易ではない。ここで取り上げるものも含めて、再呼を含むシステムは解析が非常に困難であり、その結果は数値計算に適しているとは限らない。多くの著者が近似やトランケーションによる数値解析の手法について研究している[2][6]。

殆どの文献では、一度発呼してからもう再度発呼するまでの時間間隔（再呼間隔）を互いに独立な指數分布に従うと仮定している。しかし、心理面を含め多くの要因が関係するユーザの再呼行動は非常に複雑であり、指數分布に従う必然性はなく、また著者の知るところではそのような研究はなかった。

本研究の主要な目的は、再呼を含む複数サーバの損失系について、性能評価尺度と再呼間隔との間の頑健性（ロバストネス）について考察することである。以下、第2節では、まず再呼間隔が指數分布に従う基本モデルについて簡便な数値計算法を紹介する。ここで得られた結果から、性能評価尺度を導入する。第3節では、再呼間隔が指數分布以外の分布に従うモデルについてシミュレーションを行い、再呼間隔分布を変化させたときに評価尺度がどのような影響を受けるかを比較・考察している。

## 2 モデル化と解析

### 2.1 トランク理論概説

ここで、モデルの解析に用いるトランク理論について、その概略を示す。

とにする。待ち行列理論は、経営数理モデルの代表的な分析理論の一つである。これにより「混雑」や「待ち」という現象が発生するサービスシステムの性能評価を行うことが可能となる。したがって、情報通信サービスのシステムはもとより、生産システムの設計や流通システムの管理・運用などにも用いることが出来る、応用の豊富な理論である。

一般に、客にサービスを行うようなシステムの動作は次のような3つの段階から成る。すなわち、(1)客がシステムに到着する (2)客はサービスを受ける (3)サービスを終了したら、システムから去るである。(2)の段階で、客にサービスを行うものを抽象的にサーバと呼ぶ。例えば、銀行のATMを考えてみれば、お金を引き出そうとする人は、(1)まずATM支店に行き、(2)機械が空いていればそこで引き出しを行い、(3)支店から去る。この場合、サーバはATMの機械ということになる。あるいは、食堂でご飯を食べようとする人は、(1)まずお店に行き、(2)席が空いていればそこに座って食事をし、(3)食べ終わったらお店から去る。ここではサーバは座席（および調理人や給仕など）ということになる。

ATMでの例を挙げたが、平日の昼食時などは大学周辺でもATMの前に長い待ち列が発生していることをよく目ににする。あるいは、食堂に食べに行く例で、もしあ店の席が一杯であったら、とりあえず店には入れないので、諦めて別の店に向かうことがあるだろう。客の到着時にサーバがフル稼働中で空きが無くすぐにサービスを受けられない場合、ATMの例のようにサーバ前で待ち行列が発生するようなタイプのサービスシステムを待時系（delay system）と言う。食堂の例で席が一杯だと客が（空くのを待たず）別の店に行ってしまうように客が待たずに去るタイプを即時系（損失系、loss system）と言う。

さて、あるサーバ（お店の窓口、カウンタ、レジ、回線、Webサーバなど）に客（入店者、パケット、電話呼、タスクなど）の到着があったとする。

一般にサービスを行うためには時間がかかる。これをサービス時間と呼ぶ。サービス時間が余りに長いと今の客のサービス終了前に次の到着客がやってきてしまい、結果として到着客はすぐにサービスを受けられないことになってしまふ。もし対象システムが待ち行列のできるタイプのシステム（待時系）ならば、このとき、客はサーバ前に待ち行列を形成する。もし、客が待たないタイプ（即時系）ならば、この客はサービスを諦めてシステムから去る。このような現象は電話通信サービスでは「呼損」と呼ばれる。待ち行列を作る場合にせよ、呼損になる場合にせよ、こうした現象はユーザにとっては迷惑以外の何者でもない。そこで、どれくらいの確率でユーザは待たなければならぬか、あるいは呼損となってしまうのか、というのがシステムの性能を示す尺度となる。これらはそれぞれ、待ち（合わせ）率や呼損率などと呼ばれる代表的な指標である。トライピック理論は確率的な要素を含むサービスシステムを定量的に評価する方法を与える。

## 2.2 対象モデル

本節では、対象となる通信システムのモデル化や導入する仮定について説明する。具体的なイメージを持つために携帯電話ユーザが無線回線を用いて音声通話を行う状況を考えてみよう。携帯電話で通話を行う場合は概ね次のような手順を踏む。まずユーザがダイヤルをすると携帯電話端末は最寄の基地局と交信して、通話に使用可能な無線回線が存在するかどうかを調べる。もし、回線に空きがあるならば、それを使って通話サービスの準備を開始する（通話相手の探索など）。しかし、ちょうど電話を掛けたときに無線回線が全て使用中であると、通話を行うことは出来ない。その場合、ユーザの中にはすぐに諦めずリダイヤルボタンを押したり、別の相手に掛けてみようとする。こうして再呼が発生することになる。再呼発生は携帯電話端末のボタンを1・2回プッシュするだけで済むため非常に簡単である。よってそれに要する時間はごく短く、

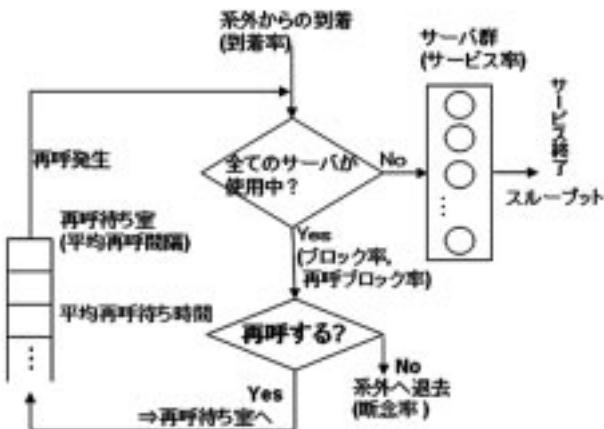


図1 モデル図

そのような短時間で回線に空きが出る可能性は低い。したがって通話に成功する確率も小さい。また、いくらしつこくても無限回再呼することはできないから、何度か掛けてみて一向に繋がらないならば諦めて後で掛けなおすことにするだろう。

これをトラヒック理論に即して抽象化してみよう。上に挙げたモデル図を用いて説明する。電話を掛けようとするユーザは図の上方からシステムに到着する。ここにサーバとあるのは、携帯の例で言えば無線回線に相当する。システムに到來した(=通話要求をした)ユーザはまずサーバ、すなわち使用可能な無線回線があるかどうかを調べる。もし空き回線があれば、それを使って通話をを行う。これがサーバからサービスを受けている状態に当たる。空き回線がない場合、再呼を考慮しないモデル(即時系)であれば、ここでユーザは通話を諦めシステム外へ退去することになる。しかし、本モデルではユーザは1度では諦めず、再度通信要求を行う(=再呼を行う)ことになる。この状況を表現するために再呼待ち室というものを用意する。ユーザは空き回線が無かった場合まず再呼をするかどうかの選択を行う。それがサーバ前の条件分岐部分であ

る。もし再呼しないことを選んだならば、その客は通話を断念し系外へ退去する。再呼することを選択した場合、再呼待ち室へ入る。そして、そこである時間待機した後、再度利用可能なサーバがあるかどうかを調べる（＝再呼の発生）。再呼待ち室での待機時間は、再呼を生起するまでにかかる時間を表している。確かに再呼はリダイヤルボタンをワンプッシュするような非常に短い時間で生起するが、それでも幾ばくかのタイムラグはある。これを再呼間隔と呼ぶ。すなわち再呼待ち室における待ち時間は再呼間隔を表現するものである。

さらに本モデルではつぎのような仮定を導入する。まず、客の到着に関して、システムにやってくる客の総数は無限大で（＝途中で尽きてしまうことはなく）、一人一人の客は全く独立にシステムに到着する。そして、単位時間当たりの平均到着人数は  $\lambda$  人と表せるものとする。すなわち、システムへ到着した累積の客数はパラメータ  $\lambda$  のポアソン分布に従うということである。

次にサーバについてであるが、1台のサーバが1人の客のサービスを終えるのに要する時間をサービス時間と呼ぶ。そして、各サーバのサービス時間は互いに独立で、パラメータ  $\mu$  の指数分布に従うと仮定する。これは、全てのサーバが均質で、全ての客に対して同じぐらいの時間のかかるサービスを提供するということを意味している。あるいは、ある種の客はサービスに長時間をかけ、他の客はさっさとサービスを終えるということがないと解すれば、客の均質性を仮定しているとも言える。

さらに再呼間隔については、客ごとに独立で、パラメータ  $\gamma$  の指数分布に従うと仮定する。すなわち、サーバが満員のためあぶれてしまった客が再呼を選択してから実際に再呼を発生させるまでの時間間隔を  $\gamma$  とし、指数分布に従う確率変数となっているということである。指数分布の平均はパラメータの逆数であったから、客の再呼間隔は平均すれば、 $1/\gamma$  になる。

また、再呼を試みる回数については次のように考える。まず再呼を試みる回数は客ごとに（または同じ人でも状況によって）異なっているのが普通であ

る。そこで、サービス要求時にサーバが満員で入れない場合、再呼をするか諦めるかの選択は各回ごとに独立な確率  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) のベルヌーイ試行であると仮定する。この仮定の下ではこれまで何回再呼をしたかといった過去の履歴は再呼をするか否かの意思決定に一切影響しない。サーバ利用をブロックされた客は常に一定の確率  $\alpha$  で再呼し、 $(1-\alpha)$  で断念する。これにより、ある人がサービス要求を行ったとき、常にサーバが一杯であるという状況では到着時点での最初の要求で駄目だったら諦める (= 再呼 0 回) の確率は  $\alpha$ 、最初駄目で再呼し、それでも駄目だったら諦める (= 再呼 1 回) の確率は  $(1-\alpha)\alpha$ 、到着時と再呼 1 回目とがともに駄目で、もう 1 回再呼して 2 度目で駄目だった諦める (再呼 2 回) の確率は  $(1-\alpha)\alpha^2$ 、…と再呼を繰り返す回数が増すにつれて、その確率は幾何級数的に小さくなっていく。したがってこの仮定は、2 ~ 3 回程度なら繰り返す人も多かろうが 9 回・10 回もリダイヤルするような人はほとんどいないであろうという直観に自然なものである。

また、本研究では再呼待ち室の容量を有限とした。すなわち、再呼待ち室は  $N$  人の客を収容できるが、それが満員の場合たとえ再呼することを選択しても待ち室にすら入れずに系外退去を余儀なくされる客が出ることになる。このようなことは通常は起こりえない。他にリダイヤルを繰り返している人が大勢いるせいで、自分がリダイヤルをしようと思ったのにできなくなるということは、普通はありえない。この有限容量の仮定は解析の都合上導入したものである。しかし、実際の計算では、待ち室に入ろうとした人が拒絶されることがないように待ち室の容量は十分に大きくとることができるので、不都合はない。

### 2.3 定式化

ここでは、上で説明したモデルを数式で表現する。システムの性能評価を行うために、システムが取りうる様々な状態について、その確率を計算できれば望ましい。ここでは、到着・サービス・再呼がともに指數なのでシステムはマ

ルコフ性を持つため，1. 使用中のサーバ数，2. 再呼待ち室に滞在している客数によって決まる。したがって，この 2 つの値を確率変数とする，確率関数を求めるにすることにする。すなわち，システムの状態確率分布を導出する。以下，使用中のサーバ数を，再呼待ち室に居る客数を表す確率変数をそれぞれ  $I, J$  とし， $i$  個のサーバが使用中で  $j$  人の客が再呼待ち室に居る状態を  $(i, j)$  と表し，その確率を  $\pi_{ij} \triangleq \text{Prob}(I=i, J=j)$  と表すことにする。またシステムに存在するサーバ数を  $c$ ，再呼待ち室容量を  $k$  とする。

時間定常のシステムが，微小時間  $\Delta t$  の内にある状態から別の状態に移る確率，すなわち状態遷移確率を考える。状態の変化が起こるのは，客の到着・サービスの終了・再呼の発生のいずれかのイベントが生じるときである。一般にシステムがどんな状態にあるかによって，これらのイベントが発生する確率は異なるてくる。つまり状態に依存して確率が決まってくる。しかし，ここではポアソン到着の仮定により微小時間  $\Delta t$  内で，一人の客が到着する確率はシステムの状態に依らず，常に  $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$  である。また，サービス時間（=サービスにかかる時間）がパラメータ  $\mu$  の指数分布に従うと仮定したので，使用サーバ数が  $i$  個 ( $i \geq 1$ ) の状態では，(再呼待ち室内の人数に依らず) 微小時間  $\Delta t$  内にいずれかひとつのサーバでサービスが終了する確率は  $i\mu \Delta t + o(\Delta t)$  となる。さらに，再呼間隔（=再呼待ち室における滞在時間）がパラメータ  $\gamma$  の指数分布に従うという仮定から再呼待ち室内の滞在客数が  $j$  人のとき ( $j \geq 1$ ) 微小時間  $\Delta t$  内にいずれか一人が再呼を行う確率は  $j\gamma \Delta t + o(\Delta t)$  で与えられる。ただし， $o(x)$  は， $x$  の高位の無限小  $\lim_{x \rightarrow 0} o(x)/x = 0$  を意味する。

これを踏まえれば，可能なすべての状態からの遷移確率は次の表のようにまとめられる。

$c$  個すべてのサーバを使用中の場合，変則的となる。この場合，新たな到着があっても，サーバは一杯なので確率  $\alpha$  で再呼待ち室に入るか，確率  $(1-\alpha)$  でシステム外へ退去するかのいずれかである。また，再呼が生起してもやはり

表 1 状態遷移確率

状態遷移	遷移確率
$(i+1, j)$ $(0 \leq i \leq c-1, 0 \leq j)$ $(i, j)$	$\lambda \Delta t + o(\Delta t)$
$(i+1, j-1)$ $\backslash$ $(0 \leq i \leq c-1, 1 \leq j)$ $(i, j)$	$j\gamma \Delta t + o(\Delta t)$
$(i, j)$ $(1 \leq i \leq c, 0 \leq j)$ $(i-1, j)$	$i\mu \Delta t + o(\Delta t)$
$(c, j)$ $(c, j+1)$ $(0 \leq j)$	$\lambda \alpha \Delta t + o(\Delta t)$
$(c, j-1)$ $(c, j)$ $(1 \leq j)$	$j\gamma(1-\alpha) \Delta t + o(\Delta t)$
$(c, j-1)$ $(c, j)$ $(1 \leq j)$	$j\gamma(1-\alpha) \Delta t + o(\Delta t)$

サーバにはありつけず、確率  $\alpha$  でもう 1 度再呼待ち室に入るか、確率  $(1-\alpha)$  でサービスを断念するかということになる。再呼するか否かの選択は全く独立に行われると仮定しているので、( サーバが一杯の場合 ) 到着があり、かつ再呼しないという事象が起こる確率は到着の確率とサービス断念の確率との単純な積で表される。

この状態遷移の様子を図に表せば、次のようになる。

これらより、平衡状態における状態確率が満たすべき方程式は次のようになる。

$j=0$  ( 待ち室の滞在客数が 0 人 ) の場合

$$\lambda \pi_{0,0} = \mu \pi_{1,0}$$

$$(\lambda + i\mu) \pi_{i,0} = \lambda \pi_{i-1,0} + \gamma \pi_{i-1,1} + (i+1) \mu \pi_{i+1,0} \quad (1 \leq i \leq c-1)$$

$$(\lambda \alpha + c\mu) \pi_{c,0} = \lambda \pi_{c-1,0} + \gamma \pi_{c-1,1} + \gamma(1-\alpha) \pi_{c,1}$$

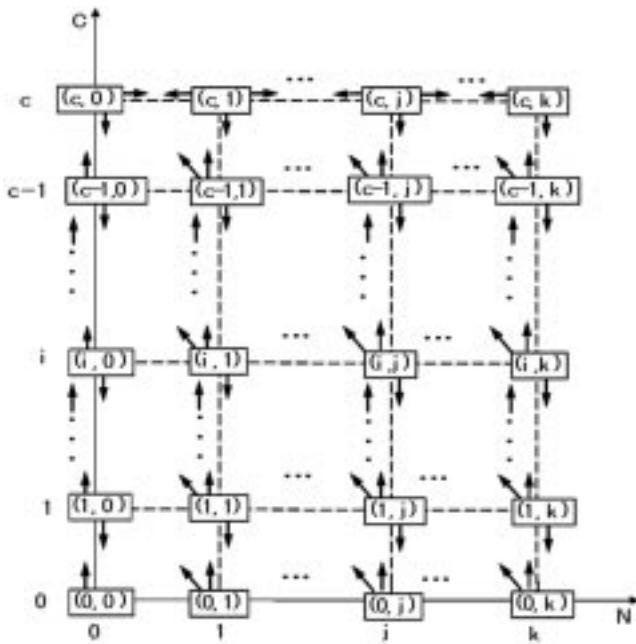


図2 状態遷移図

$1 \leq j$  (待ち室の滞在客数が1以上) の場合

$$(\lambda + j\gamma)\pi_{0,j} = \mu\pi_{1,j}$$

$$(\lambda + i\mu + j\gamma)\pi_{i,j} = \lambda\pi_{i-1,j} + (j+1)\gamma\pi_{i-1,j} + (i+1)\mu\pi_{i+1,j} \quad (1 \leq i \leq c-1)$$

$$(\lambda\alpha + q\mu + j\gamma(1-\alpha))\pi_{c,j}$$

$$= \lambda\pi_{c-1,j} + \gamma\pi_{c-1,j} + \lambda\alpha\pi_{cj-1} + (j+1)\gamma(1-\alpha)\pi_{cj+1}$$

$j = k$  (待ち室の滞在客数が  $k$  人 (= 満員)) の場合

$$(\lambda + k\gamma)\pi_{0,k} = \mu\pi_{1,k}$$

$$(\lambda + i\mu + k\gamma)\pi_{i,k} = \lambda\pi_{i-1,k} + (i+1)\mu\pi_{i+1,k} \quad (1 \leq i \leq c-1)$$

$$(q\mu + k\gamma(1-\alpha))\pi_{c,k} = \lambda\pi_{c-1,k} + \lambda\alpha\pi_{ck-1}$$

## 2.4 状態方程式の数値解法

上で導出した平衡状態方程式を計算機で数値的に解く方法を考える。そのために、もう少し式を整理しよう。まず  $\rho \triangleq \lambda / \mu, \eta \triangleq \gamma / \mu$  とする。また、便宜上  $\pi_{ij} \equiv 0 (i < 0 \text{ or } j < 0)$  と定義することにする。これで、上の 9 つの式は以下のように 5 つの式にまとめられる。

$0 \leq j \leq k-1$  の場合

$$(i + \rho + j\eta)\pi_{ij} = \lambda\pi_{i-1,j} + (j+1)\eta\pi_{i-1,j} + (i+1)\pi_{i+1,j} \quad (1)$$

$$(0 \leq i \leq c-1)$$

$$\begin{aligned} & |c + \rho\alpha + j\eta(1-\alpha)|\pi_{cj} \\ & = \rho\pi_{c-1,j} + (j+1)\eta\pi_{c-1,j} + \rho\alpha\pi_{cj-1} + (j+1)\eta(1-\alpha)\pi_{cj+1} \end{aligned} \quad (2)$$

$j = k$  の場合

$$(\rho + k\eta)\pi_{0,k} = \pi_{1,k} \quad (3)$$

$$(i + \rho + k\eta)\pi_{ik} = \rho\pi_{i-1,k} + (i+1)\pi_{i+1,k} \quad (4)$$

$$(0 \leq i \leq c-1)$$

$$|c + k\eta(1-\alpha)|\pi_{ck} = \rho\pi_{c-1,k} + \rho\alpha\pi_{ck-1} \quad (5)$$

ただし、 $\rho \triangleq \lambda / \mu, \eta \triangleq \gamma / \mu$

また、 $\pi_{ij} \equiv 0 (i < 0 \text{ or } j < 0)$

ここでは、橋田・川島 [14] が別モデルに適用している方法を応用して、これらの方程式を解く。方針としては以下のようになる。

(I) 適当な大きさの待ち室容量  $k$  を取り、 $\pi_{0,k}$  の値を仮定する。

(II) (3)式より  $\pi_{1,k}$  が決まる。

すると(4)式から、 $\pi_{ik} (i = 2, 3, \dots, c)$  が順次定まる。

(III) (1)式で、 $i = 0, 1, \dots, c-1$  とした  $c$  個の方程式の中で未知変数は

$\pi_{c-1,k-1}, \pi_{c-2,k-1}, \dots, \pi_{1,k-1}, \pi_{0,k-1}$  の  $c$  個であるから、これは解くことができる。これにより  $\pi_{c-1,k-1}, \pi_{c-2,k-1}, \dots, \pi_{1,k-1}, \pi_{0,k-1}$  が定まる。さらに、(2)式により  $\pi_{ck-2}$  の値が分かる。

(IV) 以下、同じ手順で(1)式、(2)式を繰り返し用いることで、全ての  $\pi_{ij}$  の値を決めることができる。

最初に仮定した  $\pi_{0,k}$  の値は、確率の正規化条件  $S \triangleq \sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^k \pi_{ij} = 1$  によって定まる。

(V) 最後に  $\sum_{i=0}^c \pi_{ik}$  の和を調べて、これが十分小さな値（例えば  $10^{-10}$ ）より大きければ、待ち室容量  $k$  を増やして、再度 (I) からやり直す。

以下各段階について詳しく説明する。

まず (I) の段階で  $\pi_{0,k}$  値を仮定することについてであるが、これは(1)~(5)式を見てひとつつの値を仮定して他の全ての項を漸化的に導くことができるのが、 $\pi_{0,k}$  だからである。それを用いて、決定できるところまで値を定めていくのが (II) の段階である。

(III) の前に (IV) について、説明する。(1)~(5)式を見れば、いずれも  $\pi_{ij}$  の線形方程式であることが分かる。したがって、 $\pi_{0,k}$  を変数と見れば、任意の  $\pi_{ij}$  は  $\pi_{0,k}$  の一次関数と見なしうる。さらに、 $S \triangleq \sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^k \pi_{ij}$  も  $\pi_{0,k}$  の一次関数と見ることができる。したがって、 $S=1$  を満たす  $\pi_{0,k}$  の値はひとつしかなく、それが求める真の  $\pi_{0,k}$  の値である。 $S$  が  $\pi_{0,k}$  の一次関数であることから、 $S$  の  $\pi_{0,k}$  に関する微分は定数となる。それは、 $\pi_{0,k}=0$  の時の  $S$  の値を、 $\pi_{0,k}=1$  の時の  $S$  の値から引けば求まる。これを  $\Delta S$  とすれば  $\pi_{0,k}=1/\Delta S$  が真の値である。

次に (III) であるが、(1)式で  $i=0, 1, \dots, c-1$  として作った  $c$  個の方程式について、そこに含まれているのは  $\pi_{0,j}, \pi_{1,j}, \dots, \pi_{c,j}$  という  $(c+1)$  個の項および、 $\pi_{0,j+1}, \pi_{1,j+1}, \dots, \pi_{c-1,j+1}$  という  $c$  個の項である。そこで、仮に  $\pi_{0,j+1},$

$\pi_{1,j+1}, \dots, \pi_{c-1,j+1}$  および  $\pi_{cj}$  の値が既知であったとしよう。このとき、これら  $c$  個の方程式に含まれる未知の項は  $\pi_{0,j}, \pi_{1,j}, \dots, \pi_{c-1,j}$  の  $c$  個となり、これは掃き出し法などの連立方程式を解く方法で解を得ることができる。しかし、 $c$  や  $k$  の値が非常に大きい場合小さな計算機では答えを得るのに時間がかかり、効率的とは言えない。そこで、橋田・川島 [14] による漸化式を用いた解法によれば、掃き出し法よりも少ない演算回数で計算を終えることができる。

いま  $\pi_{0,j+1}, \pi_{1,j+1}, \dots, \pi_{c-1,j+1}$  および  $\pi_{cj}$  を既知とする。このとき(1)式の  $c$  個の方程式は

$$\begin{aligned}
 (\rho + j\eta)\pi_{0,j} - \pi_{1,j} &= 0 \\
 -\rho\pi_{0,j} + (1 + \rho + j\eta)\pi_{1,j} - 2\pi_{2,j} &= (j+1)\eta\pi_{0,j+1} \\
 -\rho\pi_{1,j} + (2 + \rho + j\eta)\pi_{2,j} - 3\pi_{3,j} &= (j+1)\eta\pi_{1,j+1} \\
 &\vdots \\
 -\rho\pi_{c-3,j} + (c-2 + \rho + j\eta)\pi_{c-2,j} - (c-1)\pi_{c-1,j} &= (j+1)\eta\pi_{c-3,j+1} \\
 -\rho\pi_{c-2,j} + (c-1 + \rho + j\eta)\pi_{c-1,j} - c\pi_{cj} &= (j+1)\eta\pi_{c-2,j+1}
 \end{aligned}$$

ここで、右辺の項を  $b_0 = 1, b_1 = (j+1)\eta\pi_{0,j+1}, b_2 = (j+1)\eta\pi_{1,j+1}, \dots, b_c = (j+1)\eta\pi_{c-1,j+1}$  および最下部の式について、 $f = \pi_{cj}$  とする。また、 $I_i = i + \rho + j\eta$  とすれば、

$$I_0\pi_{0,j} - \pi_{1,j} = b_0 \quad (\text{II.0})$$

$$-\rho\pi_{0,j} + I_1\pi_{1,j} - 2\pi_{2,j} = b_1 \quad (\text{II.1})$$

$$-\rho\pi_{1,j} + I_2\pi_{2,j} - 3\pi_{3,j} = b_2 \quad (\text{II.2})$$

⋮

$$-\rho\pi_{c-3,j} + I_{c-2}\pi_{c-2,j} - (c-1)\pi_{c-1,j} = b_{c-2} \quad (\text{II.}c\text{-2})$$

$$-\rho\pi_{c-2,j} + I_{c-1}\pi_{c-1,j} - cf = b_{c-1} \quad (\text{II.}c\text{-1})$$

(II.0) を使って (II.1) 式から  $\pi_{0,j}$  を消去すると

$$(I_1 - \rho/I_0)\pi_{1,j} - 2\pi_{2,j} = b_1 + \rho/I_0 b_0 \quad (\text{II.1'})$$

ここで,  $E_0 = I_0$ ,  $F_0 = b_0$ ,  $E_1 = I_1 - \rho / I_0$ ,  $F_1 = b_1 + \rho / I_0 b_0$  とすれば

$$E_0 \pi_{0,j} - \pi_{1,j} = F_0 \quad (\text{II.0''})$$

$$E_1 \pi_{1,j} - 2\pi_{2,j} = F_1 \quad (\text{II.1''})$$

となる。今度は, (II.1'') 式を使って (II.2) 式から  $\pi_{1,j}$  を消去すると

$$(I_2 - 2\rho / E_1) \pi_{2,j} - 3\pi_{3,j} = b_2 + \rho / E_1 F_1 \quad (\text{II.2'})$$

ここで,  $E_2 = I_2 - 2\rho / E_1$ ,  $F_2 = b_2 + \rho / E_1 F_1$  とすれば

$$E_2 \pi_{2,j} - 3\pi_{3,j} = F_2 \quad (\text{II.2''})$$

以下同様にして  $i = c-1$  まで上の要領で, (II.i'') 式を使って (II.i) 式から  $\pi_{ij}$  を消去し,  $E_{i+1} = I_{i+1} - (i+1)\rho / E_i$ ,  $F_{i+1} = b_{i+1} + \rho / E_i F_i$  と置いていけば先の  $c$  個の方程式は以下のようになる。

$$E_0 \pi_{0,j} - \pi_{1,j} = F_0 \quad (\text{II.0''})$$

$$E_1 \pi_{1,j} - 2\pi_{2,j} = F_1 \quad (\text{II.1''})$$

$$E_2 \pi_{2,j} - 3\pi_{3,j} = F_2 \quad (\text{II.2''})$$

⋮

$$E_{c-2} \pi_{c-2,j} - (c-1)\pi_{c-1,j} = F_{c-2} \quad (\text{II.c-2''})$$

$$E_{c-1} \pi_{c-1,j} - cf = F_{c-1} \quad (\text{II.c-1''})$$

したがって, 各  $\pi_{ij}$  ( $i = 0, 1, \dots, c-1$ ) は

$$\pi_{c-1,j} = \frac{F_{c-1} + cf}{E_{c-1}}$$

$$\pi_{ij} = \frac{F_i + (i+1)\pi_{i+1,j}}{E_i} \quad (i = c-2, c-3, \dots, 0)$$

最後に (V) のステップに関して補足する。(IV) までの段階で, 適当な大きさの待ち室容量  $k$  に関して, 厳密な状態確率を求めることができる。しかし計算の結果,  $\sum_{i=0}^c \pi_{ik}$  の値が比較的大きかったら, どうなるだろうか。この和は待ち室容量が満員になる確率を意味する。したがって, この確率が大きいということは再呼するという選択をしたにもかかわらず待ち室が満員だったために系外退去を余儀なくされた客がかなり多かったということになる。この待ち室容量というのは, こうした客が出る確率が極力 0 になるように, 十分大きく取ることが必要であった。そうでなければ, モデルは現実的な適合性を失うことになる。したがって,  $\sum_{i=0}^c \pi_{ik}$  の値が十分小さな閾値 (例えば  $10^{-10}$ ) よりも小さくなるまで待ち室容量  $k$  を増やして計算を繰り返す必要がある。

こうして, 上の (I) ~ (V) により, 望みうる精度で状態確率を計算できる。

## 2.5 性能評価尺度

前節までの方法によって計算した状態確率から求められる, いくつかの性能評価尺度を導入する。

### 時間幅輻輳率 ( $B_T$ )

平衡状態にあるシステムにおいて, 全てのサーバが使用中である確率である。客の到着がポアソン過程に従うシステムでは, 「到着客がすぐにサービスを受けられない確率は, 客が到着する直前の時点において, 全サーバが使用中である確率に等しい」という性質が証明されている。この定理は *PAST A (Poisson Arrivals See Time Averages)* [10] と呼ばれている。したがって, この確率は新規にシステムにやってきた客が, サーバ満員のためすぐにサービスを受けられずサーバ前でブロックされてしまう確率と解釈することもできる。この値が小さいほど当該システムのサービス品質は高いと言える。

$$B_T = \sum_{j=0}^k \pi_{c,j}$$

### ブロック率 ( $B$ )

全サーバが使用中であるために、サービスをブロックされた客はランダムな時間だけ待機してから再呼することができる。幾度か再呼を繰り返した後、再呼をしていた客のうちの何人かはサービス要求を放棄して、系外へ退去するだろう。ここでは、このような事態が起こる確率をブロック率 ( $B$ ) と名づけることにする。これは到着客数に対して、サービスを受けずに系外退去する人数の比率と解釈することもできる。

Little の公式を用いることで、ブロック率 ( $B$ ) は以下のように表すことができる。尚、以下の式は本モデルのようなポアソン到着・指数サービス・指数再呼間隔のモデルに限定されること無く、到着分布・サービス分布・再呼間隔分布が一般分布である場合にも依然として成り立つ。著者の調べた範囲において、再呼間隔が一般の場合についてはほとんど研究がなされていないので、これを定理として掲げておくことにする。

**定理 1** 平均到着人数が  $\lambda$ 、平均サービス時間が  $1/\mu$ 、平均再呼間隔が  $1/\gamma$  であるような一般的な再呼待ち行列システムを考える。全てのサーバが使用中であるためサービスを受けられなかった客は確率  $\alpha$  で再呼し、確率  $(1-\alpha)$  でシステムを去る。このとき、ブロック率 ( $B$ )、すなわち到着客がサービスを受けずにシステムから退去する確率は、以下のように表現される。

$$B = 1 - \frac{1}{\rho} \bar{C}.$$

ここで、 $\rho$  は  $\lambda/\mu$  で定義されるトラヒック密度を、 $\bar{C}$  は平衡状態における平均使用サーバ数を表す。証明については、付録で示した。

### 平均再呼待ち時間 ( $Wq$ )

平均再呼待ち時間  $Wq$  とは、客が到着してから（何回かの再呼の後）サービスを受け始めるか、またはサービスを受けずにシステムを去るまでに要する時間の平均である。上の  $B$  同様に、 $Wq$  もまた Little の公式によって求まり、その関係式は一般の再呼待ち行列システムにおいても成り立つ。

**定理 2** 平均到着人数が  $\lambda$ 、平均サービス時間が  $1/\mu$ 、平均再呼間隔が  $1/\gamma$  であるような一般の再呼待ち行列システムを考える。全てのサーバが使用中であるためサービスを受けられなかった客は確率  $\alpha$  で再呼し、確率  $(1-\alpha)$  でシステムを去る。このとき、平均再呼待ち時間 ( $Wq$ )、すなわち客が到着した時点から、サービスを受け始めるかもしくはサービスを受けずにシステムから退去する時点までの経過時間の平均は、以下のように表現される。

$$Wq = \frac{\bar{K}}{\lambda}$$

ここで、 $\bar{K}$  は平均再呼待ち列長を表す。証明は付録で示すこととする。

## 2.6 数値例

ここではパラメータに具体的な値を設定して、上で導入した性能評価尺度を計算してみる。特に本研究で興味があるのは、再呼の特性がシステムに及ぼす影響である。そこで平均再呼間隔やサーバ利用をブロックされた時に再呼する確率と各種指標との関係を調べた。これによって、再呼現象のどの特性が、どの程度システムに影響を与えるのかを把握することができる。

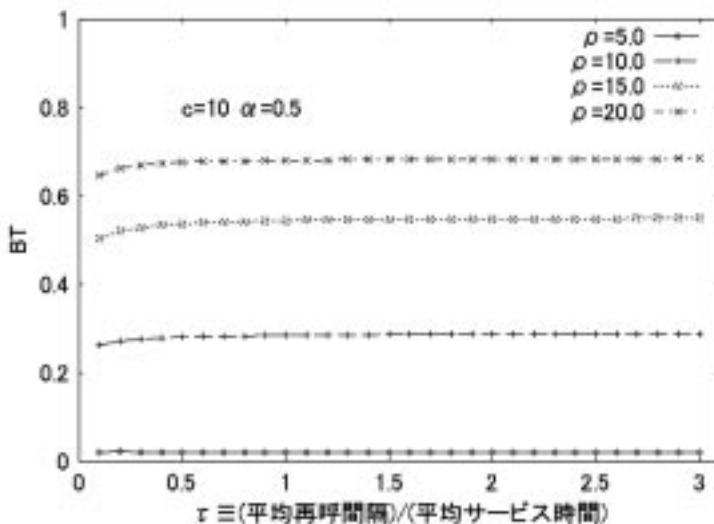
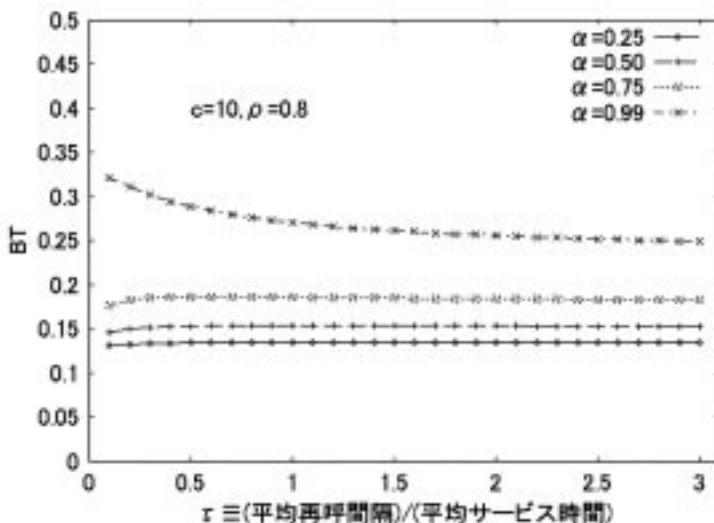
実用上重要なのは絶対値としての平均再呼間隔  $1/\gamma$  ではなく、平均サービス時間  $1/\mu$  に対する比率としての平均再呼間隔  $1/(\gamma \cdot \mu)$  である。そこでこれを改めて  $\tau \triangleq 1/(\gamma \cdot \mu)$  とおいて、以下ではいずれの場合も、この  $\tau$  を 0 から 300 まで 10 刻みで変化させた。これ以降、後の章を通じて単に平均再呼間隔という場

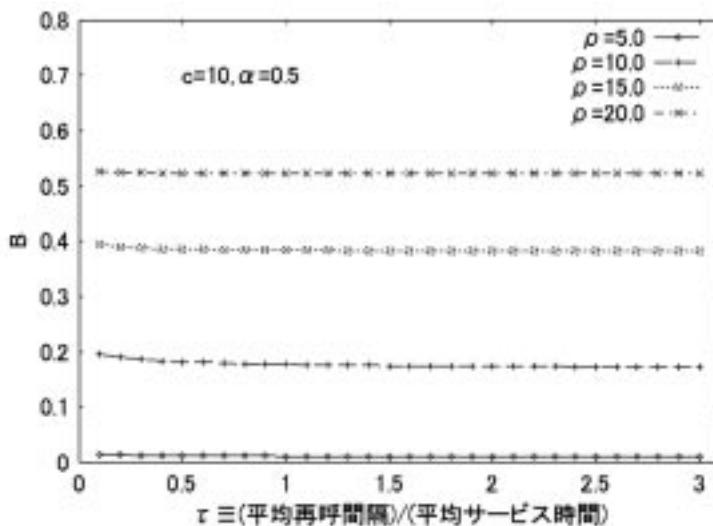
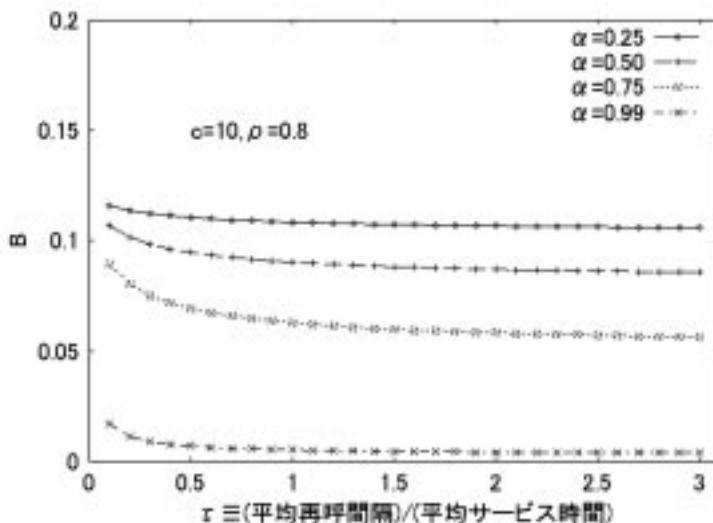
合は、この  $\tau$  を指すものとする。

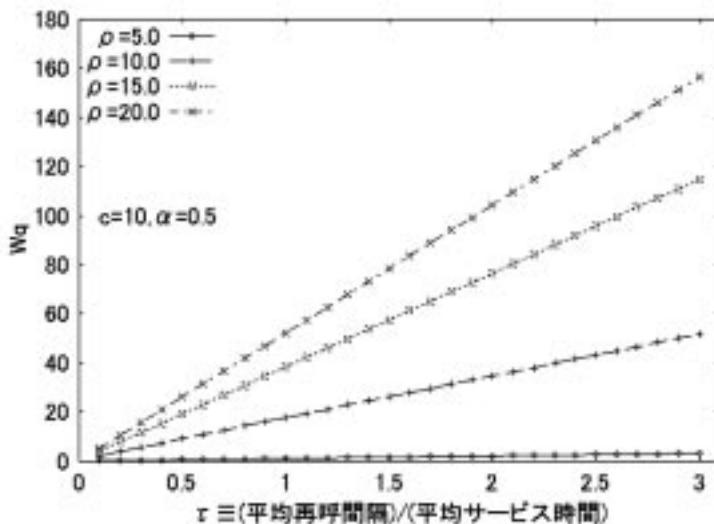
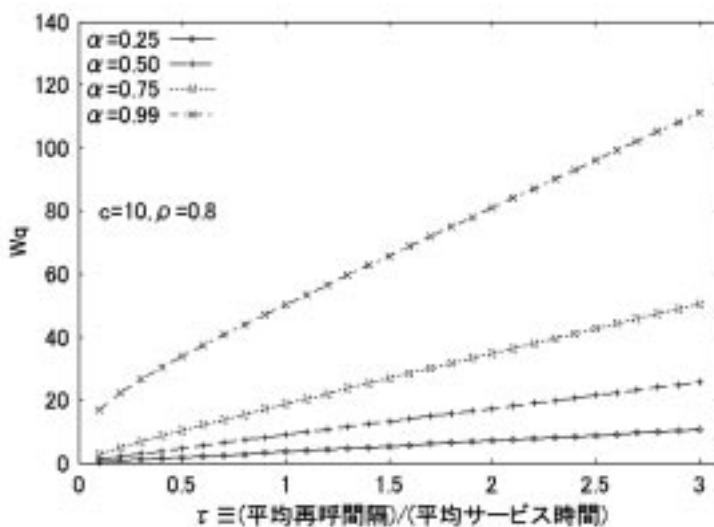
以下のいずれの場合においてもシステム内のサーバ数  $c$  を  $c=10$  とし、前節で導入した性能評価尺度  $B_T, B, Wq$  と平均再呼間隔  $\tau$  との関係を出力した。その際、システムへの負荷を意味するトラヒック密度  $\rho = \lambda/\mu$  あるいは再呼を選択する確率  $\alpha$  の値を何パターンか変化させ、 $B_T, B, Wq$  と  $\tau$  との関係がどんな影響を受けるかを調べた。具体的には、 $\alpha=0.5$  に固定して  $\rho$  を 4.0, 6.0, 8.0, 9.9 とした場合、および  $\rho=8.0$  に固定して  $\alpha$  を 0.25, 0.50, 0.75, 0.99 とした場合を調べた。サーバ数が 10 であるから  $\rho=4.0$  は比較的低負荷、8.0 は比較的高負荷の状況を表していると言える。再呼を選択する確率 ( $\alpha$ ) に関しては、 $\alpha=0.25$  の状態では、到着時サーバが全ていっぱいである時 4 人中およそ 1 人の人が再呼を行い、残り 3 人はサービス要求を放棄するということを意味している。また  $\alpha=0.99$  の場合は、どんな人もほぼ確実に再呼を行うというケースを表している。

図 3・4 は、パラメータ ( $\rho, \alpha$ ) の値を変えた時の時間輻輳率  $B_T$  と平均再呼間隔  $\tau$  との関係を示したものである。両図より、ほとんどの場合において時間輻輳率  $B_T$  は平均再呼間隔  $\tau$  に対しほぼ一定の値を保つということが分かる。また  $\rho$  が大きくなればなるほど、 $\alpha$  が小さくなればなるほど、 $B_T$  は大きな値をとっている。例外的に  $B_T$  が  $\alpha$  に関して大きく変化するのは図 4 の  $\alpha=0.99$  の場合である。また変化の方向からしても、 $\alpha=0.25, 0.50, 0.75$  の場合には平均再呼間隔  $\tau$  が伸びる  $B_T$  がわずかながら上昇するのに対し、 $\alpha=0.99$  の場合だけは逆に減少している。これは、次のように説明できる。 $\alpha < 1$  の場合、再呼間隔が非常に短いと多くの客がサービスを受けずに去るため負荷が低下する。一方  $\alpha=0.99$  では殆どの客がサービスを受けるまで再呼を続けるため、途中で退去することによる負荷の減少がない分、逆に再呼間隔が長い方が再呼待ち室で費やす時間が長くなり、サーバへの負荷が低下するのである。

図 5 は再呼選択確率  $\alpha=0.5$ ・トラヒック密度  $\rho=5.0, 10.0, 15.0, 20.0$  の

図3 様々な  $\rho$  に対する  $\tau$  と  $BT$  の関係 (数値計算結果)図4 様々な  $\alpha$  に対する  $\tau$  と  $BT$  の関係 (数値計算結果)

図5 様々な $\rho$ に対する $\tau$ と $B$ の関係(数値計算結果)図6 様々な $\alpha$ に対する $\tau$ と $B$ の関係(数値計算結果)

図7 様々な $\rho$ に対する $\tau$ と $Wq$ の関係(数値計算結果)図8 様々な $\alpha$ に対する $\tau$ と $Wq$ の関係(数値計算結果)

各場合におけるブロック率 ( $B$ ) と平均再呼間隔 ( $\tau$ ) との関係を、また図 6 は  $\rho = 8.0$ ・再呼選択確率  $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75, 0.99$  の各場合における  $B$  と  $\tau$  との関係を図示している。図 5・6 いずれにおいても  $\tau$  を大きくしていった時ブロック率  $B$  は低下する傾向にあるが、減少幅は 3 % 程にとどまる。

図 7・8 には平均再呼待ち時間 ( $Wq$ ) と平均再呼間隔 ( $\tau$ ) との関係が示されている。パラメータは、図 7 では  $\alpha = 0.50 \cdot \rho = 5.0, 10.0, 15.0, 20.0$ 、図 8 では  $\rho = 8.0 \cdot \alpha = 0.25, 0.50, 0.75, 0.99$  となっている。いずれの場合も  $Wq$  は  $\tau$  に関して単調に増加している。

### 3 シミュレーション

これまでのモデルでは、今まで何回再呼をしたかやどれくらいの時間待たされているかといった過去の履歴はユーザの再呼行動に全く影響を与えないといいういさか強い仮定を採用していた。それは、システムをマルコフ的なものにし解析への道を開くために必要であった。しかし、現実には必ずしも、こうした無記憶性は成り立っていない可能性がある。ユーザの行動は非常に複雑であり、過去の履歴以外にもユーザの置かれている状況や心理状態、通信の相手や場所などによっても大きく影響されるであろう。したがって、非マルコフ型のモデルについても検討する必要があるが、この場合モデルが過度に複雑化し解析を行うのは困難である。そこで、他の条件はそのままにして、再呼間隔が指數分布以外の分布に従うモデルについてシミュレーションを行うプログラムを作成し、いくつかの例について指數分布の結果との比較を行った。

#### 3.1 再呼間隔が指數分布でないモデルについて

前章で解析を行った際に、ユーザが再呼を試みるときパラメータ  $\gamma$  の指數分布に従うランダムな時間だけ待つと仮定した。しかし、この仮定はむしろ解析の都合上導入されたものであり、著者の知る限りでは現実にユーザの再呼間

隔が指数分布に従うということを検証した例は無い。指数分布を仮定した場合、分布の無記憶性により経過時間に関わらず再呼間隔は常に平均  $1/\gamma$  となる。そこでここでは、再呼間隔に指数分布以外の分布を仮定したモデルを考察する。しかし、再呼間隔に指数分布を仮定した場合でさえ複数サーバの待ち行列モデルを解析することは極めて困難であり、陽解は特殊な場合についてしか得られていない。本節ではこれらの非指数再呼間隔モデルについて、シミュレーションを行い、結果として得られた評価尺度を指数分布モデルのそれと比較することにする。

指数分布以外の分布として具体的には、再呼間隔が 1. 単位分布 (= 常に一定,  $D$ ), 2. 2 次元アーラン分布 ( $E_2$ ), 3. 2 次元超指数分布 ( $H_2$ ) に従う場合を考える。さらに 3. 2 次元超指数分布 ( $H_2$ ) については、変動係数の 2 乗  $C_{X^2}$  が 2, 20, 200 となる 3 つのパターンを考える。なお、単位分布, 2 次元アーラン分布、指数分布はそれぞれ  $C_{X^2} = 0, 1/2, 1$  である。いずれの分布についても、平均再呼間隔は指数再呼間隔モデルと等しくなるようにパラメータを調整する。したがって、全てのモデルで再呼間隔の 1 次モーメントは同じ値となり、2 次以上のモーメントで違いが生じる。

再呼モデルに関するその他の仮定については理論解析で扱ったモデルと同じである。すなわち到着客数はパラメータ  $\lambda$  のポアソン分布に従い、全てのサーバは同質で、各サーバが一人の客のサービスに費やす時間はいずれも互いに独立な、パラメータ  $\mu$  の指数分布で与えられる。また、サービス要求時に全サーバ使用中のためすぐにサービスを受けられない場合は確率  $\alpha$  で再呼することを選択し、確率  $(1-\alpha)$  でサービス要求を放棄しシステムを去る。この意思決定は各回とも独立におこなわれるものとする。再呼待ち室の容量が  $N$  で有限 (= 再呼待ち室は  $N$  人の客を収容できるが、それが満員の場合系外退去を余儀なくされる) というのも同じである。但し、シミュレーションでは待ち室に入ろうとした人が拒絶されることがないようにチェックして待ち室容

量  $N$  を十分に大きく設定しているので、不都合はない。

### 3.2 シミュレーション結果と理論モデルとの比較

まずシミュレーションの精度を確認するために、再呼間隔を指数分布としたシミュレーションを行い、その結果を先の理論解析結果と比較する。下の図9は平均再呼間隔  $\tau = 1.0$  の場合（平均再呼間隔が平均サービス時間と等しい場合）のトラヒック密度  $\rho$  と時間輻輳率  $B_T$  との関係をプロットしたものである。2つのグラフの内、曲線で示されているのが理論解析の結果得られたものであり、点列は同じモデルをシミュレーションした結果である。なお以下、本節を通じて、サーバ数  $c$  は10としている。グラフを見れば、両者に殆ど差が無く、シミュレーションが十分な精度を持っていることが分かる。平均再呼間隔  $\tau$  が0.01や100の場合（平均再呼間隔が平均サービス時間の1/100倍や100倍の場合）でも、シミュレーションで得られた  $B_T$  の値は数値計算結果とほぼ一致する。また他の性能評価尺度（ $B$  や  $Wq$ ）に関しても同様の検証を行い、理論値とシミュレーション結果が非常に近いことが確認されている。

シミュレーションの精度が確認されたので、次に再呼間隔分布の比較を行う。再呼間隔分布が単位分布（一定間隔再呼）・2次元アーラン分布・2次元超指数分布である場合の、時間輻輳率  $B_T$ 、ブロック率  $B$ 、ならびに平均再呼待ち時間  $Wq$  をプロットしたのが以下にあげる、図10・11・12である。再呼間隔の平均  $\tau$  は1.0、つまり、平均再呼間隔が平均サービス時間と等しくなるようく設定されている。比較の対象として、指数再呼モデルのシミュレーションの結果も加えてある。いずれのグラフについても、再呼間隔が指数分布の場合の結果と殆ど変わらないことが分かる。平均再呼間隔  $\tau$  を平均サービス時間の1/10倍にしたり、あるいは100倍にして、これら複数のモデルのシミュレーション結果を比較しても同様のグラフが得られる。このことは、 $B_T$ 、 $B$ 、 $Wq$  といった性能評価尺度は、上で仮定した諸条件（ポアソン到着、指数サービ

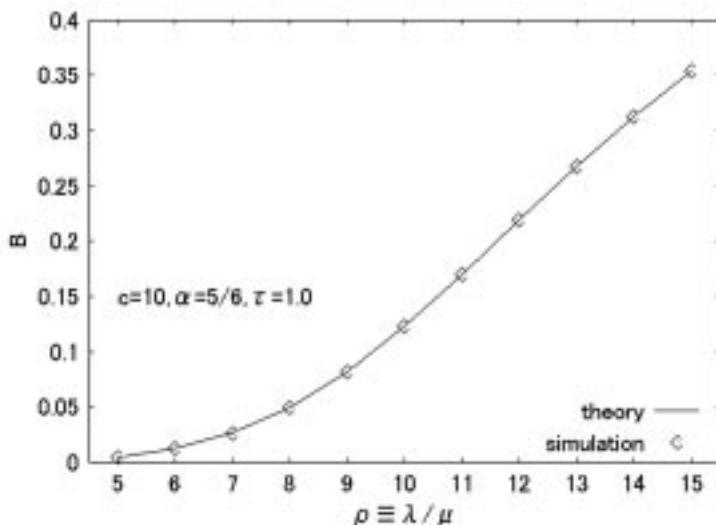
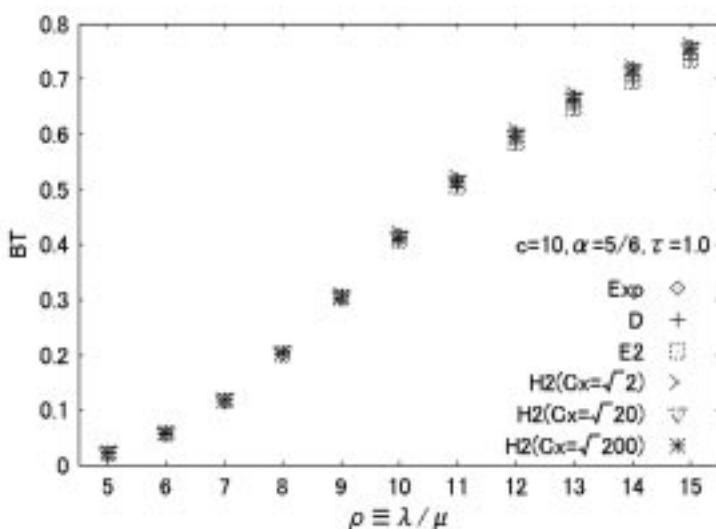
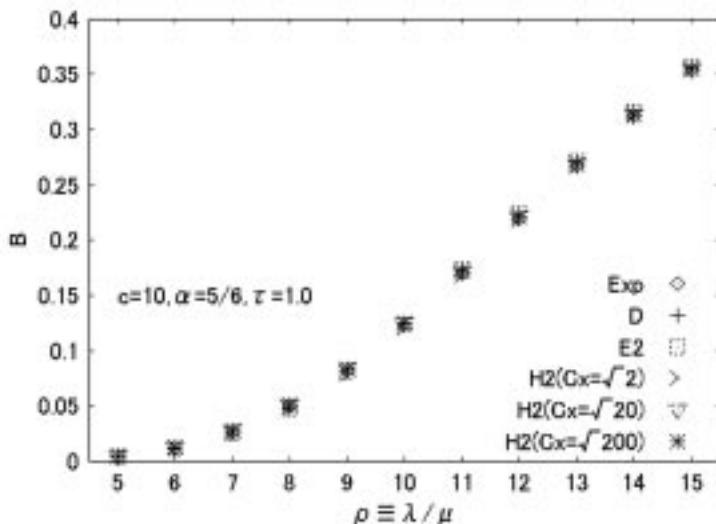
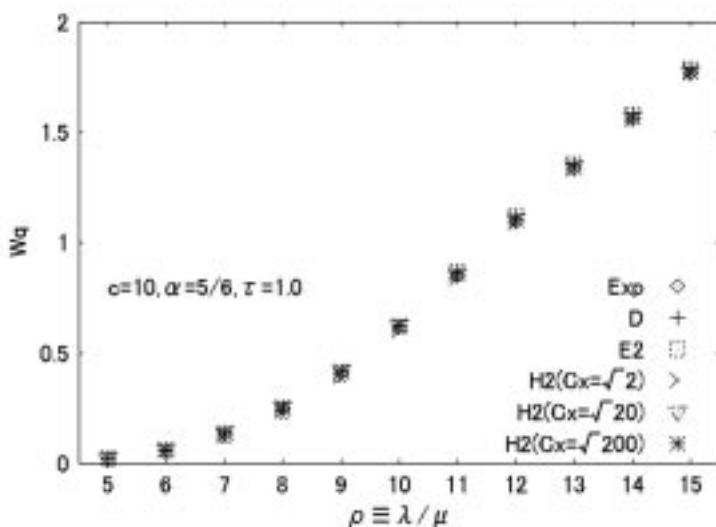


図9 数値計算とシミュレーションの比較

図10 様々な再呼間隔分布における  $\rho$  と  $B_T$  の関係 (シミュレーション結果)

図11 様々な再呼間隔分布における $\rho$ と $B$ の関係（シミュレーション結果）図12 様々な再呼間隔分布における $\rho$ と $Wq$ の関係（シミュレーション結果）

ス，再呼するか否かがベルヌーイ試行となることなど)を満たすモデルにおいては，平均再呼間隔  $\tau$  の値に大きく依存し，再呼間隔の分布自体が及ぼす影響は小さいということを示唆している。

#### 4 まとめ

本研究では再呼を含むモデルとして，ポアソン到着・指数サービスにベルヌーイ試行で近似した再呼行動を取り入れたマルコフ的モデルについて解析を行った。このモデルでは，再呼間隔も指数分布としたので到着・サービス・再呼間隔の全てに無記憶性が成り立ち，それを利用して数値解析の手順を示し，実際にプログラムで計算した数値例を紹介した。ここで扱ったモデルは待ち行列モデルとしてよく知られている  $M/M/c$  モデルの拡張版であり，その意味では再呼モデルとしては最も基本的なものである。しかし，携帯電話会社などの通信事業者でも利用されているように，理論面のみならず応用上も高い価値を持っている。

また，このようなマルコフ性が成り立たないモデルについてはシミュレーションプログラムを構築した。再呼間隔の分布が指数分布以外の分布となる例として，単位分布・2次元アーラン分布・2次元超指数分布を取り上げてシミュレーションを行った。そして，主要な性能評価尺度である，時間輻輳率  $B_T$ ・ブロック率  $B$ ・平均再待ち時間  $Wq$  に関して指数再呼間隔モデルの結果と比較した。それにより，少なくとも調べた範囲では，これらの評価尺度に大きな影響を及ぼすのは再呼間隔の平均であり，分布がもつその他の情報は指数分布で近似しても大きな誤差は生じないのではないかということが推測された。この点に関しては，さらに多くの実験を行い，このような平均のみに依存する性質はどのようなパラメータの範囲で妥当するのかを突き止める必要がある。

数値解析・シミュレーションモデルとともにここで展開された議論は，いずれ

も時間に対して定常なシステムに関するものであった。しかし、機器故障や自然災害などの非常事態には、こうした定常状態から著しく逸脱した状況が発生する。このような事態に対して、ネットワーク環境やサービス品質確保のためトラヒックコントロールが為される。こうした制御をいかに効果的に行うかについて、状態確率分布が初期値と経過時間に依存する過渡状態を想定して解析しなければならない。待ち行列システムとして最も基本的な  $M/M/1$  モデルについては、すでに陽形式の過渡解が得られている [11]。今後はこうした過渡状態での状態方程式（それは時間成分での微分を含む差分方程式となる）の解析も進める必要がある。

あるいは、ここで仮定されたポアソン到着・指数サービスといった性質は必ずしも常に現実に当てはまるものではないだろう。こうした部分について例えば、サービス分布を一般分布にするといった拡張も考えれる。

再呼に関連するこれら興味深い問題が今後の課題として残されている。

### 謝辞

筆者は2004年8月から1ヶ月間、NTT DoCoMoのネットワーク研究所でインターン生として研究させて頂きました。本研究はそこでの経験が土台となっています。トラヒック研究室をはじめとする研究所の皆様、特に研究面は勿論生活面に至るまでいろいろとお世話になった秋永和計様・金田茂様に深く感謝致します。また、筆者に様々な刺激を与えて下さった高橋ゼミの皆様方にも御礼を申し上げます。そして、こうした機会を与えて下さり、また筆者が幾度となく愚問を持ちかけても常に暖かくご指導して下さった高橋敬隆先生に厚く御礼申し上げます。どうも有り難うございました。

## 参考文献

- [ 1 ] Artalejo, J.R., "Accessible Bibliography on Retrial Queues", *Mathematical and Computer Modelling*, vol30, pp. 1-6 (1999)
- [ 2 ] Artalejo, J.R., Pozo, M., "Numerical Calculation of the Stationary Distribution of the Main Multiserver Retrial Queue", *Annals of Operations Research*, vol116, pp. 41-56 (1997)
- [ 3 ] Falin, G.I., Templeton, J.G.C., "Retrial Queues", *Chapman and Hall*, London (1997)
- [ 4 ] Keilson, J., Cozzolino, J., Young, H., "A service system with unfilled request repeated", *Operations Research*, 16, 6, pp. 1126-1137 (1968)
- [ 5 ] Little, J.D.C., "A proof for the queuing formula:  $L = \lambda W$ ", *The Journal of the Operations Research Society of America*, vol9, pp. 383-387 (1961)
- [ 6 ] Stepanov, S.N., "Markov Model with Retrials: The Calculation of Stationary Performance Measures Based on the Concept of Truncation", *Mathematical and Computer Modelling*, vol30, pp. 207-228 (1999)
- [ 7 ] 大沢宗一郎・高橋敬隆, 「Cによる情報通信待時式システムの性能評価法」*2002 PC Conference* 論文集, CIEC7-I, pp. 164-167 (2002)
- [ 8 ] 石川宏, 「Cによるシミュレーションプログラミング」(ソフトバンク, 1994)
- [ 9 ] 宇田川久・三輪栄一, 「ポアソン形の再呼を考慮した即時式完全線群にたいする一考察」電子通信学会論文, 48, 10, pp. 40-49 (1965)
- [ 10 ] 大村弘之・高橋敬隆, 「有限呼源再呼モデルの解析」電子通信学会論文誌 (B) J67-B, No.9, pp. 937-944 (1984)
- [ 11 ] 高橋彰良・高橋敬隆, 「M/M/1 待ち行列システムの過渡解析」*2004 PC Conference* 論文集, CIEC 5-I-2, pp. 160-163 (2004)
- [ 12 ] 高橋敬隆, 「再呼のある状態依存入力トラヒックモデル: 確率解析と情報ネットワークへの応用」早稲田商学第402号 pp. 101-117 (2004)
- [ 13 ] 高橋敬隆・山本尚生・吉野秀明・戸田彰, 「分かりやすい待ち行列システム 理論と実践」(コロナ社, 2003)
- [ 14 ] 橋田温・川島幸之助, 「再呼のあるバッファメモリのトラヒック特性」電子通信学会論文誌 (B), J62-B, No.3, pp. 222-228 (1979)
- [ 15 ] 渡辺達也・高橋敬隆, 「Cによる情報通信即時式システムの性能評価法」*2002 PC Conference* 論文集, CIEC 7-H, pp. 160-163 (2002)

## 付録

## 付録1

## 命題1の証明

$c$ 個のサーバのみからなる部分システムを考える。ここに Little の公式 [ $L = \lambda W$ ] [ 5 ] を適用する。 $\lambda'$ ,  $\bar{C}$  をそれぞれ部分システムへのスループット, 平均使用サーバ数とすれば, Little の公式から

$$\bar{C} = \lambda' \frac{1}{\mu} \quad (A.1)$$

ここで,  $\bar{C}$  は公式の  $L$  に,  $\lambda'$  は  $\lambda$  に,  $1/\mu$  は  $W$  に対応している。

ブロック率  $B$  は到着客が最終的にサービスを受けずに退去する確率であったから, 平均して  $\lambda$  人の客が到着する場合サービスを受けずに退去する客数の平均は  $\lambda B$  で与えられ, サービスを受けた平均客数は  $\lambda(1-B) = \lambda'$  となる。

したがって, (A.1) 式より,

$$B=1-\frac{1}{\rho} \bar{C}.$$

## 付録 2

命題 2 の証明無限容量の再待ち室のみからなる部分システムを考える。ここに Little の公式  $[L=\lambda W]$  [ 5 ] を適用する。 $S, \bar{C}$  をそれぞれ平均再呼回数（単位時間当たりに平均して発生する再呼の回数）、平均再待ち人数とする。単位時間当たり平均して  $\lambda$  人の人がシステムに到着するすれば、一人ひとりは平均して  $S$  回だけ、再待ち室を通過する。したがって、単位時間当たりに再待ち室へ向かう人数は平均すれば、 $S\lambda$  となる。Little の公式から

$$\bar{K}=S\lambda \frac{1}{\mu} \quad (A.2)$$

ここで、 $\bar{K}$  は公式の  $L$  に、 $S\lambda$  は  $\lambda$  に、 $1/\mu$  は  $W$  にそれぞれ対応する。

(A.2) 式より、

$$S=\frac{\bar{K}\gamma}{\lambda} \quad (A.3)$$

を得る。ここで、1 回の再待ち室の滞在時間は、平均すれば  $1/\gamma$  であるから、客 1 人あたり平均して  $S$  回再呼をするならば、平均再待ち時間  $Wq$  は

$$Wq=S \frac{1}{\gamma} \quad (A.4)$$

(A.4) 式に (A.3) 式を代入して、

$$Wq=\frac{\bar{K}}{\lambda}.$$