

拒否権者を伴う重み付き多数決ゲームにおける Shapley-Shubik 指数の計算とその応用： 黄金株導入がもたらす株主の権利配分への影 響について

市 川 実 上 條 裕 平

目 次

序論	84
1 重み付き多数決ゲームと SS 指数の定義	87
1.1 重み付き多数決ゲーム	87
1.2 Shapley-Shubik 指数	88
2 Shapley-Shubik 指数の計算アルゴリズム：拒否権者が存在する場合	90
2.1 数学的準備	90
2.2 アルゴリズム	94
3 シミュレーション	97
3.1 基本設定	97
3.2 方法	98
3.3 結果とその考察	99
結語	105
参考文献	107

序論

投票は多くの社会で集合的意志決定を行うに際して用いられる最も基本的な手段である。たとえば、議会においては提出された議案に対する可否が議員の投票によって決定される。

投票による決定には様々な方式がある。過半数の賛成を必要とする方式、 $2/3$ 以上の賛成を必要とする方式、一部の投票者に拒否権を与える方式などである。また、株主総会における株主のように各投票者に付与される投票権が株式所有数に比例するため、投票者ごとに投票しうる票数が異なる場合もある⁽¹⁾。

このように様々な投票方式がわれわれの社会では用いられているが、それぞれの投票方式における各投票者の影響力をどのように評価したらよいのだろうか。投票力指数 (voting power indices) はこの疑問に対する 1 つの答えを提示する。投票力指数とは、投票者たちが何らかの協力関係を結んで議案を通す力を形成しうるかという観点から、それぞれの投票者が持つ影響力の強さを数値として表したものである。代表的な投票力指数としては、Shapley-Shubik 指数 (Shapley and Shubik[1954]: 以下では「SS 指数」と呼ぶ)、Banzhaf 指数 (Banzhaf[1965])、Deegan-Packel 指数 (Deegan and Packel[1978]) などがある。投票力指数は様々な投票システムにおける投票者の影響力を評価するためだけに利用されるわけではなく、近年では TOB のある局面における株価の水準を説明するためなど、金融研究の分野などでも応用されるようになってきている。たとえば Zingales[1995] は Control Premium⁽²⁾ の構成要素の 1 つとして Voting Premium を挙げ、Voting Premium の計測に際して

(1) 1 つ 1 つの政党をあたかも 1 人ずつの投票者であるかのようにみなせば、議会においても各投票者の持つ投票権が異なっていると解釈することができる。

(2) Control Premium とは、TOB の際に支配権獲得のため市場価格に上乗せされる部分 (premium) のことである。

Shapley-Shubik 指数に基づく説明変数を用いた研究を行っている。

ところで、日本では 2005 年に成立し 2006 年から施行された会社法でいわゆる「黄金株 (golden share)」の発行が可能となった。黄金株とは、一言で言えば拒否権付株式のことであり、欧米のいくつかの国では一定の条件の下での発行が以前から認められていたものである。昨今、日本においても敵対的 M & A がもはや他人事では無くなってきていることなどにより、買収防衛策の一つとして注目されるようになってきている。

実際に黄金株を導入するとどうなるのだろうか。たとえばある会社 A に敵対的買収をしかけようとする会社 B があったとする。B 社が TOB によって経営権を取得できるだけの株式⁽³⁾を取得し、株主総会で自分達に有利な取締役の人選をしたとしよう。しかし A 社に味方する者が黄金株を保有していれば、拒否権を発動することでその人事提案を廃案にすることが出来るのである⁽⁴⁾。しかも、黄金株には譲渡制限を付与することができるため、黄金株自体が買収されてしまうことも防ぐことが出来る⁽⁵⁾。

このように黄金株は敵対的買収に対する防衛策として多大な有効性を持つ可能性が高いので、その導入に期待する人々は少なくない。しかしその一方で、黄金株の発行は企業統治のありようや株主の諸権利に対して多大な影響を及ぼす可能性もあるので、その導入に慎重姿勢を取る人々も多い。

実際、黄金株に対して東京証券取引所は当初次のような見解を示していた。「一般投資家の利益を損ないかねないとして、黄金株を原則禁止とし、上場

(3) ここでは、取締役の選任を通じて会社の経営を決定することが出来るに十分な議決権の取得を想定している。

(4) 会社法第 108 条第一項並びに同条同項の 8 は、「株主総会で決議すべき事項に、通常の株主総会の他に種類株式を持つ株主のみで行う種類株主総会での決議を必要とするものを認める」という条件を付与した「種類株式」の発行を認めている。この条件を持つ種類株主の持ち主が、通常の株主総会で可決された案を否決することで廃案に持ち込むことが、拒否権が具体的に発動される仕組みである。

(5) 会社法第 108 条第一項の 4 は、種類株式に「譲渡による当該種類の株式の取得について当該株式会社の承認を要する」ことを認めている。

企業が導入した場合には上場廃止，黄金株を発行している企業の新規上場を認めない」⁽⁶⁾

その後同取引所は，上記の見解を撤回して黄金株導入企業の上場を認めることになった。しかし，拒否権が既存株主の権利を侵害する等の否定的な影響力をもたらす可能性があるがゆえに，同取引所は黄金株導入に際して 3 つの条件⁽⁷⁾を課し，野放図な黄金株の導入は認めないという姿勢を示した。

以上述べたように，黄金株導入に対しては賛否両論があるので，私たちはその導入が既存株主の権利の配分にどのような影響を与えるのかについて研究することには，多大な意義があるものと感じて，この研究を開始した。

より具体的には，黄金株の導入によって株主の権利がどのように歪められる可能性があるのかを，代表的な投票力指数である SS 指数の分布の変化によって測定することができないだろうか，というのが私たちの基本的な問題意識である。

ところで，SS 指数をはじめとする投票力指数は計算に際して非常に多数のステップを必要とするので，適切なアルゴリズムの利用が不可避である。そこで，本研究においても，拒否権付投票ゲームにおける投票力指数を計算するアルゴリズムをまず作成し，そのアルゴリズムを用いて，株主の構成についてのいくつかの代表的な分布に関してシミュレーションを行い，拒否権が付与される前と付与された後の投票権配分がどのように変わるのかを調べた。このようなシミュレーションに基づいて，株主の権利配分の変化に対する何らかの法則を見出そうとすることが本研究の基本的な目的である。

本論文の構成は以下の通りである。第 1 章では，重み付き多数決ゲームと，その特別なクラスである拒否権者が伴う重み付き多数決ゲームを定義する。また，SS 指数を導入し第 2 章で用いる SS 指数の重要な性質について述べる。

(6) 日本経済新聞 2005 年 11 月 19 日

(7) それは①黄金株の有効期限を限定しなければならない，②株主総会が決議すれば無効にできる，③取締役会が決議すれば無効にできる，という 3 条件である。

第2章では、Lucas[1983]のアルゴリズムをベースにして、拒否権者が存在する重み付き多数決ゲームにおけるSS指数を求めるアルゴリズムを提案する。第3章では、アルゴリズムを元に作成したプログラムを用いて株主の権利配分に関するシミュレーションを行い、黄金株導入の影響を明らかにする。

1. 重み付き多数決ゲームとSS指数の定義

1.1 重み付き多数決ゲーム

一般に各投票者を $1, 2, \dots, n$ とし、投票者の集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。 N の任意の部分集合を提携 (coalition) という。集合 N 自身も提携であり、全体提携 (grand coalition) という。便宜的に空集合 \emptyset も提携の1つと考える。集合 N のべき集合 (power set) を $P(N)$ で表すことにする。また、本稿では集合 A の要素の数を $|A|$ で表す。

各投票者が1票以上の票を持ち、その多数決によって決定が行われるものを重み付き多数決ゲーム (weighted majority game) という。以下では、重み付き多数決ゲームのような勝敗を競うゲームにおいて、勝者が形成する提携を勝利提携と呼び、一般に勝利提携の族を \mathcal{W} で表すことにしよう。

定義 1 投票者 i のもつ票数を w_i とし、 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ を重みベクトルとする。投票に勝利するために必要な票数 (quota) を q とする。このとき、 n 人重み付き多数決ゲームを $G = [q, (w_1, w_2, \dots, w_n)]$ で表す。あるいは重みベクトルを用いて、単に $G = [q, \mathbf{w}]_n$ で表す。

重み付き多数決ゲーム G において最も基本的なゲームは、勝利提携の族が

$$\mathcal{W} = \left\{ S \in P(N) \left| \sum_{i \in S} w_i \geq q \right. \right\} \quad (1)$$

という形をしたものである。以下では、簡単化のために q と w_1, w_2, \dots, w_n を正整数とする。

定義 2 投票者の集合が $N = \{1, 2, \dots, n\}$ で与えられる重み付き多数決ゲー

μ の族を $\Gamma(N)$ で表す.

相異なる 2 つの重み付き多数決ゲーム $G, G' \in \Gamma(N)$ において, $\mathcal{W}(G) = \mathcal{W}(G')$ が成り立つならば, どのような提携が投票に勝利するかという観点からは, 2 つのゲームは同等である.

定義 3 $S \in P(N)$ を任意の提携とするととき, $G = [q, \mathbf{w}]_n$ に対して, G の S への制限 $G|_S$ を, $G|_S = [q, (w_i \mid i \in S)]_{|S|}$ と定める. 特に, $S = \{1, 2, \dots, n-1\}$ のとき, $G|_{n-1}$ あるいは $G = [q, \mathbf{w}]_{n-1}$ と書く.

次に, 拒否権者を伴う重み付き多数決ゲームを定義するために, 拒否権者と独裁者の概念を準備する.

定義 4 ある投票者 $i_0 \in N$ が拒否権を持つとは, $i_0 \notin S$ なる提携 S は勝利提携でないときをいう.

定義 5 ある投票者 i_0 が独裁者であるとは, $i_0 \in S$ なる任意の提携 S が勝利提携であることをいう.

以上の準備の下で, n 人重み付き多数決ゲーム G を拡張して, 拒否権者を伴う重み付き多数決ゲームを定義しよう.

定義 6 $G = [q, \mathbf{w}]_n$ に対して, G から誘導される投票者 i_0 が拒否権者である重み付き多数決ゲームとは,

$$\mathcal{W} = \left\{ S \in P(N) \mid \sum_{i \in S} w_i \geq q \text{ かつ } i_0 \in S \right\}$$

となるようなゲームである. このゲームを $\tilde{G}(i_0)$ で表す.

1.2 Shapley-Shubik 指数

Shapley によって定義されかつ公理化された協力ゲームの解概念に Shapley 値がある (Shapley[1953]). SS 指数は, Shapley 値を投票者が持つパワーの評価に適用したものである (Shapley and Shubik[1954]).

投票者の集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ の順列は $n!$ 個存在し, 1 から n までの合

計 $n!$ 個の順列の集合を π_n とする．すべての順列が等確率で生じると仮定する⁽⁸⁾．このとき，初めは空集合である提携に，1 人ずつ投票者が加わって提携を形成していくことを考える．

定義 7 投票者のある順列 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \pi_n$ に対して，提携 $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}\}$ が敗北提携で，提携 $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i\}$ が勝利提携であるとき，投票者 σ_i は順列 σ におけるピヴォットであるという．

例 1 $G = [7, (6, 4, 3)]$

考えられる順列は $3! = 6$ 通りである．たとえば，投票者 1 は順列 $(2, 1, 3)$ におけるピヴォットである．なぜなら，提携 $\{2\}$ が敗北提携で提携 $\{2, 1\}$ が勝利提携であるからである．

投票者 i がピヴォットとなる提携の族は，

$$S_i = \left\{ S \in P(N) \mid i \notin S \text{ かつ } q - w_i \leq \sum_{j \in S} w_j < q \right\} \quad (2)$$

と表せる．

定義 8

重み付き多数決ゲーム G における投票者 i の SS 指数を，

$$\varphi_i(G) = \sum_{S \in S_i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

と定め， $\varphi(G) = (\varphi_1(G), \varphi_2(G), \dots, \varphi_n(G))$ を単にゲーム G の SS 指数という．ただし， $s = |S|$ であり， $\varphi(G)$ を単に $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ と書く．

提携 $S \in S_i$ に含まれる s 人の投票者の順列の個数は $s!$ であり， i を除く残りの $(n-s-1)$ 人の投票者の順列の個数は $(n-s-1)!$ 個であるから，提携 $S \in S_i$ に対して投票者 i がピヴォットとなる順列の個数は $s!(n-s-1)!$ 個である．すなわち，投票者 i がピヴォットとなる順列の個数を起こり得る順列

(8) つまり，各順列が生じる確率は $1/n!$ であると仮定する．

の個数 $n!$ で割ったものが投票者 i の SS 指数である．ゆえに，投票者 i の SS 指数は，投票者 i がピヴォットになる確率を表していると言うことができる．

ここで，今後用いる SS 指数の重要な性質を述べておこう．それは投票者全員の SS 指数の和が 1 というものである．すなわち，任意の $G \in \Gamma(N)$ に対して，

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(G) = 1 \quad (4)$$

が成り立つ．なぜなら， $q > 0$ と任意の $i \in N$ に対して $w_i > 0$ であるため，任意の順列 $\sigma \in \pi_n$ に対して，ピヴォットとなる投票者がただ 1 人存在するからである．この性質は第 2 章で拒否権者の SS 指数を求めるときに用いるので注意されたい．なお，SS 指数についての公理的特徴付けについては，Dubey[1975] や小野・武藤 [1998, pp.37-45] を参照せよ．

2. Shapley-Shubik 指数の計算アルゴリズム：拒否権者が存在する場合

2.1 数学的準備

一般性を失うことなく，第 n 投票者が拒否権者である n 人重みつき多数決ゲーム $\tilde{G}(n)$ を考えることにし， $\tilde{G}(n)$ を単に \tilde{G} と書くことにしよう⁽⁹⁾．

\tilde{G} の SS 指数 $\varphi(\tilde{G})$ と，元のゲーム G における SS 指数 $\varphi(G)$ の差を計量する n 次元実ベクトル $\tau(G, \tilde{G})$ を考える．すると， $\tau(G, \tilde{G}) \in \mathbb{R}^n$ の第 i 成分は，

$$\tau_i(G, \tilde{G}) = \varphi_i(G) - \varphi_i(\tilde{G}) \quad (5)$$

と書くことができる．前章で注意した式 (4) から，

$$\sum_{i \in N} \tau_i(G, \tilde{G}) = \sum_{i \in N} \varphi_i(G) - \sum_{i \in N} \varphi_i(\tilde{G}) = 0 \quad (6)$$

(9) $i \neq n$ なる投票者が拒否権者であったとしても，各投票者の重み w_1, w_2, \dots, w_n を並び替えることで，投票者 n が拒否権者になるようにゲーム G を再定義すればよい．

である．よって，

$$\tau_n(G, \tilde{G}) = - \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i(G, \tilde{G}) \quad (7)$$

が成り立つ．

拒否権者が存在しない $(n-1)$ 人重みつき多数決ゲーム $G|_{n-1}$ において，プレイヤー i がピヴォットとなる提携の族は，

$$\mathbf{T}_i = \left\{ T \subset \{1, 2, \dots, n-1\} \mid i \notin T \text{ かつ } q - w_i \leq \sum_{j \in T} w_j < q \right\} \quad (8)$$

と表せる．

以上の準備の下で，次の命題を示す⁽¹⁰⁾．

命題 1 拒否権者が存在する重み付き多数決ゲーム \tilde{G} において， $i \neq n$ のとき，

$$\tau_i(G, \tilde{G}) = \sum_{S \in \mathbf{T}_i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \quad (9)$$

証明

$i \neq n$ のとき， $G|_{n-1}$ における勝利提携は，元のゲーム G においても勝利提携であるが， \tilde{G} においては勝利提携ではない．逆に，元のゲーム G における勝利提携でかつ $G|_{n-1}$ の勝利提携でない提携は，必ずプレイヤー n を含まねばならない．ここで，

$$\mathbf{S}_i = \left\{ S \in P(N) \mid i \notin S \text{ かつ } q - w_i \leq \sum_{j \in S} w_j < q \right\}$$

が元のゲーム G において投票者 i がピヴォットとなる提携の族であることに注意する．すると， $\mathbf{S}_i - \mathbf{T}_i$ は，元のゲーム G において，投票者 n を含み，かつ投票者 i がピヴォットとなる提携の族であることがわかる．すなわち $\mathbf{S}_i - \mathbf{T}_i$ は， \tilde{G} において投票者 i がピヴォットとなる提携の族である．ゆえに，

(10) この命題は，佐々木 [2007] における命題に基づいて，以下でのアルゴリズム開発に適合するように筆者が再構築したものである．

$$\varphi_i(\tilde{G}) = \sum_{S \in \mathbf{S}_i - \mathbf{T}_i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \quad (10)$$

が成り立つ．これと SS 指数及び $\tau_i(G, \tilde{G})$ の定義より，

$$\begin{aligned} \varphi_i(G) &= \sum_{S \in \mathbf{S}_i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \\ &= \sum_{S \in \mathbf{S}_i - \mathbf{T}_i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} + \sum_{S \in \mathbf{T}_i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \\ &= \varphi(\tilde{G}) + \sum_{S \in \mathbf{T}_i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \\ \varphi_i(G) - \varphi_i(\tilde{G}) &= \sum_{S \in \mathbf{T}_i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \\ \therefore \tau_i(G, \tilde{G}) &= \sum_{S \in \mathbf{T}_i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \end{aligned}$$

である．

証明終わり

定義 9 G において，投票者 i を含まず，重みの和が k ，要素の数が s であるような提携の個数を $c(i, k, s)$ で表すことにする．同様に， $G|_{n-1}$ において，投票者 i を含まず，重みの和が m ，要素の数が t であるような提携の個数を $f(i, m, t)$ で表すことにする．

例 2 $G = [51, (40, 30, 20, 10)]$

G において投票者 1 を含まない提携は， $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ である．したがって $c(1, k, s)$ のうち，正であるものは，

$$\begin{aligned} c(1, 0, 0) &= 1 & c(1, 30, 1) &= 1 & c(1, 20, 1) &= 1 & c(1, 10, 1) &= 1 \\ c(1, 50, 2) &= 1 & c(1, 40, 2) &= 1 & c(1, 30, 2) &= 1 & c(1, 60, 3) &= 1 \end{aligned}$$

である⁽¹¹⁾．同様に， $G|_{n-1}$ において投票者 1 を含まない提携は， $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$ なので，

(11) 空集合 \emptyset は， $k = 0$ ， $s = 0$ の提携であることに注意せよ．

$$f(1, 0, 0) = 1 \quad f(1, 30, 1) = 1 \quad f(1, 20, 1) = 1 \quad f(1, 50, 2) = 1$$

である.

ここで, 次の命題 2 と命題 3 を示そう.

命題 2 (Lucas[1983])

$$\varphi_i = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=q-w_i}^{q-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} c(i, k, s) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

証明

$c(i, k, s)$ のうち, $q - w_i \leq \sum_{j \in S} w_j \leq q - 1$ を満たすものについて考える. すると, このような $c(i, k, s)$ は, S_i に含まれる提携のうち, 重みの和が k で要素の数が s であるもの個数に他ならない. ゆえに,

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \sum_{S \in S_i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=q-w_i}^{q-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} c(i, k, s) \end{aligned}$$

である.

証明終わり

命題 3 $i = 1, 2, \dots, n - 1$ に対して,

$$\tau_i(G, \tilde{G}) = \sum_{t=0}^{n-2} \sum_{m=q-w_i}^{q-1} \frac{t!(n-t-1)!}{n!} f(i, m, t) \quad (12)$$

証明

命題 2 の証明と同様である.

証明終わり

例 3 $G = [51, (40, 30, 20, 10)]$

$q - w_1 = 51 - 40 = 11$ と $q - 1 = 51 - 1 = 50$ であるから, 例 1 で求めた $c(1, k, s)$ のうち正かつ $11 \leq k \leq 50$ を満たすものは,

$$\begin{aligned}
c(1, 30, 1) &= 1 & c(1, 20, 1) &= 1 & c(1, 50, 2) &= 1 \\
c(1, 40, 2) &= 1 & c(1, 50, 2) &= 1
\end{aligned}$$

である．よって，投票者 1 の SS 指数は，

$$\begin{aligned}
\varphi_1(G) &= \sum_{s=0}^3 \sum_{k=11}^{50} \frac{s!(3-s)!}{n!} c(1, k, s) \\
&= \frac{1!2!}{4!} \times 2 + \frac{2!1!}{4!} \times 3 = \frac{10}{24}
\end{aligned}$$

である．同様に例 1 で求めた $f(1, m, t)$ のうち正かつ $11 \leq k \leq 50$ を満たすものは，

$$f(1, 30, 1) = 1 \quad f(1, 20, 1) = 1 \quad f(1, 50, 2) = 1$$

なので，

$$\begin{aligned}
\tau_1(G, \tilde{G}) &= \sum_{t=0}^2 \sum_{k=11}^{50} \frac{t!(3-t)!}{n!} f(1, m, t) \\
&= \frac{1!2!}{4!} \times 2 + \frac{2!1!}{4!} \times 1 = \frac{6}{24}
\end{aligned}$$

である．以上より，

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\tilde{G}) &= \varphi_1(G) - \tau_1(G, \tilde{G}) \\
&= \frac{10}{24} - \frac{6}{24} = \frac{4}{24}
\end{aligned}$$

2.2 アルゴリズム

2.1 で行った数学的準備の下で，Lucas[1983] のアルゴリズムに修正を加え， $\varphi(\tilde{G})$ の正確な値を計算するアルゴリズムを提案する⁽¹²⁾．なお，以下のアルゴリズムは q と w_1, w_2, \dots, w_n が正整数であることを前提としている．

(12) 筆者はここで提案したアルゴリズムをベースに Mathematica のプログラムを作成したが，紙面の制約により割愛した．プログラムファイルを希望する方は筆者まで連絡して頂きたい．

入力: 正整数 $n, q, w_1, w_2, \dots, w_n$

出力: $\varphi(\tilde{G}) = (\varphi_1(\tilde{G}), \varphi_2(\tilde{G}), \dots, \varphi_n(\tilde{G})) \in \mathbb{R}^n$

Step:

- (1) $i = 1, 2, \dots, n$ について Step(2)~(6) を繰り返し行う.
- (2) $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ について, w'_i を次のように定める.

$$w'_i = \begin{cases} w_j & j < i \\ w_{j-1} & j > i \end{cases}$$

- (3) $d(0, k, s)$ ($k = 0, 1, \dots, q-1, \quad s = 0, 1, \dots, n-1$) を次のように定める.

$$d(0, k, s) = \begin{cases} 1 & (k, s) = (0, 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (4) $d(r, k, s)$ ($r = 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, q-1, \quad s = 0, 1, \dots, n-1$) を次のように定める.

$$d(r, k, s) = \begin{cases} d(r-1, k, s) & k < w'_r \text{ または } s = 0 \\ d(r-1, k, s) \\ \quad + d(r-1, k - w'_r, s-1) & k \geq w'_r \text{ かつ } s \geq 1 \end{cases}$$

- (5) $c(i, k, s) = d(n-1, k, s)$ ($k = 0, 1, \dots, q-1, \quad s = 0, 1, \dots, n-1$) とする.

- (6) $\varphi_i = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=q-w_i}^{q-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} c(i, k, s)$ を計算する.

- (7) $i = 1, 2, \dots, n-1$ について次の Step(8)~(11) を繰り返し行う.

- (8) $g(0, m, t)$ ($m = 0, 1, \dots, q-1, \quad t = 0, 1, \dots, n-2$) を次のように定める.

$$g(0, m, t) = \begin{cases} 1 & (m, t) = (0, 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (9) $g(u, m, t)$ ($u = 1, 2, \dots, n-2$, $m = 0, 1, \dots, q-1$, $t = 0, 1, \dots, n-2$) を次のように定める.

$$g(u, m, t) = \begin{cases} g(u-1, m, t) & m < w'_u \text{ または } t = 0 \\ g(u-1, m, t) \\ \quad + g(u-1, m - w'_u, t-1) & m \geq w'_u \text{ かつ } t \geq 1 \end{cases}$$

- (10) $f(i, m, t) = g(n-2, m, t)$ ($m = 0, 1, \dots, q-1$, $t = 0, 1, \dots, n-2$) とする.

$$(11) \quad \tau_i(G, \tilde{G}) = \sum_{t=0}^{n-2} \sum_{m=q-w_i}^{q-1} \frac{t!(n-t-1)!}{n!} f(i, m, t) \text{ を計算する.}$$

$$(12) \quad \tau_n(G, \tilde{G}) = - \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i \text{ を計算する.}$$

$$(13) \quad \varphi(\tilde{G}) = \varphi(G) - \tau_i(G, \tilde{G}) \text{ を計算する.}$$

$$(14) \quad \varphi(\tilde{G}) = (\varphi_1(\tilde{G}), \varphi_2(\tilde{G}), \dots, \varphi_n(\tilde{G})) \text{ を出力して終了する.}$$

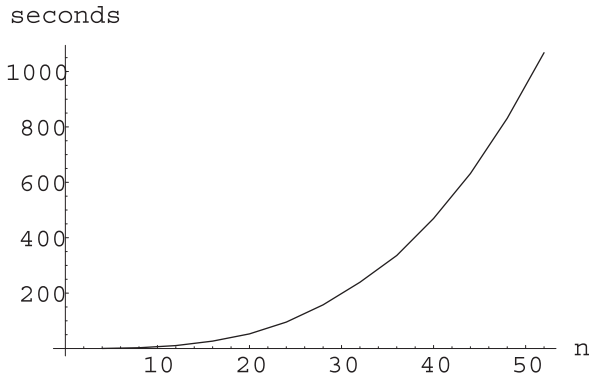
アルゴリズムの主な計算は、 $c(i, k, s)$ を求める部分 (ステップ (3)~(5)) と $f(i, m, t)$ を求める部分 (ステップ (8)~(10)) である. ステップ (2) により、投票者 i を除いた残りの投票者の重みは常に $w'_1, w'_2, \dots, w'_{n-1}$ となる. ステップ (3)~(5) で $c(i, k, s)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を求め、ステップ (6) で SS 指数 $\varphi_i(G)$ を計算している⁽¹³⁾. ステップ (8)~(10) で $f(i, m, t)$ を求め、ステップ (11) と (12) で $\tau_i(G, \tilde{G})$ を計算している⁽¹⁴⁾. そして、ステップ (13) で $\varphi_i(\tilde{G})$ を計算する⁽¹⁵⁾.

(13) 命題 2 を用いている.

(14) 式 (7) と命題 3 を用いている

(15) 式 (5) を用いている

ここで示したアルゴリズムの計算時間は、プレイヤーの人数 n の増加に伴って、きわめて急速に増大する⁽¹⁶⁾。実際、筆者が所属する研究室のコンピュータ⁽¹⁷⁾を用いてその典型的な例を計算し、計算時間を計測しプロットしたところ、次のグラフのようになった。



3. シミュレーション

3.1 基本設定

本章では、黄金株の導入が株主の権利配分にいかなる影響を及ぼすかを、シミュレーションにより考察する。シミュレーションの基本設定を以下に示す。

- 株主の人数を $n = 31$ とする⁽¹⁸⁾。
- 各株主の重み w_1, w_2, \dots, w_{31} は正整数で、 $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_{31}$ を満たし、かつ $\sum_{i=1}^{31} w_i = 1000$ が成り立つように選択する⁽¹⁹⁾。

(16) 計算時間は q の増加にも依存している。

(17) CPU は “Intel Core2 Quad Q6600” である。

(18) 一般論としては、より現実的適合性の高いシミュレーションにするためには、 n をできる限り大きくすべきであるが、本研究で $n = 31$ としたのは、アルゴリズムの計算速度から考えてのやむを得ざる選択である（前章最後のグラフを参照）。

(19) 各株主の重みは、実際には株式保有比率 (%) である。しかし、本論文で提案した SS 指数の計算アルゴリズムは、重みと必要票数が正整数の場合を前提としており、そのままでは計算できな

- 第 31 番目の株主を拒否権者とし、重みを $w_{31} = 1$ に固定する.
- 重み付き多数決ゲーム $G = [501, (w_1, w_2, \dots, w_{31})]$ と、 G から誘導される拒否権者が伴う重み付き多数決ゲーム $\tilde{G}(31)$ を考える⁽²⁰⁾.
- ゲーム G および \tilde{G} において、 $w_1 \geq 34$ かつ $w_1 < 501$ とする⁽²¹⁾.

3.2 方法

本論文では、 $34 \leq w_1 < 501$ の範囲で、 w_1 の大きさに関して次の 5 つのケースを考え、それぞれのケースについて 10 回ずつのシミュレーションを行うことにした.

1. $34 \leq w_1 \leq 100$
2. $100 < w_1 \leq 200$
3. $200 < w_1 \leq 300$
4. $300 < w_1 \leq 400$
5. $400 < w_1 \leq 500$

ケース 1 は、株主 1 が最大でも 10% の保有比率しか持ち得ない、つまり、各株主の保有比率が比較的拮抗していて、株式の保有株数が比較的に少数である株主（以下では、「小株主」という）が多く存在しているケースである。ケース 2 から 5 へと w_1 が増加していくにつれて、最大株主の保有比率が増大し、大株主と小株主の差が開いていく可能性が高まることになる。

いため、株式保有比率を 10 倍したものを各株主の重みとしている。たとえば、保有比率 16.9% の株主の重みは 169 である。

(20) 黄金株は種類株式であるから、種類株主総会においてのみしか投票の権利を持たず、株主総会においては投票できない。したがって、このようなゲームの定義は厳密には現実のものと異なる。しかしながら、拒否権者の重みは 1 で SS 指数は無視できるほど十分に小さくなるため、黄金株導入の影響を測る上で問題はないと考えられる。

(21) $w_1 < 34$ のとき $\sum_{i=1}^{31} w_i = 1000$ が成り立たないことは $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_{31}$ から明らかである。また、 $w_1 \geq 501$ のとき、ゲーム G において投票者 1 は独裁者であるから、 $\varphi(G) = (1, 0, \dots, 0)$ となる。一方、ゲーム \tilde{G} の SS 指数は $\varphi(\tilde{G}) = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2})$ となる。つまり、 $w_1 \geq 501$ のときの SS 指数は明らかであるため、シミュレーションを行う必要がない。

次に、上に述べた基本設定と整合的になるような、具体的なシミュレーション方法（とりわけ、どのように w_1 から w_{30} までを選ぶかの方法）について述べよう．たとえば、ケース 1 について具体的な計算の手順は、以下の (1)～(8) を実行することで行われる．

- (1) 幾何乱数を独立に発生させて、 a_1, a_2, \dots, a_{30} の数値を得る．
- (2) a_1, a_2, \dots, a_{30} を大きい順に並べて、 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{30}}$ と番号（添数）を付け替える．
- (3) $w_i = \frac{a_{i_1}}{\sum_{j=i_1}^{i_{30}} a_j} \times 1000$ ($i = 1, 2, \dots, 30$) とし、小数点以下を切り捨てる．また、 $w_{31} = 1$ とする．
- (4) $\sum_{j=1}^{31} w_j = 1000$ ならば、(5) に進む．それ以外のときは (1) に戻る．
- (5) $w_1 < 501$ かつ $w_1 \geq 34$ ならば、(6) に進む．それ以外のときは (1) に戻る．
- (6) $w_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, 30$) ならば、(7) に進む．それ以外のときは (1) に戻る．
- (7) $w_1 \geq 34$ かつ $w_1 \leq 100$ ならば、(8) に進む．それ以外のときは (1) に戻る．
- (8) $q = 501$ として、株主 $1, 2, \dots, 31$ の $\varphi(G)$ と $\varphi(\tilde{G})$ を計算する．

手順 (1)～(6) と (8) は、いずれのケースについてシミュレーションを行うときも共通である．したがって、ケース 1 以外のケースについても、手順 (7) を各ケースの条件を満たすように変更してやればよい．

3.3 結果とその考察

私たちは、第 3.1 節に述べたやり方で減少数列 w_1, w_2, \dots, w_{31} を各回で求めて、各ケースにつきそれぞれ 10 回、合計 50 回のシミュレーションを行った．そのうち各ケースごとに典型的な結果をグラフ化して以下に示した⁽²²⁾．

(22) 本論文では、紙数の制約によりすべての計算結果の掲載を行わず、各ケースごとに典型的結果だけを掲載することにしたが、すべての計算結果をお知りになりたい方は筆者まで連絡して頂

図 1～図 5 においては、上のグラフで各株主の重みの分布を表し、下のグラフで黄金株導入前後での SS 指数（実線は導入前、点線は導入後）を表している。横軸は各投票者の番号で、 $1, 2, \dots, 31$ である。

図 6～図 10 は、図 1～図 5 に示した結果について、 $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ を計算し、それをグラフとして表している。これらのグラフの縦軸は $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ の値であり、横軸は各投票者の番号で、 $1, 2, \dots, 30$ である⁽²³⁾。 $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ の値は、黄金株導入後の株主 i の SS 指数を黄金株導入前の株主 i の SS 指数で割ったものである。したがって、 $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ の値が大きければ大きいほど、SS 指数の減少割合は小さく、黄金株の導入に伴う既存株主への権利侵害が比較的小さいことを意味している。それとは反対に、 $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ の値が小さければ小さいほど、SS 指数の減少割合は大きく、黄金株導入に伴う既存株主

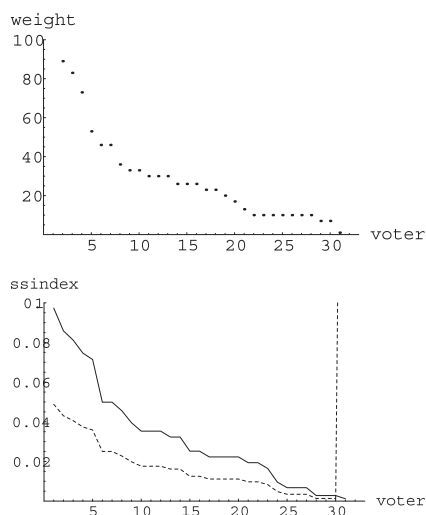


図 1 ケース 1 の重みと SS 指数の分布

きたい。

(23) 第 31 投票者、すなわち拒否権者については表示していないことに注意せよ。

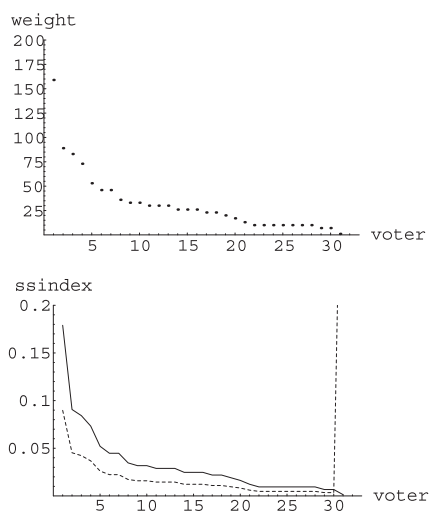


図2 ケース2の重みとSS指数の分布

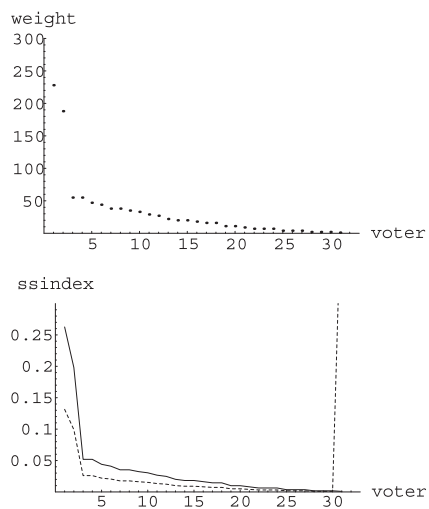


図3 ケース3の重みとSS指数の分布

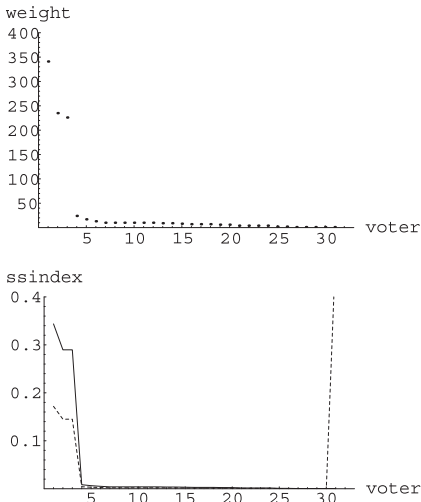


図 4 ケース 4 の重みと SS 指数の分布

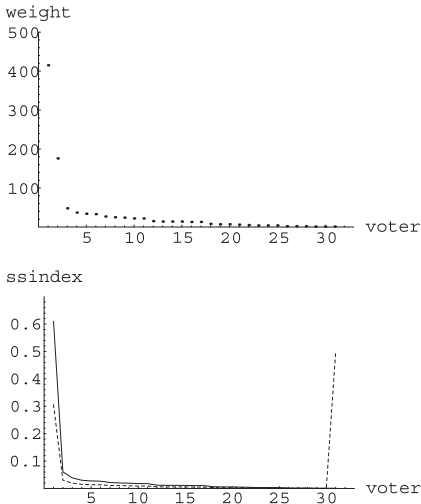


図 5 ケース 5 の重みと SS 指数の分布

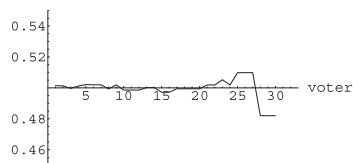


図 6 ケース 1 の $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ の分布

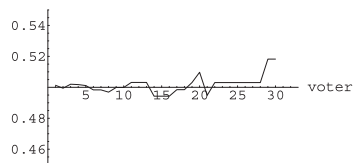


図 7 ケース 2 の $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ の分布

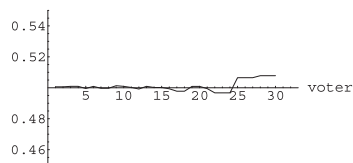


図 8 ケース 3 の $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ の分布

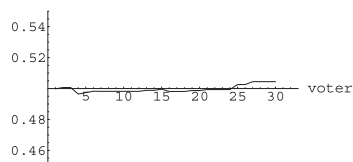


図 9 ケース 4 の $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ の分布

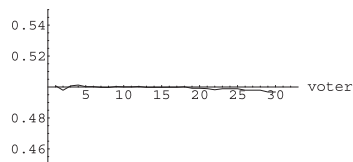


図 10 ケース 5 の $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ の分布

への権利侵害は大きくなると言うことができる。

さらに、 $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ の値が株主の間で大きく異なれば、黄金株の導入は既存株主の権利配分を不公平に歪めることになると解釈できる。それとは反対に、 $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ の値がどの株主についても大きな違いがなければ、黄金株の導入による権利配分への影響は、既存株主が保有している株式の割合の大小に関わらず、比較的公平に全員の権利を減少させると解釈できる。

図 6～図 10 から読み取れることは、どの株主の分布についても、拒否権者を除く 30 人の株主の $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ が 0.48 から 0.52 の間に収まっているという事実である。しかも、この傾向は今回行った各ケースごとに 10 回、合計 50 回の計算結果においてすべて観察できた事実である。したがって、少なくとも今回のシミュレーションでは、どのような株主の分布についても、拒否権者を除く 30 人の株主の $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ が 0.48 から 0.52 の間に収まっていると結論することができる。

つまり、ここから $\varphi_i(\tilde{G})/\varphi_i(G)$ が拒否権者を除くどの投票者についてもおよそ 0.5 程度である傾向が推察される。すなわち、SS 指数の観点から考えれば、株式の保有状況の分布に関わらず、黄金株導入後は導入前に比して、既存の株主が株主総会に及ぼす影響力は半分程度になると推測できる。

しかし、この結果の解釈については若干の限定が必要である。たとえば $q = 667$ 、すなわち全体の 3 分の 2 をもって可決とするルールの場合を考えてみよう。図 5 のデータを用いてこの場合における SS 指数を計算し、 $\varphi(\tilde{G})/\varphi(G)$ を求めたところ、次頁の図 11 を得た。この図では、実線が $q = 501$ の場合、つまり過半数の賛成で可決されるケース（これを「過半数ルール」と呼ぶ）を表している。また、この図の点線は $q = 667$ の場合、つまり 3 分の 2 を超える賛成で可決される場合（これを「3 分の 2 ルール」と呼ぶ）を表している。このシミュレーションにおいては、①過半数ルールでは SS 指数の減少割合が全株主について 0.5 の近傍にあるが、②3 分の 2 ルールでは、株主ごとに大き

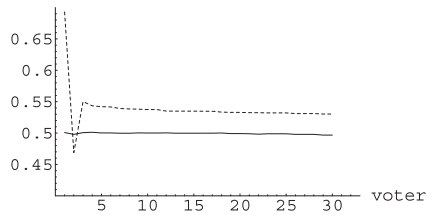


図 11

く異なってしまう、とりわけ大株主と比べて小株主の権利がより大きく侵害されているという不公平が生じていることが読み取れる。

ところで、図 6 から図 10 までに示したシミュレーションは、いずれも $q = 501$ 、つまり過半数ルールで行っている。したがって、図 11 の結果と併せて考えると、「既存の株主の権利侵害の程度が株式の保有状況の分布にかかわらず半分（50%）程度になる」ということは、仮にその主張に一般性があったとしても、それが成立するか否かは q がどのような水準に取設定されているかどうか、より具体的には過半数ルールであるか否か、に強く依存する可能性が示唆される。

結語

本研究では、拒否権者が存在する重み付き多数決ゲームにおける SS 指数の計算アルゴリズムを開発し、そのアルゴリズムを用いてシミュレーションを行った。シミュレーション結果から、次の結論が示唆される。

「少なくとも過半数ルールの下では、株式の保有状態の分布にかかわらず拒否権者が登場した場合、拒否権者を除く株主の SS 指数は拒否権者の登場前に比しておよそ半分程度になる。すなわち、この場合、黄金株を導入した企業においては、各株主の保有株式数の大小にかかわらず、既存の株主が株主総会に与える影響力は半分程度になる。」

もしこのことに一般性があるとするならば、既存株主の権利が割合として

同程度に侵害されるという観点から考えて、黄金株の導入は各株主に公平な影響を与えらるゝことができる。

ところで、SS 指数は全部を合計するとちょうど 1 になるので、拒否権者以外の株主の SS 指数が 2 分の 1 になることは拒否権者の SS 指数が 0.5 になることを意味している。つまり、上記の「 」内の主張に仮に一般性があった場合、黄金株導入は全既存株主の権利を「公平に」侵害する一方で、黄金株主に 0.5 という非常に大きな権利を付与することになる。したがって、黄金株の導入が株主の権利配分に与える影響が決して無視できないのは明らかであろう。

このように上記の「 」内に述べた主張の一般性という点での当否や前章の最後に述べた過半数ルールであるかどうか結論を左右する可能性等について、本研究では残念ながら理論的・数学的な解明は行われていない。今後の課題として、本研究で行ったシミュレーション結果をベースにして、上記「 」内に述べた事実を理論的・数学的に解明していきたいと思う。

また、本研究では SS 指数を用いてシミュレーションを行ったが、Banzhaf 指数、Deegan-Packel 指数など他の投票力指数における黄金株導入時の株主への影響は、SS 指数とは異なったものになる可能性があるため、これらの投票力指数についても、黄金株導入の影響を調べることは、黄金株の性質を明らかにする上で必要であろう。

さらに、本研究では、アルゴリズムの計算速度の限界から、株主の人数が $n = 30$ 程度でしかシミュレーションを行うことができなかったが、実際には上場企業の株主は数千人・数万人単位で存在するのが一般的である。そこで今後の課題としては、拒否権者が存在し、かつ投票者の人数が数千・数万という大規模な重みつき多数決ゲームにおいて、SS 指数を近似的に計算する方法の確立もあげることができる。拒否権者が存在しない場合の SS 指数の近似値を求める方法は、中心極限定理と正規分布を用いる Owen[1975] の方法

が知られており、同様の方法が使える可能性がある。

しかしながら、私たちが考察しているゲームにおいては、拒否権者の存在によりある種の「対称性」が失われてしまうという問題がある。つまり、任意の2人のプレイヤー i と j について、 w_i と w_j の数値が入れ替わった場合、2人のSS指数もそのまま入れ替わるという意味での対称性を、拒否権のないゲームは持っており、それが中心極限定理等の適用を可能にしているという側面がある。しかし、拒否権付のゲームの場合、たとえば i が拒否権者であったならば、当然のことながら i と j の入れ替えはSS指数の入れ替えを意味しないので、対称性が崩れてしまう。この点で、拒否権付ゲームにおいてOwen[1975]の方法の直接的な適用は難しく、非対称性の困難を解決する手法の確立が今後の研究課題として浮かび上がってくる。

いずれにせよ、近似計算法の確立により、さらに現実に近い形での株主総会のシミュレーションを行うことができ、黄金株が株主の権利配分に与える影響をより正確に理解することが可能となるであろう。

このように、黄金株と投票力指数の周辺には興味深い問題が残されており、今後の研究の進展が望まれる。

謝辞

本論文の執筆にあたり、佐々木宏夫教授には丁寧なご指導をして頂いただけでなく、研究室での長期に渡る作業まで認めて頂きました。佐々木研究室の大学院生である阿武秀和さん、赤星立さんには、研究を進めていく上で生じた問題について、しばしば相談に乗って頂きました。この場を借りて御礼申し上げます。

参考文献

Banzhaf, J. F. (1965), "Weighted voting doesn't work," *Rutgers Law Review*, pp.317-343
Brams, S. J. and Affuso, P. J. (1975), "Power and size:a new paradox," *mimeographed*

paper

- Deegan, J. and Packel E. W. (1978), "A new index of power for simple n-person games," *International Journal of Game Theory*, Vol.7, pp.113-123
- Dubey, P. (1975), "On the uniqueness of the Shapley value," *International Journal of Game Theory*, Vol.4, pp.131-139
- Lucas, W. F. (1983), "Measuring power in weighted voting systems," in Brams, S. J., W. F. Lucas and P. D. Straffin eds., *Political and related models*, Springer-Verlag, pp.183-238
- Owen, G. (1975), "Evaluation of Presidential Election Game," *American Political Science Review*, Vol.69, pp.947-953
- Shapley, L. S. (1953), "A value for n-person games," in Kuhn, H. W. and A. W. Tucker eds., *Contributions to the theory of games*, Annals of Mathematics Studies No.28, Princeton University Press, pp.307-317
- Shapley, L. S. and Shubik, M. (1954), "A method for evaluating the distribution of power in a committee system," *American Political Science Review*, Vol.48, pp.787-792
- Straffin, P. D. (1983), "Power Indices in Politics," in Brams, S. J., W. F. Lucas and P. D. Straffin eds., *Political and related models*, Springer-Verlag, pp.256-321
- Zingales, L. (1995), "What Determines the Value of Corporate Votes?" *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.110, No.4, pp.1047-1073
- 岡田章 (1997), 『ゲーム理論』, 有斐閣
- 小野理恵・武藤滋夫 (1998), 『投票システムのゲーム分析』, 日科技連出版社
- 河野光雄・佐野健一 (1996), 『社会現象の計算機実験－ Mathematica と Excel を使って』, 中央大学出版部
- 北村雅史・前田雅弘 (2005), 『新会社法全条文』, 三省堂
- 木村広 (2001), 『Mathematica ハンドブック』, 秀和システム
- 佐々木宏夫 (2007), 『拒否権者が伴う重み付き投票ゲームにおける SS 指数について』, 未定稿
- 鈴木芳徳 (2006), 『黄金株についての覚書』, 神奈川大学経済学会商経論叢, 第 41 巻, 第 2 号, pp.253-261
- 辺見紀男・渡邊顕 (2005), 『敵対的買収と企業防衛』, 日本経済新聞社
- 山本慎 (2002), 『情報の数理』, 朝倉書店