中 央 大 学 理 工 学 研 究 所 論 文 集　第 12 号　2006 年
Journal of the Institute of Science and Engineering. Chuo University

鉛直平板の後流渦を利用した発熱体からの放熱促進に関する数値解析

岩原宏明*，近藤裕貴†，中山　司‡

Numerical Analysis on the Enhancement of Heat Transfer of Heated Obstacles Using the Periodic Vortices Generated by a Vertical Flat Plate

Hiroaki IWAHARA*, Hiroki KONDO† and Tsukasa NAKAYAMA‡

abstract

A concept is proposed to enhance the heat transfer of heated obstacles located in a channel. Air flows steadily in the channel. A vertical flat plate is fixed in the upper stream of the obstacles and serves as a vortex generator. Vortices generated periodically from the edge of the plate hit the surfaces of the obstacles, destroy thermal boundary layers and remove heated air around the obstacles. The effects of Reynolds number of the air flow, the height of the plate and the interval between the plate and the heated obstacles are investigated by the numerical analysis. The air is treated as an incompressible Newtonian fluid, and the flow is assumed to be laminar. The governing field equations, which are the equation of continuity, the momentum equations and the energy equation, are discretized in space by the finite element method. The semidiscrete equations thus obtained are integrated in time by a fractional-step method. Through numerical experiments, it has been found that the use of the vortex generator yields the heat transfer effect about 1.6 times as higher as the effect in the case of no vortex generator, and that there exists an optimum distance corresponding to the highest effect of heat transfer between the vortex generator and the heated obstacle.

1　はじめに

コンピュータの CPU の高性能化に伴って電子回路は高密度化しつつあるが，その結果として CPU の発熱密度はますます高まっている．しかも，最近のノート型 PC にみられるようにコンピュータの筐体は小型化する傾向にあるため，筐体内に熱が貯まりやすくなっている．このような熱の蓄積による CPU の暴走や電子部品の劣化を防ぐためには，CPU の効果的な冷却が不可欠である．最近，水を用いた冷却システムを搭載したコンピュータが市場に登場したが，主流はファンが作る気流を利用する空冷システムである．現在の空冷システムは，コンピュータ筐体内の空気を筐体外へ排出することで廃熱するもので，必ずしも放熱効果の大きい冷却システムとは言い難い．一般に，ファンが作る遅い気流の中に置かれた発熱体の表面近傍には，温度境界層と呼ばれる薄い高温の層が形成され，この層が発熱体から気流への熱伝達を阻害している．この温度境界層を

*中央大学理工学部精密機械工学科（現在 アイシン精機(株)勤務）
†中央大学理工学部精密機械工学科（現在 北陸先端科学技術大学院大学在学）
‡中央大学理工学部精密機械工学科（〒 112–8551 東京都文京区春日 1–13–27）

発熱体表面から取り去ることができれば冷却効率を上げることができる．

Yang[1] は，発熱体の上流に流れに平行に置いた平板を振動させてカルマン渦列を発生させ，その渦の作用で温度境界層を発熱体表面からはがして放熱を促進するシステム (Fig. 1(d)) を想定して，その放熱効果を数値解析によって調べている．しかし，コンピュータの筐体内で物体を振動させることは新たな騒音の発生源となる可能性があり，最近の情報機器の静音化設計の流れに逆行するものである．さらに，物体を振動させるためには電力と駆動機構が必要になり，省電力化に逆行するとともにコンピュータの価格上昇につながりかねない．カルマン渦列を利用して放熱効果を促進するという発想は興味深いが，物体を振動させるという発想は実用的とは言い難い．

そこで，筆者らは，静止した物体の後流に生じる渦を放熱に利用することを考え，これまでに物体の断面形状の違いによる放熱効果の差を数値計算によって調べた．Fig. 1(a), (b), (c) のような，断面が四角形，三角形の物体と，流れに垂直に置いた平板 (以後これを“ついたて”と呼ぶ) について，発熱体からの距離や床面からの高さを変えながら調べた結果，Fig. 2 に示すようについたての放熱効果が最も高く，Yang の計算モデルの振動平板の場合に匹敵する効果があることがわかった [2]．そこで，本研究では渦発生体をついたてに絞り，その高さや発熱体からの距離と放熱効果の関係を数値計算によってさらに詳細に調べた．その結果を報告する．

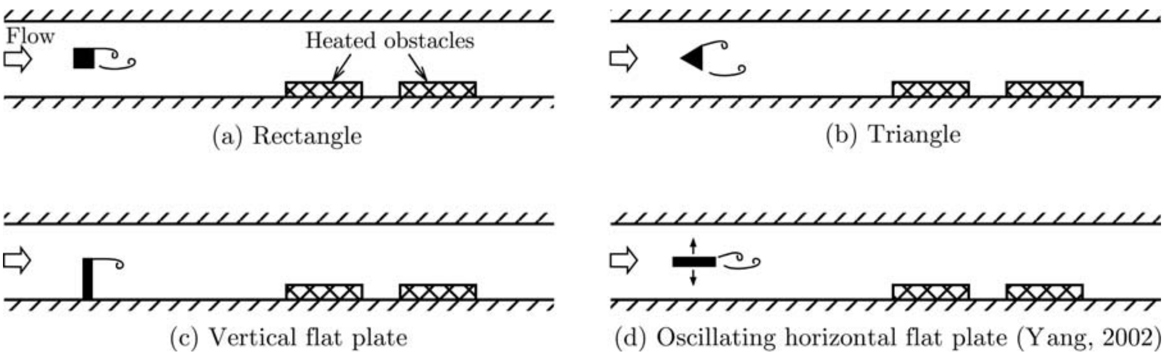


Fig. 1　Two-dimensional vortex generators with various shapes of cross-sections

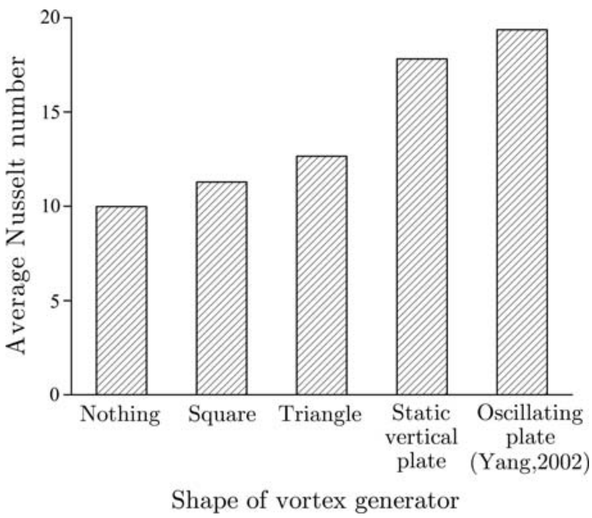


Fig. 2　Comparison of computed average Nusselt number for various shapes of vortex generators

2　計算モデルと基礎方程式

現象を 2 次元問題として扱う．Fig. 3(a) に示す，2 枚の平行平板で挟まれた領域を解析領域とし，下板の上に 2 個の発熱体が置かれたモデルを考える．ここで，発熱体を 2 個としたのは，発熱体間にできるすき間に貯まる熱量が無視できないものであり，その熱をどれほど排出できるかが全体の放熱効果にかなりの影響を及ぼすと考えたからである．計算領域の寸法は Fig. 3(b) に示すとおりである．ここで，すべての寸法は，2 枚の平行平板間の距離を代表長さとして無次元化されている．発熱体の上流に渦を発生させるついたてを設ける．そのついたての発熱体からの距離 D と高さ H を変えながら放熱効果の変化を調べる．流体を非圧縮ニュートン流体とし，流れは層流であるとすれば，流れの支配方程式は，ナビエ・ストークス方程式

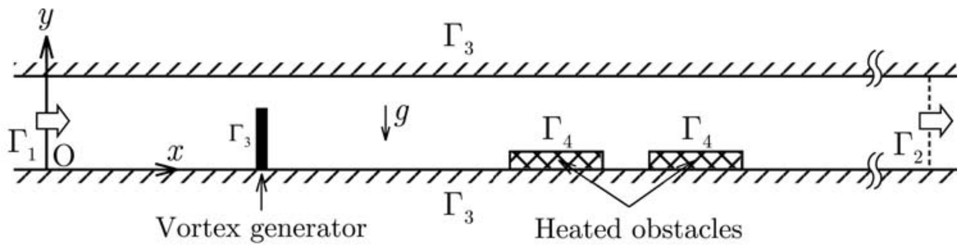
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\,\frac{\partial v}{\partial x}+v\,\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{Gr}{Re^2}\,T \tag{2}$$

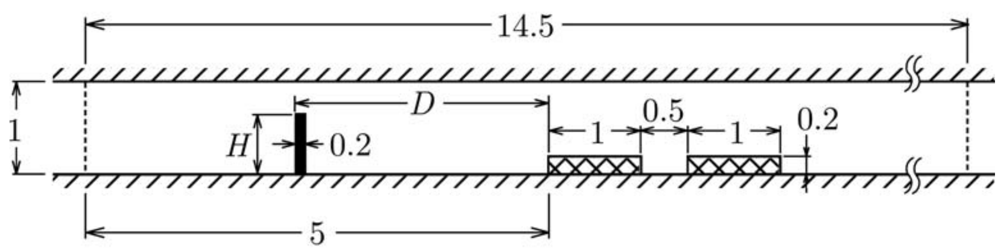
と連続の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3}$$

である．ここに，x, y は Fig. 3(a) に示す直交デカルト座標を表し，y 軸負方向に重力加速度が作用する．また，t は時間，u と v はそれぞれ速度の x 成分，y 成分，p は圧力，T は流体内の任意の位置での温度と外気温度 (一定とする) の差を表す．ここで，速度成分 u, v は流入境界で指定される流速の最大値を代表速さとして無次元化されており，温度 T は発熱体表面温度 (一定とする) と流入境界で指定される外気温度の差を代表温度として無次元化されている．Re はレイノルズ数, Gr はグラスホフ数である．式 (2) の右辺第 3 項は，流体



(a) A computational region and its boundaries



(b) Size of the computational region

Fig. 3　A computational model

の熱膨張による密度変化の結果生じる浮力を表している．温度変化を支配する方程式はエネルギ方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\,\frac{\partial T}{\partial x}+v\,\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{Re\,Pr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

である．ここに Pr はプラントル数である．粘性による散逸エネルギは微小と考えて無視する．

Fig. 3(a) において，Γ_1 は流入境界，Γ_2 は流出境界，Γ_3 は上下の平板とついたての表面，Γ_4 は発熱体の上面と側面を表す．Γ_1 上では

$$u=\widehat{u}(y),\qquad v=0,\qquad T=\widehat{T}_a \tag{5}$$

を境界条件とする．ここに，上付きの^は既知量であることを意味する．$\widehat{T}_a$ は無次元外気温度であり，$\widehat{T}_a=0$ である．本研究では，Γ_1 上の流れは x 軸に平行なポアズイユ流れと仮定し，$\widehat{u}(y)=4y(1-y)$ とする．Γ_2 上では

$$-p+\frac{1}{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial T}{\partial t}+U\frac{\partial T}{\partial x}=0 \tag{6}$$

を課す．境界上で流体領域から外に向けて引いた法線を n とするとき，多くの数値計算で温度に関する流出境界条件として $\partial T/\partial n=0$ を用いる場合が多い．これは断熱を表す条件である．これを用いると，流出境界付近に熱が貯まり，次第に温度が上昇し，ときには計算を破綻させてしまうことがある．そこで，本研究では中山ら [3] の研究を参考にして，式 (6) の第 2 式のような線形移流型の流出境界条件式を採用する．移流速さ U は Γ_1 での平均流速に等しいとして

$$U=\int_0^1 \widehat{u}(y)\,dy=\frac{2}{3} \tag{7}$$

とおく．Γ_3 は温度に関しては断熱境界と仮定し，Γ_3 上で

$$u=v=0,\qquad \frac{\partial T}{\partial n}=0 \tag{8}$$

を課す．Γ_4 上では

$$u=v=0,\qquad T=\widehat{T}_h \tag{9}$$

を与える．ここに，$\widehat{T}_h$ は発熱体の表面温度であり，$\widehat{T}_h=1$ である．

初期条件は計算領域全体で

$$u=v=p=0,\qquad T=\widehat{T}_a \tag{10}$$

とする．

3　基礎方程式の離散化

3.1　空間方向の離散化

基礎方程式の空間方向の離散化には有限要素法を使用し，要素の形状は四角形とする．Fig. 4 に示す代表的な要素 Ω_e において，速度成分 u, v と温度 T の値を 4 頂点で定義し，要素内の変化を図に示す局所座標 (ξ,η) の双 1 次式で近似する．圧力 p の値は要素の重心で定義し，要素内では一定と近似する．こうして，ナビエ・ストークス方程式 (1)，(2) は離散化されて

$$\mathbf{M}\,\frac{d\mathbf{U}}{dt}+\big[\mathbf{A}(\mathbf{U},\mathbf{V})+\mathbf{D}\big]\,\mathbf{U}-\mathbf{H}_x\,\mathbf{P}=\mathbf{O} \tag{11}$$

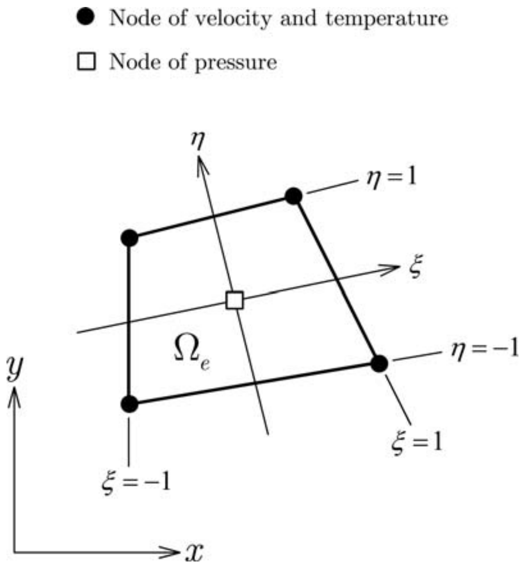


Fig. 4　A quadrilateral element and local coordinates (ξ, η)

$$\mathbf{M}\,\frac{d\mathbf{V}}{dt}+\left[\mathbf{A}(\mathbf{U},\mathbf{V})+\mathbf{D}\right]\mathbf{V}-\mathbf{H}_y\,\mathbf{P}-\frac{Gr}{Re^2}\,\mathbf{MT}=\mathbf{O} \tag{12}$$

となる．ここに，$\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{T}$ は，それぞれ速度成分 u, v，圧力 p，温度 T の節点値から成るベクトルであり，$\mathbf{O}$ は零ベクトルである．$\mathbf{A}(\mathbf{U},\mathbf{V})\mathbf{U}$ と $\mathbf{A}(\mathbf{U},\mathbf{V})\mathbf{V}$ は移流項の離散形，$\mathbf{DU}$ と $\mathbf{DV}$ は粘性項の離散形，$\mathbf{H}_x\,\mathbf{P}$ と $\mathbf{H}_y\,\mathbf{P}$ は圧力勾配項の離散形である．連続の方程式 (3) は，要素ごとに

$$\mathbf{h}_{xe}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{u}_e+\mathbf{h}_{ye}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{v}_e=0 \quad (e=1,2,\cdots,NE) \tag{13}$$

のように離散化される．ここに，$\mathbf{u}_e$ と $\mathbf{v}_e$ はそれぞれ速度成分 u と v の，要素 Ω_e の 4 節点での節点値から成るベクトルであり，$\mathbf{h}_{xe}^{\mathrm{T}}$ と $\mathbf{h}_{ye}^{\mathrm{T}}$ はそれぞれ全体行列 $\mathbf{H}_x^{\mathrm{T}}$ と $\mathbf{H}_y^{\mathrm{T}}$ に対応する要素ベクトルである．NE は要素総数である．エネルギ方程式 (4) は

$$\mathbf{M}\,\frac{d\mathbf{T}}{dt}+\left[\mathbf{A}(\mathbf{U},\mathbf{V})+\frac{1}{Pr}\,\mathbf{D}\right]\,\mathbf{T}=\mathbf{O} \tag{14}$$

となる．式 (11)–(14) の係数行列や係数ベクトルを導く際の積分計算は数値積分によって処理されるのが一般的であるが，ここでは文献 [4] を参考にして解析的に処理した．これにより，係数行列の組立に関する演算が高速化され，また数値積分に伴う誤差を排除することができる．

本研究で扱う流れのレイノルズ数は $10^3 \sim 10^5$ である．そこで，高レイノルズ数流れの数値計算で発生する数値的不安定現象を回避するためにナビエ・ストークス方程式とエネルギ方程式に SUPG (streamline upwind/Petrov Galerkin) 法 [5] を適用した．

3.2　時間方向の離散化

時間軸を一定の長さ Δt の小区間に分割し，時刻 $t^{n+1}=(n+1)\Delta t$ において式 (11)–(14) が成り立つとする．すなわち，

$$\mathbf{M}\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}\right)^{n+1}+\left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^{n+1},\mathbf{V}^{n+1})+\mathbf{D}\right]\mathbf{U}^{n+1}-\mathbf{H}_x\,\mathbf{P}^{n+1}=\mathbf{O} \tag{15}$$

$$\mathbf{M}\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)^{n+1}+\left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^{n+1},\mathbf{V}^{n+1})+\mathbf{D}\right]\mathbf{V}^{n+1}-\mathbf{H}_y\,\mathbf{P}^{n+1}-\frac{Gr}{Re^2}\,\mathbf{MT}^{n+1}=\mathbf{O} \tag{16}$$

$$\mathbf{h}_{xe}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{u}_e^{n+1} + \mathbf{h}_{ye}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{v}_e^{n+1} = 0 \quad (e = 1, 2, \cdots, NE) \tag{17}$$

$$\mathbf{M}\left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)^{n+1} + \left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{V}^{n+1}) + \frac{1}{Pr}\,\mathbf{D}\right]\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{O} \tag{18}$$

とする．ここに，上付添字 $n+1$ は時刻 t^{n+1} における値を成分にもつ量であることを表す．式 (15)，(16)，(18) の時間微係数は，

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt}\right)^{n+1} \approx \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t}, \quad \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)^{n+1} \approx \frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\Delta t}, \quad \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)^{n+1} \approx \frac{\mathbf{T}^{n+1} - \mathbf{T}^n}{\Delta t} \tag{19}$$

のように後退差分で近似する．次に，数値計算の負担を軽減するために，いくつかの近似を導入する．まず，移流項と拡散項について

$$\left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{V}^{n+1}) + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}^{n+1} \approx \left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^n, \mathbf{V}^n) + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}^n$$

$$\left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{V}^{n+1}) + \mathbf{D}\right]\mathbf{V}^{n+1} \approx \left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^n, \mathbf{V}^n) + \mathbf{D}\right]\mathbf{V}^n$$

$$\left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{V}^{n+1}) + \frac{1}{Pr}\,\mathbf{D}\right]\mathbf{T}^{n+1} \approx \left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{V}^{n+1}) + \frac{1}{Pr}\,\mathbf{D}\right]\mathbf{T}^n$$

とおく．次に，式 (16) の浮力項についても

$$\frac{Gr}{Re^2}\,\mathbf{M}\mathbf{T}^{n+1} \approx \frac{Gr}{Re^2}\,\mathbf{M}\mathbf{T}^n$$

とする．さらに, 式 (15), (16), (18) の左辺第 1 項の行列 $\mathbf{M} = (m_{ij})$ を次式で定義される対角行列 $\overline{\mathbf{M}} = (\overline{m}_{ij})$ で置き換える．

$$\overline{m}_{ij} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{NN} m_{ik} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{20}$$

ここに NN は，速度と温度の節点の総数を表し，行列 $\mathbf{M}$ の次数に等しい．こうして，時間方向に離散化された式が

$$\overline{\mathbf{M}}\mathbf{U}^{n+1} - \Delta t\,\mathbf{H}_x\,\mathbf{P}^{n+1} = \overline{\mathbf{M}}\mathbf{U}^n - \Delta t\left\{\left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^n, \mathbf{V}^n) + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}^n\right\} \tag{21}$$

$$\overline{\mathbf{M}}\mathbf{V}^{n+1} - \Delta t\,\mathbf{H}_y\,\mathbf{P}^{n+1} = \overline{\mathbf{M}}\mathbf{V}^n - \Delta t\left\{\left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^n, \mathbf{V}^n) + \mathbf{D}\right]\mathbf{V}^n - \frac{Gr}{Re^2}\,\mathbf{M}\mathbf{T}^n\right\} \tag{22}$$

$$\mathbf{h}_{xe}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{u}_e^{n+1} + \mathbf{h}_{ye}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{v}_e^{n+1} = 0 \quad (e = 1, 2, \cdots, NE) \tag{23}$$

$$\overline{\mathbf{M}}\mathbf{T}^{n+1} = \overline{\mathbf{M}}\mathbf{T}^n - \Delta t\left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{V}^{n+1}) + \frac{1}{Pr}\,\mathbf{D}\right]\mathbf{T}^n \tag{24}$$

のように得られる．式 (21)，(22)，(23) を解いて速度 $\mathbf{U}^{n+1}$ と圧力 $\mathbf{P}^{n+1}$ を求め，その結果を用いて式 (24) より温度 $\mathbf{T}^{n+1}$ を求める．この計算手順を，時間を Δt ずつ進めながら実行する．このとき，たとえば，式 (24)

を解く際に行列 $\overline{\mathbf{M}}$ の逆行列を計算しなければならないが，この行列は対角行列であるから，対角成分の逆数を求めるだけでよく，計算時間の大幅な短縮を図ることができる．これが行列 $\mathbf{M}$ を $\overline{\mathbf{M}}$ で置き換えた理由である．時間を進めながら速度と圧力を求める計算には，3.4 節で述べる流速圧力同時緩和法が用いられる．

3.3 温度の流出境界条件式の離散化

式 (6) の第 2 式を，時間 t に関して前進差分で近似し，空間変数 x に関して後退差分で近似すると

$$T^{n+1}(x,y) = T^n(x,y) - \frac{U\,\Delta t}{\Delta x}\left[T^n(x,y) - T^n(x-\Delta x, y)\right] \tag{25}$$

となる．点 (x,y) を境界 Γ_2 上の節点として，式 (25) より $T^{n+1}(x,y)$ を求め，求めた値をエネルギ方程式 (24) を解く際のディリクレ型境界条件

$$T = T^{n+1} \qquad (\,\Gamma_2\ \text{上}) \tag{26}$$

として用いる．

3.4 流速圧力同時緩和法

非圧縮粘性流れの数値解析において，圧力は非圧縮条件 (3) が成立するように決定される．この場合，式 (3) には圧力が陽に含まれていないために，この圧力計算には一般に陰解法が用いられ，連立 1 次代数方程式を解くことになる．ところで最近の流れ解析では，計算の高精度化という要求から，非常に細かい，自由度の多い要素分割を用いるようになってきており，その結果大規模な行列計算を扱わなければならなくなってきている．そこで，計算機メモリの限られた容量の中で大規模計算を効率よく実行するために EBE 法 (element-by-element method) と呼ばれる考え方が注目を集めている．これは，連立 1 次代数方程式の求解を要素ごと (element-by-element) に行うものである．本研究の流れ計算に用いる流速圧力同時緩和法も EBE 法の一種であり，連立 1 次代数方程式を組むことなく計算を進めることができる．時刻 t^n における流速と圧力を知って，時刻 t^{n+1} におけるそれらの値を求めるための流速圧力同時緩和法の手順は以下のとおりである．

まず，式 (21)，(22) の $\mathbf{P}^{n+1}$ を $\mathbf{P}^n$ で置き換えた式

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^n - \Delta t\,\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}\left\{\left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^n,\mathbf{V}^n)+\mathbf{D}\right]\mathbf{U}^n - \mathbf{H}_x\,\mathbf{P}^n\right\} \tag{27}$$

$$\widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^n - \Delta t\,\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}\left\{\left[\mathbf{A}(\mathbf{U}^n,\mathbf{V}^n)+\mathbf{D}\right]\mathbf{V}^n - \mathbf{H}_y\,\mathbf{P}^n - \frac{Gr}{Re^2}\,\mathbf{M}\mathbf{T}^n\right\} \tag{28}$$

によって，中間的な速度の成分 $\widetilde{\mathbf{U}}$, $\widetilde{\mathbf{V}}$ を求める．この速度成分は，一般には非圧縮条件 (23) を満足していない．そこで次に，式 (23) が満たされるように $\widetilde{\mathbf{U}}$, $\widetilde{\mathbf{V}}$ に補正を加えると同時に，圧力 $\mathbf{P}^{n+1}$ を求める計算を行う．この計算は次に述べるように反復的に行われる．

k を反復回数を表す変数として，k 回の反復計算後の結果を $\mathbf{U}^{n+1,(k)}$, $\mathbf{P}^{n+1,(k)}$ のように表す．そして，反復計算の初期値を

$$\mathbf{U}^{n+1,(0)} = \widetilde{\mathbf{U}}, \qquad \mathbf{V}^{n+1,(0)} = \widetilde{\mathbf{V}}, \qquad \mathbf{P}^{n+1,(0)} = \mathbf{P}^n \tag{29}$$

とおく．いま，反復計算が k 回行われ，速度と圧力の第 k 近似値 $\mathbf{U}^{n+1,(k)}$, $\mathbf{V}^{n+1,(k)}$, $\mathbf{P}^{n+1,(k)}$ が得られているとする．そこで，e 番目の有限要素 Ω_e に注目し，この要素で速度の発散 $\partial u^{n+1,(k)}/\partial x + \partial v^{n+1,(k)}/\partial y$ に相当する $D_e^{(k)}$ を

$$D_e^{(k)} = \frac{1}{A_e}\left[\mathbf{h}_{xe}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{u}_e^{n+1,(k)} + \mathbf{h}_{ye}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{v}_e^{n+1,(k)}\right] \tag{30}$$

で計算する．ここに A_e は要素 Ω_e の面積である．もし，$\left|D_e^{(k)}\right|$ があらかじめ与えた微小量 ε よりも小さければ，この要素では式 (23) が成り立っていると見なして，以下の圧力更新と速度修正は行わない．$\left|D_e^{(k)}\right|$ が ε よりも大きい場合は，

$$\Delta p_e^{(k)} = -\lambda_e \, D_e^{(k)} \tag{31}$$

で，Ω_e の圧力 $p_e^{n+1,(k)}$ に対する修正量 $\Delta p_e^{(k)}$ を計算する．ここに，λ_e は要素ごとに大きさの異なる正定数である．この圧力修正量を用いて，要素 Ω_e の圧力を

$$p_e^{n+1,(k+1)} = p_e^{n+1,(k)} + \Delta p_e^{(k)} \tag{32}$$

のように更新する．圧力の変化はナビエ・ストークス方程式を通じて速度の変化をもたらすから，Ω_e の節点での速度成分を

$$\mathbf{u}_e^{n+1,(k+1)} = \mathbf{u}_e^{n+1,(k)} + \Delta t \, \left[\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}\right]_e \mathbf{h}_{xe} \, \Delta p_e^{(k)} \tag{33}$$

$$\mathbf{v}_e^{n+1,(k+1)} = \mathbf{v}_e^{n+1,(k)} + \Delta t \, \left[\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}\right]_e \mathbf{h}_{ye} \, \Delta p_e^{(k)} \tag{34}$$

のように修正する．ここに $\left[\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}\right]_e$ は，行列 $\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}$ の成分のうち，要素 Ω_e の速度の節点に対応する成分だけを取り出した小対角行列である．

式 (30) から式 (34) までの計算を全要素で 1 回ずつ行う．これを $(k+1)$ 回目の修正計算とし，このような計算を，すべての要素で $|D_e^{(k)}| < \varepsilon$ が満たされるまで繰り返し行う．たとえば，この反復計算が α 回で収束したとすると，時刻 t^{n+1} における速度と圧力は

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1,(\alpha)}, \qquad \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^{n+1,(\alpha)}, \qquad \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1,(\alpha)} \tag{35}$$

で与えられる．これで時刻 t^{n+1} における計算は終了する．このあと，時刻を Δt だけ進めて，時刻 t^{n+2} における計算を式 (27)，(28) から始める．

最後に，式 (31) に現れる係数 λ_e について述べておく．式 (33) の両辺に左から $\mathbf{h}_{xe}^{\mathrm{T}}/A_e$ をかけ，式 (34) の両辺に左から $\mathbf{h}_{ye}^{\mathrm{T}}/A_e$ をかけて，それらを辺々加えると

$$D_e^{(k+1)} = D_e^{(k)} + \frac{\Delta t}{A_e}\left(\mathbf{h}_{xe}^{\mathrm{T}} \left[\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}\right]_e \mathbf{h}_{xe} + \mathbf{h}_{ye}^{\mathrm{T}} \left[\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}\right]_e \mathbf{h}_{ye}\right) \Delta p_e^{(k)} \tag{36}$$

を得る．圧力を $\Delta p_e^{(k)}$ だけ変化させると，速度が式 (33)，(34) のように変化する．その結果，速度成分 $\mathbf{u}_e^{n+1,(k+1)}$，$\mathbf{v}_e^{n+1,(k+1)}$ が非圧縮条件 (23) を満たす値になると考えると $D_e^{(k+1)} = 0$ である．そこで，式 (36) において $D_e^{(k+1)} = 0$ とおくと

$$\Delta p_e^{(k)} = -\frac{A_e}{\Delta t \left(\mathbf{h}_{xe}^{\mathrm{T}} \left[\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}\right]_e \mathbf{h}_{xe} + \mathbf{h}_{ye}^{\mathrm{T}} \left[\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}\right]_e \mathbf{h}_{ye}\right)} D_e^{(k)} \tag{37}$$

を得る．この式と式 (31) を比較すると，係数 λ_e の計算式

$$\lambda_e = \frac{A_e}{\Delta t \left(\mathbf{h}_{xe}^{\mathrm{T}} \left[\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}\right]_e \mathbf{h}_{xe} + \mathbf{h}_{ye}^{\mathrm{T}} \left[\overline{\mathbf{M}}^{\,-1}\right]_e \mathbf{h}_{ye}\right)} \tag{38}$$

を得る．

4　放熱効果の評価法

放熱の効果は，熱伝達率の無次元量であるヌッセルト数 Nu を用いて評価する．まず，発熱体表面 (Γ_4) 上の各節点で，次式によって局所ヌッセルト数 $(Nu)_{\rm local}$ を計算する．

$$(Nu)_{\rm local} = \frac{\partial T}{\partial n} \tag{39}$$

局所ヌッセルト数を Γ_4 上で平均化して，瞬間平均ヌッセルト数 $(Nu)_t$ を求める．この瞬間平均ヌッセルト数を時間の関数としてプロットすると，たとえば Fig. 5 のようなグラフを得る．このグラフより，$(Nu)_t$ の時間変動の振幅が一定な部分で時間平均

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} (Nu)_t \, dt \tag{40}$$

を求める．こうして得られる平均ヌッセルト数 $\overline{Nu}$ を放熱効果の評価の指標とする．本研究では $\Delta\tau = 50$ とする．

式 (39) の温度勾配の計算には差分法を用いる．Fig. 6 のような，法線 n 上に隣接して並ぶ 3 個の節点を考える．P を発熱体表面上の点とし，点 P において $\partial T/\partial n$ を求めるものとする．法線に沿って測った $\overline{\rm PQ}$ 間, $\overline{\rm PR}$ 間の距離をそれぞれ h_1, h_2 として，点 Q, R における温度 $T_{\rm Q}$, $T_{\rm R}$ を点 P を中心とするテイラー級数に展開すると，

$$T_{\rm Q} = T_{\rm P} - h_1\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\rm P} + \frac{h_1^2}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial n^2}\right)_{\rm P} - \cdots \tag{41}$$

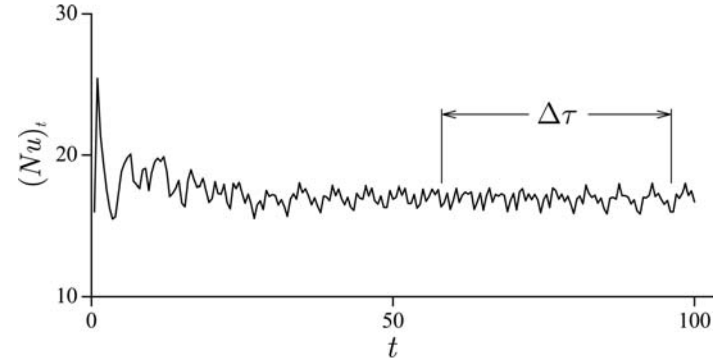


Fig. 5　An example of time history of the instantaneous average Nusselt number $(Nu)_t$

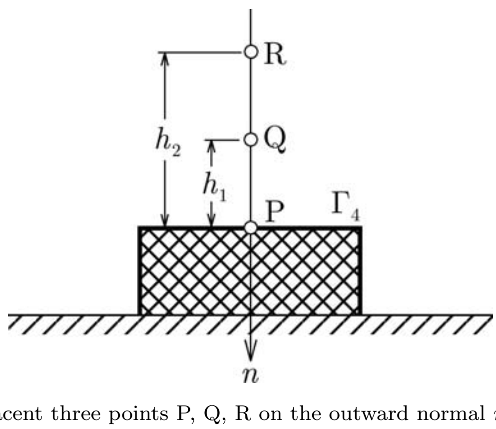


Fig. 6　Adjacent three points P, Q, R on the outward normal n drawn on Γ_4

$$T_{\mathrm{R}} = T_{\mathrm{P}} - h_2\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\mathrm{P}} + \frac{h_2^2}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial n^2}\right)_{\mathrm{P}} - \cdots \tag{42}$$

となる．ここで，h_1, h_2 の 3 乗以上を含む項を無視し，上の 2 式から $(\partial^2 T/\partial n^2)_{\mathrm{P}}$ を消去したのち，$(\partial T/\partial n)_{\mathrm{P}}$ について解くと，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\mathrm{P}} = \frac{(h_2^2 - h_1^2)T_{\mathrm{P}} - h_2^2 T_{\mathrm{Q}} + h_1^2 T_{\mathrm{R}}}{h_1 h_2 (h_2 - h_1)} \tag{43}$$

を得る．

5　数値計算と結果の考察

5.1　計算条件

Fig. 7 に，有限要素メッシュの 1 例を示す．要素総数は 8400，節点総数は 8748 である．ついたてと発熱体の間隔を変える場合，要素総数と節点総数は一定に保たれるが，ついたての高さを変える場合は，ついたての高さを 0.1 変えるごとに要素数が 12，節点数が 9 だけ増減する．

流れのレイノルズ数は $Re = 10^3$, 10^4, 10^5 の 3 通りとし，グラスホフ数は $Gr = 1.5 \times 10^4$，プラントル数は $Pr = 0.6667$ とする．時間増分は $\Delta t = 10^{-3}$ とする．

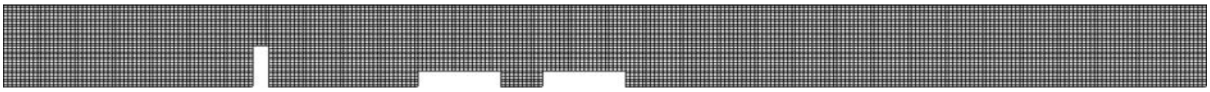


Fig. 7　Finite element mesh ($H = 0.5$, $D = 2.0$)

5.2　ついたて–発熱体間距離と平均ヌッセルト数の関係

Fig. 8 に，ついたて–発熱体間距離 D と平均ヌッセルト数 $\overline{Nu}$ の関係を示す．ついたての高さは $H = 0.5$ とする．図中のついたて–発熱体間距離に依らず平均ヌッセルト数が一定のグラフは，ついたてを設置してない場合の計算結果である．

Fig. 8 より，各レイノルズ数において，ついたてを設置した場合はついたてを設置していない場合に比べて放熱効果が高いことがわかる．平均値で比べると，$Re = 10^3$ の場合で 1.55 倍，$Re = 10^4$ の場合で 1.66 倍，$Re = 10^5$ の場合で 1.61 倍の放熱効果が得られている．したがって，ついたてを設置した冷却システムは放熱促進に効果的であると言える．

Fig. 8 において，レイノルズ数が大きいほど平均ヌッセルト数が大きいことが示されている．この理由は次のように考えられる．Fig. 9 は発熱体表面付近の瞬間の温度分布をレイノルズ数ごとに示したものである．これを見ると，レイノルズ数が大きいほど温度境界層が薄くなっている．温度境界層は，流体が発熱体に及ぼすせん断力によってはぎ取られるが，そのせん断力はレイノルズ数の大きい流れほど大きい．この結果，レイノルズ数が大きいほど平均ヌッセルト数も大きくなると考えられる．

さて，Fig. 8 のついたてがある場合のグラフを見ると，レイノルズ数ごとに平均ヌッセルト数の最大値が存在し，その最大平均ヌッセルト数を与えるついたてと発熱体の間の最適な距離が存在することがわかる．このような最適距離が存在する理由を Fig. 10 で考えてみる．Fig. 10 は，$Re = 10^4$ の場合について，ついたて–発熱体間距離 D が異なる 4 ケースの流線パターンと温度分布を示したものである．温度分布を示す色コンターのスケールは Fig. 9 と同じである．Fig. 8 で平均ヌッセルト数の最大値を与えるついたて–発熱体間距離はおよそ 3.6 である．Fig. 10 の $D = 3.6$ の図を他のケースの図と比べると，二つの発熱体の間の溝の温度が $D = 3.6$ のケースは他のケースよりも低いことがわかる．これは，ついたて上端から生じた渦が発熱体間の溝に入り込み，その部分に生じる高温の流体を運び去るためと考えられる．$D = 3.6$ 以外のケースでは，溝の中に流れがうまく入り込めないために熱が蓄積していると考えられる．このように，発熱体が複数存在する場合，発熱体

間の溝に貯まる熱をいかにうまく取り去ることができるかが系全体の放熱促進にとって重要である．そのためについたての最適な位置を見つけることが重要である．

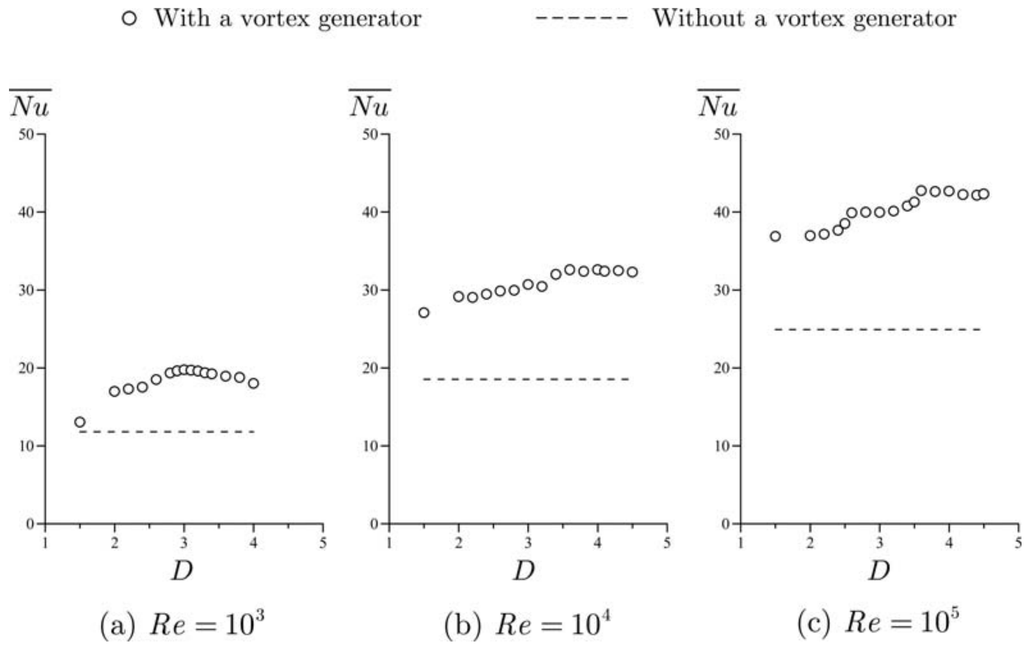


Fig. 8　Variation of average Nusselt number with the interval between a plate and heated obstacles ($H = 0.5$)

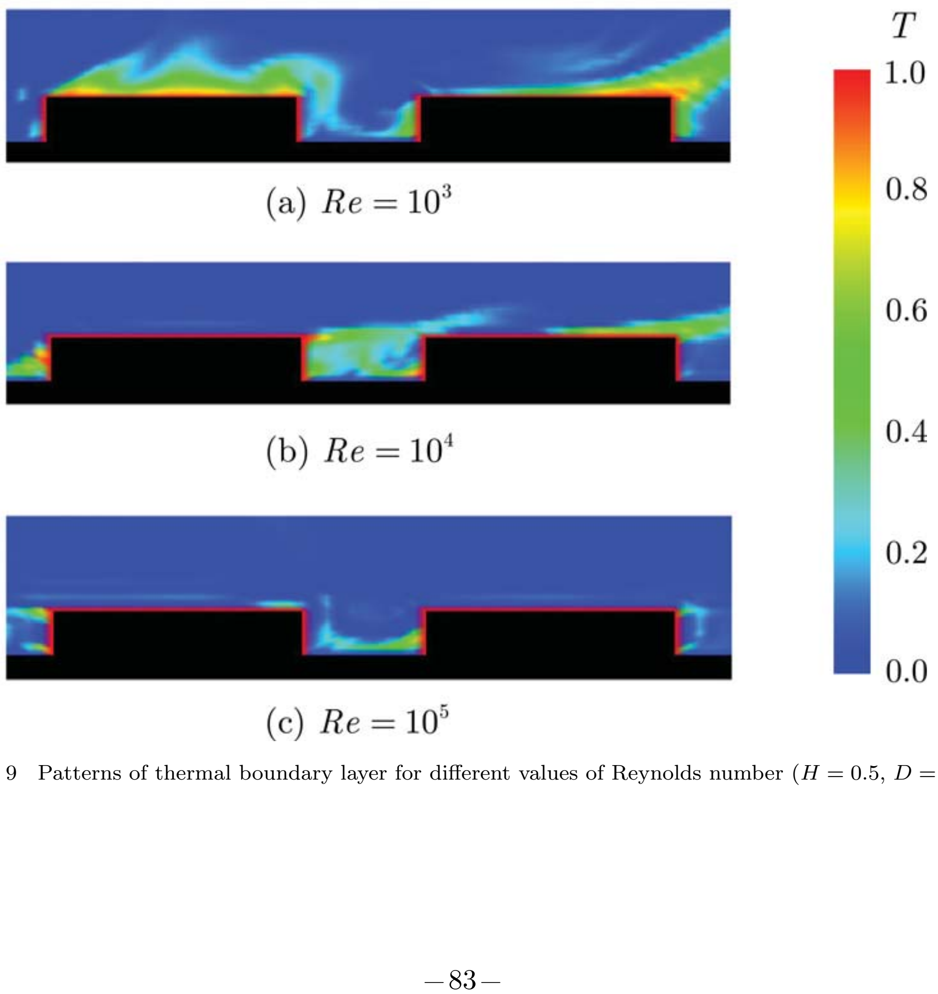
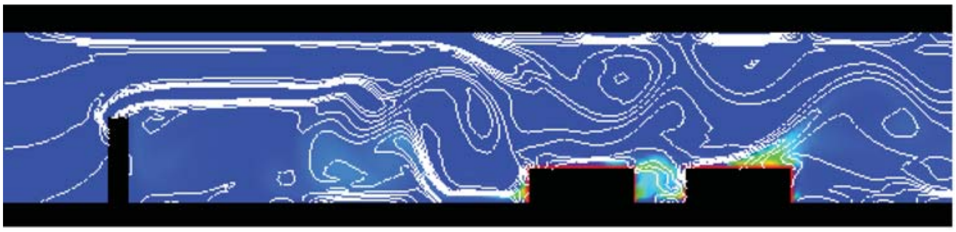
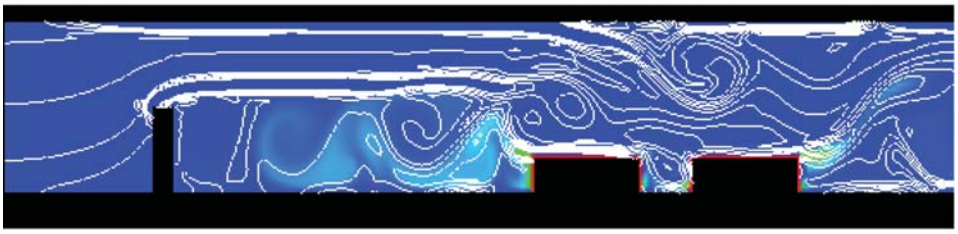


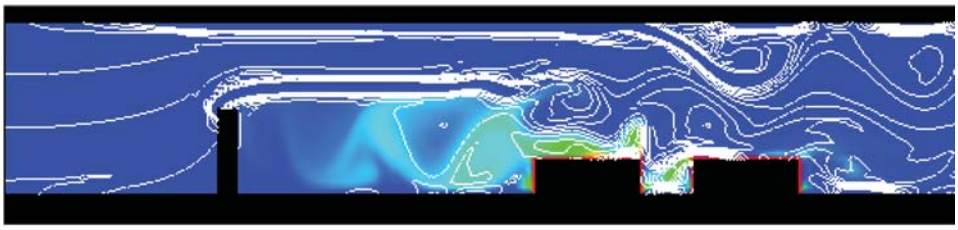
Fig. 9　Patterns of thermal boundary layer for different values of Reynolds number ($H = 0.5$, $D = 2.0$)



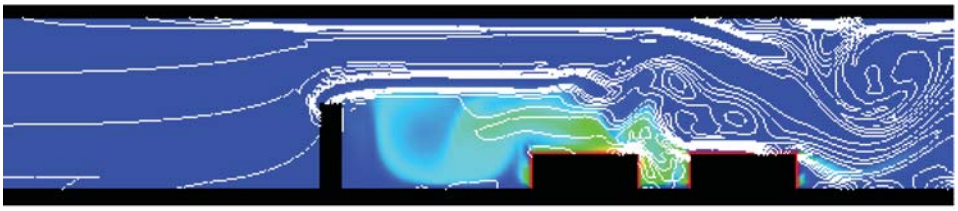
(a) $D = 4.0$



(b) $D = 3.6$



(c) $D = 3.0$



(d) $D = 2.0$

Fig. 10　Flow patterns for different size of the interval between a plate and heated obstacles ($Re = 10^4$, $H = 0.5$)

5.3　ついたての高さと平均ヌッセルト数の関係

Fig. 11 に，ついたての高さ H と平均ヌッセルト数の関係を示す．ついたて–発熱体間距離は 2.0，3.0，4.0 とし，ついたての高さは 0.3 から 0.1 ずつ変化させ，0.8 まで計算を行った．レイノルズ数を $Re = 10^4$ とする．図を見ると，ついたてが高くなるにつれ，全体的に平均ヌッセルト数の値が大きくなる傾向が見られる．この理由を Fig. 12 で考えてみる．Fig. 12 は，ついたて–発熱体間距離が 3.0 の場合について，ついたての高さが異なる 3 ケースの温度分布と速度ベクトル分布を示したものである．温度分布を示す色コンターのスケールは Fig. 9 と同じである．速度ベクトルの図では速度の大きさの違いを色で表示しており，赤が最も速い流れを，青がもっとも遅い流れを示している．ついたての高さが低いと，ついたて後流の渦の規模が小さく，放熱効果が上がらない．ついたての高さが高くなるにつれて，天井とついたての間の流れが速くなり．渦の規模が

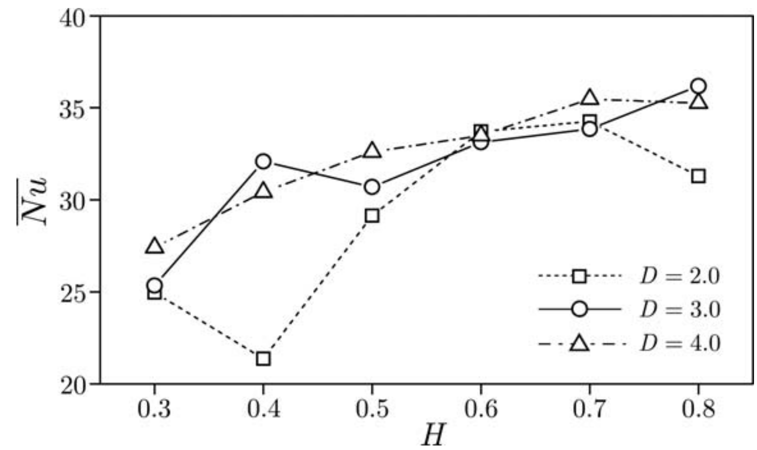


Fig. 11　Variation of average Nusselt number with the height of plate ($Re = 10^4$)

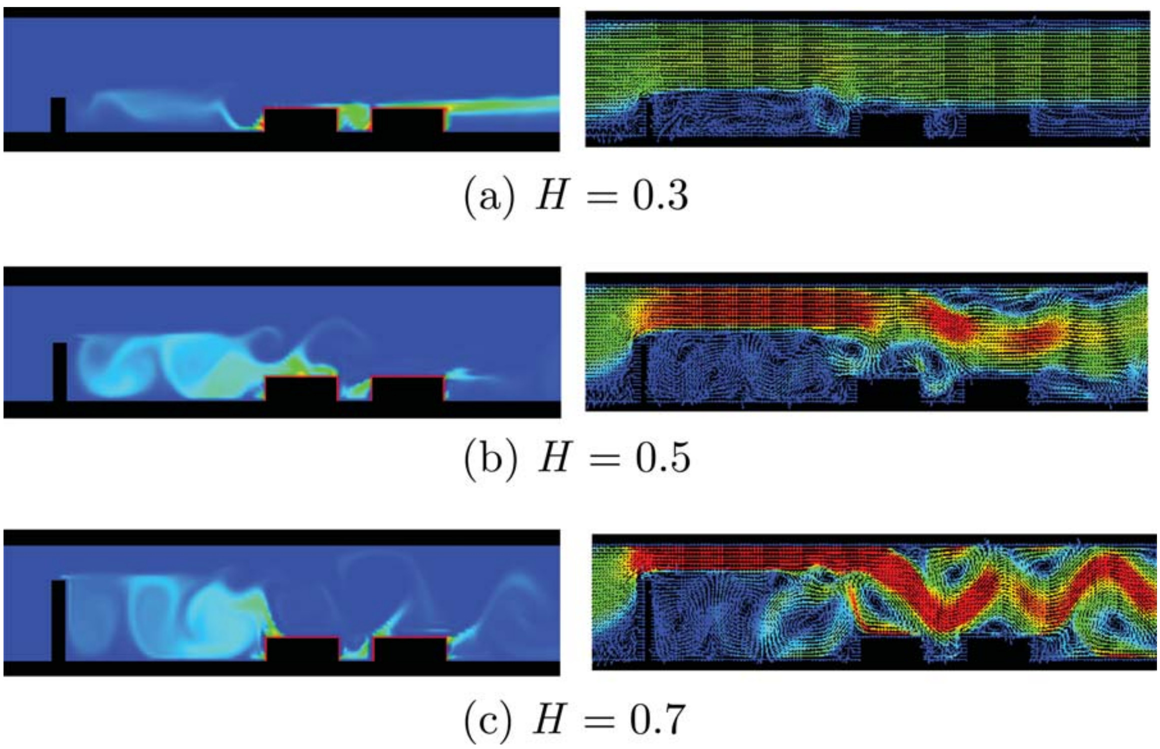


Fig. 12　Temperature and flow patterns for different size of the plate height (left: temperature, right: velocity vector) ($Re = 10^4$, $D = 3.0$)

大きくなっている．その結果，温度境界層をはぎ取る効果が高まり，放熱が促進されると考えられる．しかし，ついたての高さを高くしすぎると，流路内の流れが妨げられて渦の規模が小さくなってしまい，放熱効果が弱まってしまう．Fig. 11 の $D = 4.0$ のグラフにおいて，$H = 0.8$ の平均ヌッセルト数が $H = 0.7$ のときよりも小さくなっているのはそのためであると考えられる．

6　おわりに

発熱体からの放熱促進の手段として，発熱体上流に鉛直に置いた平板の後流に生じる渦を利用する方法を提案し，その性能を数値実験で検証した．その結果，平板を設置する場合は設置しない場合に比べておよそ 1.6 倍の放熱効果が得られること，平板と発熱体の間の距離に，放熱効果が最も高くなる最適な距離が存在することがわかった．

今回の数値実験では，発熱体上部に天井を想定した．天井を設けず，発熱体上部を解放空間として計算すると平板から生じる渦が拡散してしまい，満足のいく放熱効果は得られなかった．したがって，本論文で提案した方法において天井の設置は必須と考えられる．

本論文では 2 次元層流という仮定のもとで数値計算を行ったため，結論は定性的な表現にとどまった．放熱効果を定量的に把握するためには乱流効果や平板側面から発生する渦の効果も考慮する必要がある．そのためには 3 次元解析を行わなければならない．次の課題としたい．

参考文献

[1] Yang, S.-J., “A Numerical Investigation of Heat Transfer Enhancement for Electronic Devices Using an Oscillating Vortex Generator”, Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 42, pp. 269–284 (2002).

[2] 近藤裕貴, “Kármán 渦列を利用した熱源からの放熱促進に関する数値解析”, 卒業論文, 中央大学 (2004).

[3] 中山　司, 岩崎　潤, “熱移動を伴う管内粘性流の有限要素法解析における流出境界条件に関する検討”, 日本機械学会論文集 (B 編), 58 巻 554 号, pp. 2989–2994 (1992).

[4] Mizukami, A., “Some Integration Formulas for a Four-Node Isoparametric Element”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 59, pp. 111–121 (1986).

[5] Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 32, pp. 199–259 (1982).