

マルコフ・スイッチング・モデルのベイズ推定 山形県鉱工業生産指数への応用¹

砂 田 洋 志

(人文学部 法経政策学科)

1. はじめに

経済は日々変化するので、長い期間には大きな変化も発生する。そのような変化に対応しえるモデルとしては、レジーム・スイッチ・モデルが挙げられる。レジーム・スイッチ・モデルでは、まず分析期間内の経済状態の変化に応じて、分析期間内の経済をいくつかのレジーム(状態)に分類した上で、それぞれのレジームごとに経済変数に関するモデルを構築する。その後、それらのモデルを状態変数と結びつけることによって、一つのモデルを構築する。たとえば経済を拡張期と収縮期という2種類の状態に分けて、それぞれのレジームにおいて別々のモデルを構築してから一つのモデルにする。

本論文で紹介するマルコフ・スイッチング・モデル(Markov Switching Model、以後はMSモデルと略記する)はHamilton(1989)で提案された非線形モデルであり、状態がマルコフ過程に従って確率的に変化するレジーム・スイッチ・モデルである。各時点において経済がどの状態に属しているかは状態変数で記述され、その確率分布は観測値から推定される。

本論文では、MSモデルを紹介した後、ベイズ統計学の立場から同モデルのパラメータの推定方法を紹介する。その後で、同モデルを用いて山形県の鉱工業生産指数(Index of Industrial Production、以後はIIPと略記する)を分析する。

MSモデルは、多様な経済データの分析に利用することが可能であるが、そもそもHamilton(1989)は同モデルによる米国GDPの分析を通じて、同国の景気を分析した。MSモデルによって景気を分析する場合、後述する通り、分析対象は一国である場合が多い。日本を例にとれば、日本全体の景気分析が中心なのであって、関東や近畿といった地域の分析はもちろん、一つの県の分析も従来あまり行われてこなかった。しかし、国全体と地方の景気にズレがあるとも言われているので、地方の景気を分析することの意義は小さくないであろう。以上の理由によって、本論文では、MSモデルを用いた実証分析の例として山形県の景気分析を選んでいる。

一国を分析するのに利用されるデータが必ずしも県単位で長期間にわたって得られるとは限

¹ 本論文を書くにあたり、山形県庁統計企画課の方々からデータの収集でお世話になるとともに、接続方法について教えていただいた。ここに謝意を表したい。

らないが、IIPの場合、四半期データが長期にわたって確実に得られる。だから、山形県の景気分析をIIPにMSモデルを適用することで行っている。

本論文では、MSモデルの応用としてIIPを用いた景気分析を選んでいるので、以下ではMSモデルの先行研究として、景気分析への応用研究を中心に簡単に紹介してみよう。Hamilton（1989）は、状態がマルコフ過程に従って変化する一変数ARモデル（MS-ARモデル）と米国の実質GDPを用いて、各時点において拡張期である確率と収縮期である確率を計算した。計算された確率に基づいて景気転換点を推定した後で、NBERの報告した景気転換点と比較している。内山（2002）は、状態がマルコフ過程に従って変化する多変数ARモデル（MS-VARモデル）を用いて、米国の景気転換点を推定している。内山（2003）は同様の方法で日本の景気転換点を推定している。日本国内の景気転換点をMSモデルによって分析した研究としては、近畿地方の鉱工業生産指数（Index of Industrial Production）を利用した荒木（2000）が挙げられる。

Kim=Nelson（1998）は、好景気と不景気では景気の変動が異なる（非対称）であると考えて、Stock=Watson（1988）で提案されたダイナミック・ファクター・モデルにMSモデルを組み込んだモデルを作り、ベイジアン立場から推定している。日本のデータについては、Watanabe（2003）で分析されている。²

ARモデルやVARモデルにMSモデルを組み込んだモデルの他、GARCHモデルや確率ポラティリティーモデルにMSモデルを組み込んだモデルも考案されており、ファイナンスの研究に利用されている。³

本論文では、ベイズ統計学を用いてMSモデルのパラメータを推定した後、景気の拡張期と収縮期も推定し、同モデルが各期をうまく捉えられるのか検討する。したがって本論文は、ベイズ統計学の立場から、Hamilton（1989）の研究を山形県のIIPに応用したものとえよう。

本論文の構成であるが、第2節でMSモデル、第3節で同モデルの推定方法について紹介する。そして第4節でデータとして利用する鉱工業生産指数の説明をした後に、第5節で推定結果を示して検討する。最後に第6節で結論を述べる。

2. マルコフ・スイッチング・モデルとは

MSモデルとは、時点毎に状態が確率的に変化し、それに応じてパラメータが変化するモデルであり、幾つかのバリエーションがある。たとえば、モデルとして回帰モデルを考えると、状態がマルコフ過程に従って確率的に変化するのに伴って、パラメータである回帰係数なども変化するモデルを考えることができる。このモデルを数式で表すならば以下のように記述できよう。

² 日本のデータを用いてダイナミック・ファクター・モデルを分析した研究としては、大日（1992）、Fukuda=Onodera（2001）がある。

³ 里吉（2004）はMS-GARCHモデルを用いて日本の株式市場を分析している。

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \beta_{11} + \beta_{12}X_{2t} + \beta_{13}X_{3t} + \cdots + \beta_{1,p-1}X_{p-1,t} + \beta_{1,p}X_{p,t} + u_{1t} & S_t=1 \\
 Y_t &= \beta_{21} + \beta_{22}X_{2t} + \beta_{23}X_{3t} + \cdots + \beta_{2,p-1}X_{p-1,t} + \beta_{2,p}X_{p,t} + u_{2t} & S_t=2 \\
 &\dots \\
 Y_t &= \beta_{K1} + \beta_{K2}X_{2t} + \beta_{K3}X_{3t} + \cdots + \beta_{K,p-1}X_{p-1,t} + \beta_{K,p}X_{p,t} + u_{Kt} & S_t=K \\
 p_{ij} &= \Pr[S_t=j | S_{t-1}=i] & i,j=1,2,\dots,K
 \end{aligned}$$

このモデルでは K 種類の状態を考え、時点毎に状態が確率的に変化する様に設定されており、状態が変化すればそれに伴って回帰係数も変化する。時点 $t-1$ の状態から時点 t の状態への変化が、時点 $t-1$ の状態に依存して確率的に決定されることから、マルコフ・スイッチング・モデルと呼ばれる。

さらに理解を深めるために、別の例を挙げてみよう。パラメータとして Y_t の平均を考え、状態がマルコフ過程に従って確率的に変化するのに伴って、 Y_t の平均も変化するモデルが考えられる。式で表せば以下の通りである。

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \mu_{S_t} + u_t & S_t=1,2 \\
 \mu_{S_t} &= \mu_1 S_{1t} + \mu_2 S_{2t} & S_{1t}, S_{2t}=0,1 \\
 p_{ij} &= \Pr[S_t=j | S_{t-1}=i] & i,j=1,2
 \end{aligned}$$

このモデルでは 2 種類の状態を考え、時点毎に状態が確率的に変化する様に設定されており、以下の 2 つのモデルの間を確率的に変化する。

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \mu_1 + u_t & u_t \sim N(0, \sigma^2) \\
 Y_t &= \mu_2 + u_t
 \end{aligned}$$

同様に、 Y_t の分散が変化するモデルも考えられる。

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \mu + u_t & u_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2) & S_t=1,2 \\
 \sigma_{S_t}^2 &= \sigma_1^2 S_{1t} + \sigma_2^2 S_{2t} & S_{1t}, S_{2t}=0,1 \\
 p_{ij} &= \Pr[S_t=j | S_{t-1}=i] & i,j=1,2
 \end{aligned}$$

このモデルでも 2 種類の状態を考え、時点毎に状態が確率的に変化する様に設定されており、以下の 2 つのモデルの間を確率的に変化する。

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \mu + u_{1t} & u_{1t} \sim N(0, \sigma_1^2) \\
 Y_t &= \mu + u_{2t} & u_{2t} \sim N(0, \sigma_2^2)
 \end{aligned}$$

MSモデルのバリエーションは豊富で、自己回帰モデルと上述した平均や分散が変化するMSモデルを組み合わせた、以下のようなモデルがあり、マルコフ・スイッチング・自己回帰モデルと呼ばれている。

$$Y_t - \mu_{S_t} = \phi_1(Y_{t-1} - \mu_{S_{t-1}}) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu_{S_{t-2}}) + \dots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu_{S_{t-p}}) + u_t \quad u_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2) \quad \dots(1)$$

$$\mu_{S_t} = \mu_1 S_{1t} + \mu_2 S_{2t} + \dots + \mu_K S_{Kt} \quad \dots(2)$$

$$\sigma_{S_t}^2 = \sigma_1^2 S_{1t} + \sigma_2^2 S_{2t} + \dots + \sigma_K^2 S_{Kt} \quad \dots(3)$$

$$p_{ij} = \Pr[S_t = j | S_{t-1} = i] \quad i, j = 1, 2, \dots, K \quad \dots(4)$$

このモデルは K 種類の状態を考え、時点毎に状態が確率的に変化する。各時点における Y_t の平均 μ_{S_t} は時点 t の状態によって変化するが、平均からの乖離 $Y_t - \mu_{S_t}$, $Y_{t-1} - \mu_{S_{t-1}}$, $Y_{t-2} - \mu_{S_{t-2}}$... は同じ回帰係数をもつ自己回帰モデルに従うと仮定されている。また各時点における u_t の分散 $\sigma_{S_t}^2$ も時点 t の状態によって変化する と仮定されている。

3. マルコフ・スイッチング・モデルの推定方法

この節では、山形県のIIPの分析に応用するMSモデルを提示して、そのモデルの推定方法を紹介する。Hamilton(1989)に従って、(1)~(4)において $K=2$ と特定したモデル、つまり、状態としては拡張期と収縮期という2つの状態を考えて、平均と分散が時点ごとに変化する自己回帰モデルを基本形として取り上げる。IIPの変化率の平均と標準偏差を上昇期と下落期に分けて計算すると、下落期の標準偏差は上昇期の標準偏差よりも大きいことが多い。この点をモデルに反映させため、状態1が下落期、状態2が拡張期を表し、状態2の平均は状態1よりも大きい ($\mu_1 < \mu_2$) が、状態2の標準偏差は状態1よりも小さい ($\sigma_1 > \sigma_2$) と仮定する。⁴ したがって推定するモデルは(1')~(4')で記述される。

$$Y_t - \mu_{S_t} = \phi_1(Y_{t-1} - \mu_{S_{t-1}}) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu_{S_{t-2}}) + \dots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu_{S_{t-p}}) + u_t \quad u_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2) \quad \dots(1')$$

$$\mu_{S_t} = \mu_1 S_{1t} + \mu_2 S_{2t} \quad , \quad \mu_1 < \mu_2 \quad \dots(2')$$

$$\sigma_{S_t}^2 = \sigma_1^2 S_{1t} + \sigma_2^2 S_{2t} \quad , \quad \sigma_1 > \sigma_2 \quad \dots(3')$$

$$p_{ij} = \Pr[S_t = j | S_{t-1} = i] \quad i, j = 1, 2 \quad \dots(4')$$

未知パラメータは、 $\mu_1, \mu_2, p_{ij}, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \{S_1, S_2, \dots, S_{T-1}, S_T\}$ である。本論文では、ベイズ統計学に基づいてパラメータを推定するので、各パラメータのフルコ

⁴ 後述するように、誤差項の分散に差がないモデル ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) の推定や分散の大小関係が逆になるモデル ($\sigma_1^2 < \sigma_2^2$) も試みたが、(1')~(4')で構成されるモデルと比べて、拡張期と収縮期をうまく検出できなかった。そこでこのモデルの推定方法と推定結果を本論文では紹介する。

ンディショナルな事後分布を導出する必要がある。そこで、以下の小節では各パラメータのフルコンディショナルな事後分布の導出方法を示す。⁵

3.1 状態変数 $\{S_1, S_2, \dots, S_{T-1}, S_T\}$ のサンプリング

3.1.1 推定方法の概略

状態変数 $\{S_1, S_2, \dots, S_{T-1}, S_T\}$ であるが、1つ1つが未知パラメータであるから、1つ1つのフルコンディショナルな事後分布から推定することが考えられる。こうやって推定する方法をシングルムーブ・サンプラーと言う。つまり、

$$S_1 | S_2, \dots, S_{T-1}, S_T, \mu_1, \mu_2, p_{ij}, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_1^2, \sigma_2^2, Y_1, Y_2, \dots, Y_T$$

$$S_2 | S_1, \dots, S_{T-1}, S_T, \mu_1, \mu_2, p_{ij}, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_1^2, \sigma_2^2, Y_1, Y_2, \dots, Y_T$$

...

$$S_T | S_1, S_2, \dots, S_{T-1}, \mu_1, \mu_2, p_{ij}, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_1^2, \sigma_2^2, Y_1, Y_2, \dots, Y_T$$

を用いて $S_1, S_2, \dots, S_{T-1}, S_T$ を1個1個推定する方法である。

一方、状態変数 $\{S_1, S_2, \dots, S_{T-1}, S_T\}$ を1つの未知パラメータとみなして、 $\{S_1, S_2, \dots, S_{T-1}, S_T\}$ のフルコンディショナルな事後分布から推定することが考えられる。こうやって推定する方法をマルチムーブ・サンプラーと言う。つまり、 $S_1, S_2, \dots, S_{T-1}, S_T | \mu_1, \mu_2, p_{ij}, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_1^2, \sigma_2^2, Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ を用いて $\{S_1, S_2, \dots, S_{T-1}, S_T\}$ を一度に推定する方法である。

マルチムーブ・サンプラーの方が効率的に推定できることが知られているので、本論文ではマルチムーブ・サンプラーを利用する。 $\{S_1, S_2, \dots, S_{T-1}, S_T\}$ をサンプリングするには、MSモデルの状態変数である各期のレジームの確率ベクトルを推定する必要がある。その推定に当たっては、Hamilton(1989)のフィルタリングを利用したKim=Nelson(1999)の方法を用いる。⁶ そこで以下の小節ではHamilton(1989)のフィルタリングとKim=Nelson(1999)に記述されているマルチムーブ・サンプラーを紹介する。本論文では状態数を2、自己回帰のラグ数は p と仮定した上で分析を進める。また条件付確率の表記に当たっては、パラメータ $\mu_1, \mu_2, p_{ij}, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ を記述すべきであるが、以下の3.1.2と3.1.3の内に限って表記を見やすくする目的でこれらのパラメータの記述を省略する。

3.1.2 Hamiltonのベーシック・フィルター⁷

Hamilton(1989)のフィルタリングとは、時点 $t-1$ までの情報 $\{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1}\}$ に基づいた時点 $t-1$ までの状態 $\{S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_{t-p}\}$ の発生確率 $p(S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_{t-p} | Y_{t-1},$

⁵ 3節の説明はKim=Nelson(1999)に大きく負っている。

⁶ 内山(2002)のp97を参照されたい。

⁷ Hamilton(1989)のフィルタリングについてはHamilton(1989)の367ページ以降を参照されたい。

Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1}) を入力して、時点 t までの情報に基づいた時点 t までの状態の発生確率 $p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p+1} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1})$ と $p(S_t | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1})$ を出力するアルゴリズムである。いま出力された $p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p+1} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1})$ を用いて $p(S_{t+1}, S_t, \dots, S_{t-p+2} | Y_{t+1}, Y_t, \dots, Y_{-p+2})$ と $p(S_{t+1} | Y_{t+1}, Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+2})$ を出力すれば、私達は $p(S_t | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1})$ と $p(S_{t+1} | Y_{t+1}, Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+2})$ を得ることになる。だからこの作業を $t = 1$ から T (分析上の最終時点) まで繰り返すことによって $p(S_t | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1})$ を $t = 1$ から T まで得ることができる。以下にこのアルゴリズムにおける計算手順を示す。

ステップ1

$p(S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_{t-p} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ を入力する。この値は $S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_{t-p}$ の組み合わせ方によって 2^p 種類ある。そして、 $p(S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_{t-p} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ に $p(S_t | S_{t-1})$ を掛けて $p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ を計算する。この値は $S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p}$ の組み合わせ方によって 2^{p+1} 種類ある。

ステップ2

s_t を用いて $f(Y_t | S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p}, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p})$ を計算する。この値は $S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p}$ の組み合わせ方によって 2^{p+1} 種類ある。

$$f(Y_t | S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p}, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1}) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{S_t}} \exp \left\{ -\frac{(Y_t - \mu_{S_t} - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_{S_{t-1}}) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_{S_{t-2}}) - \dots - \phi_p(Y_{t-p} - \mu_{S_{t-p}}))^2}{2\sigma_{S_t}} \right\}$$

ステップ3

ステップ2で計算した $f(Y_t | S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p}, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ にステップ1で計算した $p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ を掛けて $p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p}, Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ を計算する。

ステップ4

ステップ3で計算した $p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p}, Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ を $S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p}$ について合計（多重積分）することで、 $f(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ を計算する。

$$f(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1}) = \sum_{S_t=1}^2 \sum_{S_{t-1}=1}^2 \dots \sum_{S_{t-p}=1}^2 p(S_t, S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_{t-p}, Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$$

こうして計算した $f(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ を $t = 1$ から T まで掛け合わせることで、尤度を計算できる。

ステップ5

$p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p}, Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ と、ステップ4で計算した $f(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ を用いて、 $p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p} | Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ を計算する。

$$p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p} | Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1}) = \frac{p(S_t, S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_{t-p}, Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})}{f(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})}$$

この値は $S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p}$ の組み合わせ方によって 2^{p+1} 種類ある。

ステップ6

$p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1})$ を S_{t-p} について積分して、

$$p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p+1} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1}) = \sum_{S_{t-p}=1}^2 p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1})$$

を導出する。さらに多重積分して $p(S_t | Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ を計算する。

$$p(S_t | Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1}) = \sum_{S_{t-1}=1}^2 \dots \sum_{S_{t-p+1}=1}^2 p(S_t, S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_{t-p+1} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1})$$

こうして $p(S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_{t-p} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ から $p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p+1} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1})$ と $p(S_t | Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-p+1})$ を出力する。この作業を $t = T$ まで繰り返すことで、 $p(S_t | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-p+1})$ を $t = 1$ から T まで算出できる。

3.1.3 マルチムーブ・サンプラー

$\tilde{Y}_T = \{Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_2, Y_1\}$ を条件として、 $\tilde{S}_T = \{S_T, S_{T-1}, \dots, S_2, S_1\}$ を生成する方法である。まず $g(\tilde{S}_T | \tilde{Y}_T)$ が以下のように式変形できることをまず述べておこう。

$$\begin{aligned} g(\tilde{S}_T | \tilde{Y}_T) &= g(S_1, S_2, \dots, S_T | \tilde{Y}_T) \\ &= g(S_T | \tilde{Y}_T) \times g(S_{T-1}, S_{T-2}, \dots, S_1 | S_T, \tilde{Y}_T) \\ &= g(S_T | \tilde{Y}_T) \times g(S_{T-1} | S_T, \tilde{Y}_T) \times g(S_{T-2}, S_{T-3}, \dots, S_1 | S_T, S_{T-1}, \tilde{Y}_T) \\ &= g(S_T | \tilde{Y}_T) \times g(S_{T-1} | S_T, \tilde{Y}_T) \times g(S_{T-2} | S_T, S_{T-1}, \tilde{Y}_T) \times \dots \times g(S_1 | S_T, S_{T-1}, \dots, S_2, \tilde{Y}_T) \\ &= g(S_T | \tilde{Y}_T) \times g(S_{T-1} | S_T, \tilde{Y}_{T-1}) \times g(S_{T-2} | S_{T-1}, \tilde{Y}_{T-2}) \times \dots \times g(S_1 | S_2, Y_1) \\ &= g(S_T | \tilde{Y}_T) \times \prod_{t=1}^{T-1} g(S_t | S_{t+1}, \tilde{Y}_t) \end{aligned}$$

したがって、 \tilde{Y}_T を条件として \tilde{S}_T を生成するには、 $g(S_T|\tilde{Y}_T)$ と $g(S_i|S_{i+1}, \tilde{Y}_i)$, $i=1, 2, 3, \dots, T-1$ が必要であり、 S_T, S_{T-1}, \dots, S_1 の順に1つずつ生成して構わないことがわかる。以下では実際に、 \tilde{Y}_T を条件として \tilde{S}_T を生成する方法について説明しよう。

まず、Hamiltonフィルターで計算した $g(S_i|\tilde{Y}_i)$ に基づいて \tilde{Y}_T を条件とした S_T を生成する。次に $\tilde{S}_{T-1} = \{S_{T-1}, S_{T-2}, \dots, S_2, S_1\}$ の生成は、 \tilde{Y}_i, S_{i+1} を条件として S_i を $S_{T-1}, S_{T-2}, \dots, S_1$ の順に生成する。そのためには、 $g(S_i|S_{i+1}, \tilde{Y}_i)$, $i=1, 2, 3, \dots, T-1$ を利用することになるが、 $g(S_i|S_{i+1}, \tilde{Y}_i)$ は以下のように式変形できるので、この式変形を利用して $g(S_i|S_{i+1}, \tilde{Y}_i)$ の値を計算する。

$$g(S_i|S_{i+1}, \tilde{Y}_i) = \frac{g(S_i, S_{i+1}|\tilde{Y}_i)}{g(S_{i+1}|\tilde{Y}_i)} = \frac{g(S_{i+1}|S_i, \tilde{Y}_i)g(S_i|\tilde{Y}_i)}{g(S_{i+1}|\tilde{Y}_i)} = \frac{g(S_{i+1}|S_i)g(S_i|\tilde{Y}_i)}{g(S_{i+1}|\tilde{Y}_i)}$$

$$\therefore \Pr(S_i = i|\tilde{Y}_i, S_{i+1}) = \frac{g(S_{i+1}|S_i = i)g(S_i = i|\tilde{Y}_i)}{g(S_{i+1}|\tilde{Y}_i)} = \frac{g(S_{i+1}|S_i = i)g(S_i = i|\tilde{Y}_i)}{\sum_{j=1}^2 g(S_{i+1}|S_i = j)g(S_i = j|\tilde{Y}_i)}$$

上式の中で $g(S_{i+1}|S_i)$ は推移確率なので、フルコンディショナルな事後分布を計算する場合には既に分かっている。そして $g(S_i|\tilde{Y}_i)$ $i=T-1, T-2, \dots, 2, 1$ はHamiltonフィルターで計算され貯蔵されている。したがって $\Pr(S_i = i|\tilde{Y}_i, S_{i+1})$ を計算するための情報が既にあるのでその値を実際に計算できる。これらの値と一様分布を利用して \tilde{Y}_i, S_{i+1} を条件とした S_i を $S_{T-1}, S_{T-2}, \dots, S_2, S_1$ の順番で生成すると、それらの値は、 \tilde{Y}_T を条件として生成された \tilde{S}_{T-1} の値である。

3.2 μ_1, μ_2 のサンプリング

(1')を式変形すると以下の式になる。

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \dots - \phi_{p-1} Y_{t-p+1} - \phi_p Y_{t-p} = \mu_{S_t} - \phi_1 \mu_{S_{t-1}} - \phi_2 \mu_{S_{t-2}} - \dots - \phi_p \mu_{S_{t-p}} + u_t$$

ここで $Y_t^* = Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \dots - \phi_{p-1} Y_{t-p+1} - \phi_p Y_{t-p}$ とおくと、 $\mu_{S_t} = \mu_1 S_{1t} + \mu_2 S_{2t}$ であるから、上式は以下のように書き直せる。

$$Y_t^* = \mu_1 S_{1t} + \mu_2 S_{2t} - \phi_1 (\mu_1 S_{1t-1} + \mu_2 S_{2t-1}) - \dots - \phi_p (\mu_1 S_{1t-p} + \mu_2 S_{2t-p}) + u_t$$

$$Y_t^* = \mu_1 (S_{1t} - \phi_1 S_{1t-1} - \dots - \phi_p S_{1t-p}) + \mu_2 (S_{2t} - \phi_1 S_{2t-1} - \dots - \phi_p S_{2t-p}) + u_t \quad u_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

そして $S_{it}^* = S_{it} - \phi_1 S_{it-1} - \dots - \phi_p S_{it-p}$ とおくと、上式は以下の様書き直せる。

$$Y_t^* = \mu_1 S_{1t}^* + \mu_2 S_{2t}^* + u_t \quad u_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

s_t で両辺を割ると、上式は以下の様書き直すことができる。⁸

$$\frac{Y_t^*}{\sigma_{S_t}^2} = \mu_1 \frac{S_{1t}^*}{\sigma_{S_t}^2} + \mu_2 \frac{S_{2t}^*}{\sigma_{S_t}^2} + v_t \quad v_t \sim N(0, 1)$$

時点 $t = 1, \dots, T$ の順番で上式を積み上げたものを行列に直すと以下の様に記述できる。

$$\tilde{Y}^* = S\tilde{\mu} + \tilde{v} \quad \tilde{v} \sim N(0, I_T)$$

事前分布を $\tilde{\mu} | \tilde{\sigma}^2, \tilde{\phi} \sim N(a_0, A_0)$ と定めれば、フルコンディショナルな事後分布は以下の通りである。

$$\tilde{\mu} | \tilde{\sigma}^2, \tilde{\phi}, \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T \sim N(a_1, A_1) \quad \dots (5)$$

$$\text{ただし、 } a_1 = (A_0^{-1} + S^* S)^{-1} (A_0^{-1} a_0 + S^* \tilde{Y}^*), \quad A_1 = (A_0^{-1} + S^* S)^{-1}$$

3.3 s_1, s_2, \dots, s_p のサンプリング

(1') は、 $Y_t^{**} = Y_t - \mu_{S_t}$ と置くと、以下の様に書き直すことができる。

$$Y_t^{**} = \phi_1 Y_{t-1}^{**} + \phi_2 Y_{t-2}^{**} + \dots + \phi_{p-1} Y_{t-p+1}^{**} + \phi_p Y_t^{**} + u_t \quad u_t \sim N(0, \sigma_{S_t}^2)$$

s_t で両辺を割ると、上式は以下のように書き直すことができる。

$$\frac{Y_t^{**}}{\sigma_{S_t}^2} = \phi_1 \frac{Y_{t-1}^{**}}{\sigma_{S_t}^2} + \phi_2 \frac{Y_{t-2}^{**}}{\sigma_{S_t}^2} + \dots + \phi_{p-1} \frac{Y_{t-p+1}^{**}}{\sigma_{S_t}^2} + \phi_p \frac{Y_t^{**}}{\sigma_{S_t}^2} + v_t \quad v_t \sim N(0, 1)$$

時点 $t = 1, \dots, T$ の順番で上式を積み上げたものを行列に直すと以下の様に記述できる。

$$\tilde{Y}^{**} = X\tilde{\phi} + \tilde{v} \quad \tilde{v} \sim N(0, I_T)$$

事前分布を $\tilde{\phi} | \tilde{\sigma}^2, \tilde{\mu} \sim N(b_0, B_0)$ と定めれば、フルコンディショナルな事後分布は以下の通りである。

$$\tilde{\phi} | \tilde{\sigma}^2, \tilde{\mu}, \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T \sim N(b_1, B_1) \quad \dots (6)$$

$$\text{ただし、 } b_1 = (B_0^{-1} + X^* X)^{-1} (B_0^{-1} b_0 + X^* \tilde{Y}_T^{**}), \quad B_1 = (B_0^{-1} + X^* X)^{-1}$$

⁸ 実際の推定では $S_{1t} = 1 - S_{2t}$ という関係を利用している。

3.4 σ_1^2, σ_2^2 のサンプリング

(1') を式変形して以下の様な式を導出すると、 u_t は $N(0, \sigma_{S_t}^2)$ に従う確率変数である。ただし $\sigma_{S_t}^2$ を反映させて $\sigma_{S_t}^2 = \sigma_1^2 S_{1t} + \sigma_2^2 S_{2t} = \sigma_2^2 (1 + S_{1t} h_1)$ とモデル化する。

$$u_t = Y_t - \mu_{S_t} - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_{S_{t-1}}) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_{S_{t-2}}) - \dots - \phi_{p-1}(Y_{t-p+1} - \mu_{S_{t-p+1}}) - \phi_p(Y_{t-p} - \mu_{S_{t-p}})$$

ここで u_t を以下のように $(1 + S_{1t} h_1)$ で割って、 Y_{2t} という変数をつくると、 $N(0, \sigma_2^2)$ に従う。

$$Y_{2t} = \frac{u_t}{\sqrt{(1 + S_{1t} h_1)}} \sim N(0, \sigma_2^2)$$

σ_2^2 の事前分布として $IG(\nu_2, \delta_2)$ を仮定した場合、事後密度は事前密度と尤度をかけて以下の通りになる。

$$\begin{aligned} & (2\pi\sigma_2^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\sum_{t=1}^T \frac{Y_{2t}^2}{2\sigma_2^2}\right) \times \left(\frac{\delta_2}{2}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)^{-1} (\sigma_2^2)^{-\left(\frac{\nu_2}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{\delta_2}{2\sigma_2^2}\right) \\ & \propto (\sigma_2^2)^{-\left(\frac{T}{2}+\frac{\nu_2}{2}+1\right)} \exp\left(-\left(\frac{\delta_2}{2\sigma_2^2} + \sum_{t=1}^T \frac{Y_{2t}^2}{2\sigma_2^2}\right)\right) \end{aligned}$$

したがって、 σ_2^2 のフルコンディショナルな事後分布は $IG\left(\frac{T+\nu_2}{2}, \frac{\delta_2 + \sum_{t=1}^T Y_{2t}^2}{2}\right)$ である。

次に u_t を以下のように σ_2 で割って Y_{1t} という変数をつくると、 Y_{1t} は $N(0, 1 + S_{1t} h_1)$ に従う。

$$Y_{1t} = \frac{u_t}{\sigma_2} \sim N(0, 1 + S_{1t} h_1)$$

u_t は $t = 1, 2, \dots, T$ の T 個のデータであるが、状態が 1 だけのデータに絞ると、 $1 + S_{1t} h_1 = 1 + h_1$ となるから、 $N(0, 1 + h_1)$ に従う。 $\bar{h}_1 = 1 + h_1$ の事前分布として $IG(\nu_1, \delta_1)$ を仮定した場合、事後密度は事前密度と尤度をかけて以下の通りになる。ただし、 N_1 は Y_{1t} の中で $S_{1t} = 1$ を満たすものの個数である。

$$\begin{aligned} & (2\pi\bar{h}_1)^{-\frac{N_1}{2}} \exp\left(-\sum_{t=1}^{N_1} \frac{Y_{1t}^2}{2\bar{h}_1}\right) \times \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)^{-1} (\bar{h}_1)^{-\left(\frac{\nu_1}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{\delta_1}{2\bar{h}_1}\right) \\ & \propto (\bar{h}_1)^{-\left(\frac{N_1}{2}+\frac{\nu_1}{2}+1\right)} \exp\left(-\left(\frac{\delta_1}{2\bar{h}_1} + \sum_{t=1}^{N_1} \frac{Y_{1t}^2}{2\bar{h}_1}\right)\right) \end{aligned}$$

したがって、 \bar{h}_1 のフルコンディショナルな事後分布は $IG\left(\frac{N_1 + \nu_1}{2}, \frac{\delta_1 + \sum_{t=1}^{N_1} Y_{1t}^2}{2}\right)$ である。

3.5 p_{ii} のサンプリング(状態が2種類の場合)

時点が変わっても状態が変わらない確率、 p_{ii} の事後分布を考えてみよう。 $t=2, 3, \dots, T$ の間で時点 $t-1$ に状態 i に居て、時点 t でも状態 i に居続ける回数を n_{ii} 、そして時点 t では状態 i 以外へ移行した回数を \bar{n}_{ii} と記述する。まず、尤度は以下の通りである。

$$p_{11}^{n_{11}} \times (1 - p_{11})^{\bar{n}_{11}} \times p_{22}^{n_{22}} \times (1 - p_{22})^{\bar{n}_{22}}$$

p_{ii} の事前分布として以下のベータ分布を仮定すると、

$$p_{ii} \sim \text{beta}(u_{ii}, \bar{u}_{ii}) \quad , i = 1, 2$$

p_{ii} のフルコンディショナルな事後分布は $\text{beta}(u_{ii} + n_{ii}, \bar{u}_{ii} + \bar{n}_{ii})$ となる。この分布から p_{11}, p_{22} をサンプリングする。さらに $p_{12} = 1 - p_{11}, p_{21} = 1 - p_{22}$ を利用して p_{21}, p_{12} を得る。

4. データの説明

この節では今回の分析に利用する、鉱工業生産指数の説明を行う。今回、利用する山形県の鉱工業生産指数は1978年第 四半期から2007年第 四半期までの季節調整済みの四半期データであり、平成12年(2000年)を100としてある。標本期間は30年間、データ総数は120個である。

今回の分析に用いる鉱工業生産指数について説明しよう。鉱工業生産指数とは、鉱工業製品を生産する国内の事業所における生産、出荷、在庫に係る諸活動、製造工業の設備の稼働状況、各種設備の生産能力の動向、生産の先行き2ヶ月の予測の把握を行うもの、である。⁹

同指数は昭和5年から経済産業省が同指数を計算しており、計算された同指数は毎月公表されている。鉱工業生産指数といっても1種類ではなく、生産指数(付加価値額ウェイトに基づき計算された指数)、生産指数(生産額ウェイトに基づき計算された指数)、生産者出荷指数、生産者製品在庫指数、生産者製品在庫率指数、稼働率指数、生産能力指数、製造工業生産予測指数という8種類の指数で構成されている。景気動向指数(一致系列)には、鉱工業生産指数(生産指数)が採用されているから分かるように、生産指数は同指数を代表的するとともに、景気動向を敏感に反映すると考えられている。

鉱工業生産指数は日本全体を対象とした指数の他に、各都道府県で県別の指数が算出されている。山形県も算出しており、生産指数と在庫指数がHPで公開されている。今回は山形県鉱工業生産指数(生産指数)を用いて分析した。分析に用いたデータの推移については図1と図2

⁹ 経済産業省のHPにおける鉱工業生産指数の説明を参照している。

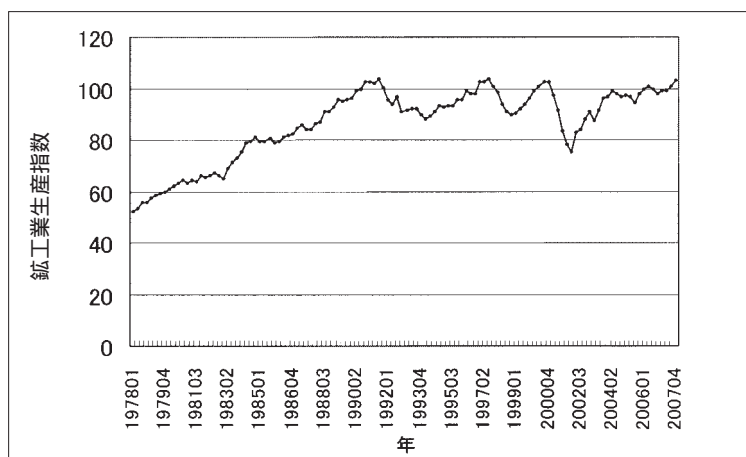


図1：山形県鉱工業生産指数（1978年第 四半期～2007年第 四半期、季節調整済）

に示してある。

図1に示す通り、山形県の鉱工業生産指数は1980年代前半に成長が止まったことがあるものの、1992年頃まで上昇し続けた。その後、100の周りで上昇と下降を繰り返している。1990年代の前半と後半に加えて、2002年に大きく下降したことが見て取れる。図2には変化率（パーセント表示）のデータを示してある。1990年代の前半と後半、そして2002年に大きく下落した時期が明らかである。

内閣府によれば、日本全体の景気の山は5回（1980年第1 四半期、1985年第2 四半期、1991年第1 四半期、1997年第2 四半期、2000年第3 四半期）そして谷も5回（1983年第1 四半期、

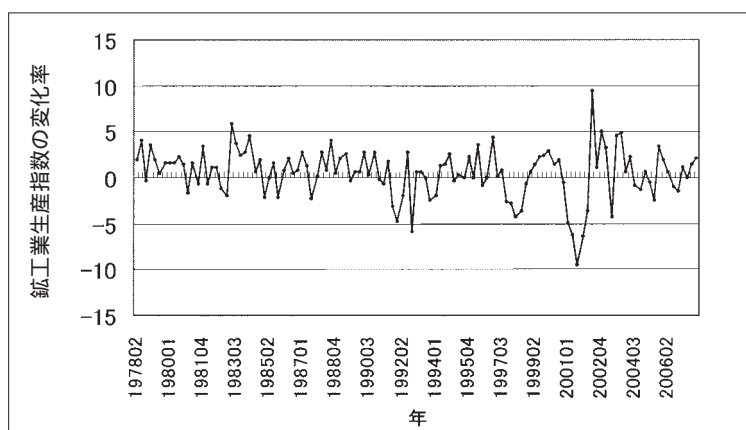


図2：山形県鉱工業生産指数の変化率（1978年第 四半期～2007年第 四半期、季節調整済）

1986年第4四半期、1993年第4四半期、1999年第1四半期、2002年第1四半期)、分析期間中にあった。

5. パラメータの推定

5.1 パラメータの推定結果

実際に推定するモデルを整理しておこう。MSモデルといっても状態数、自己回帰のラグ数などによって幾つかに分類される。今回は、景気に関するデータなので、状態数として拡張期と収縮期の2つの場合を想定して推定を試みた。また分析に四半期データを用いていることから、自己相関のラグ数としては、4期を想定している。

前述した通り、今回は(1')から(4')で記述されるモデルを推定した他に、誤差項の分散が一種類のモデル、状態2の分散の方が大きいモデルなども推定してみた(表1を参照せよ)。その中で(1')から(4')で記述されるモデルが、拡張期と収縮期に比較的うまく反応していた。そこでこのモデルの推定結果を紹介する。

表1：推定したモデルの一覧

条件 モデル	状態数	ラグ数	平均の 種類	分散の 種類	備考
モデル1	2	4	2	2	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$
モデル2	2	4	2	1	分散は1種類
モデル3	2	4	2	2	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

推定に当たっては、15,000回サンプリングした後、さらに5,000回サンプリングした。この5,000個のサンプルの平均を事後平均、つまり推定値として利用した。その結果を表2に示しておこう。

各パラメータの事前分布であるが、

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 - \mu_1 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{pmatrix} \right),$$

$$\sigma_2^2 \sim IG \left(\frac{8}{2}, \frac{30}{2} \right), 1+h_1 \sim IG \left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2} \right), p_{11}, p_{22} \sim \text{Beta}(0.1, 0.1)$$

である。ちなみに μ_1^2 , μ_2^2 の平均は5、分散は0.83である。

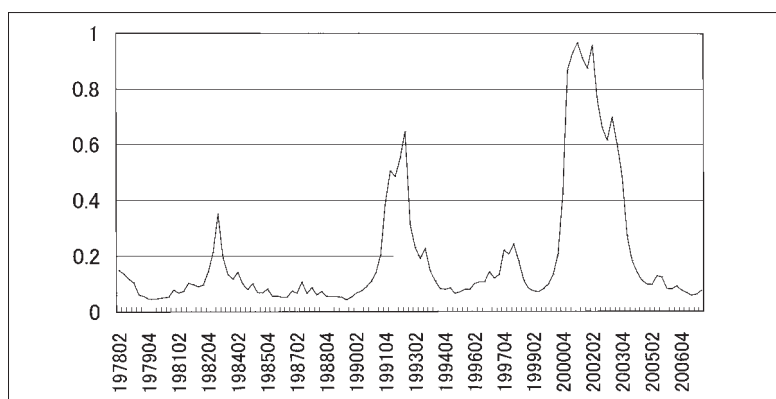
モデルのパラメータと状態変数を推定した後で、各時点が拡張期あるいは収縮期と考えられる確率を推定する。 $g(\tilde{S}_T | \tilde{Y}_T)$ に従って状態変数 $\{S_1, S_2, \dots, S_{T-1}, S_T\}$ を5,000回サンプリン

グすると、時点毎に5000個のサンプルが得られ、その中身は1か2である。5000個の中で1の得られた割合が収縮期（状態1）と考えられる確率の推定値であり、2の得られた割合が拡張期（状態2）と考えられる確率の推定値である。

5.2 推定結果の考察

今回の分析では、扱っているデータが変化率データであるから、状態はプラスに変化する状態（拡張期）とマイナスに変化する状態（収縮期）の2つである。したがって、収縮期から拡張期への変化点が景気の谷、拡張期から収縮期への変化点が景気の山を表す。

図3に、各時点の状態が収縮期である確率を推定した結果を示した。拡張期である確率は、1から収縮期である確率を引いた値である。



注：縦軸は収縮期となる確率である

図3：収縮期の確率

図1のIIPの推移と比較したところ、IIPが増加していない期間には収縮期（状態1）となる確率が上昇し、IIPが増加している期間には拡張期（状態2）となる確率が上昇しているので、大雑把にはあるが、それぞれの確率が状態の変化に反応していると考えられる。しかし、Hamilton（1989）に従い、確率0.5を基準にして収縮期と拡張期に分類すると、1990年代前半と2002年の収縮期には収縮期（状態1）とする確率が0.5を超えるのに対して、1980年代初頭と中期の収縮期、1990年代後半におけるバブル崩壊による収縮期については収縮期とする確率が0.5を超えなくて、拡張期と分類されてしまった。その理由を調べるために、標本期間を拡張期と収縮期に分けて、価格変化率の平均と分散を計算したところ、1990年代後半の縮小期における平均変化率は負となるが、変化率の分散は、それほど大きくなって、幾つかの拡張期の分散よりも小さい。ところが今回用いたMSモデルでは、収縮期の分散の方が大きいと設定していた。だからこの縮小期の確率は0.5を越えなかったと考えられる。

また、0.5を基準にして、図3から景気の山と谷を推定すると、日本全体の景気転換点と一致しない時点も多い。

今回用いたMSモデルでは、判別できない時期があることが分かるので、さらに複雑化したMSモデルを考えるか、ダイナミック・ファクター・モデルなどのモデルを採用することが必要である。

次に表2に示された個々のパラメータを見てみると、拡張期と収縮期で平均変化率が1.5729も異なることが分かる。分散は、収縮期が16.01、拡張期が4.21であるから、拡張期には収縮期よりもかなり大きくなっていることが分かる。

最後に推移確率であるが、拡張期を継続する確率が約0.9239、収縮期を継続する確率が約0.7655と推定された。その推定値から、拡張期及び収縮期の期待継続期間を推定できるので、推定したところ、拡張期及び収縮期の期待継続期間は13.14期と4.26期であった。¹⁰ 1978年以降の、高度成長期を含む期間のデータを用いているので拡張期が長く続いたため、拡張期が続く確率とその平均継続期間が大きな値となっていると考えられる。

表2：パラメータの推定結果

条件 パラメータ	事後平均	事後標準偏差	自己相関
p_{11}	0.7655	0.2133	0.5736
p_{22}	0.9239	0.1380	0.8800
μ_1	0.2358	0.1083	0.0142
μ_2	0.1191	0.0994	0.0559
μ_3	0.0937	0.0999	- 0.0404
μ_4	- 0.1415	0.0996	0.0327
μ_1	- 1.1023	1.4129	0.2219
μ_2	0.4706	0.4679	- 0.0314
σ_1^2	16.0114	6.9797	0.1498
σ_2^2	4.2103	0.9574	0.2224

6．結論

本論文では、まずMSモデルを概説した後に、ベイズ統計学の立場から同モデルの推定方法について紹介した。推定方法の紹介では、フルコンディショナルな事後分布を用いて、状態変数を含めたパラメータの推定を行う方法を紹介した。その後、山形県のIIPを例にMSモデルを当

¹⁰ Hamilton (1989) の374ページを参照されたい。

てはめて、この推定方法に基づいて、そのパラメータを推定した。分析に当っては、Hamilton（1989）のモデルを山形県の鉱工業生産指数の有する特徴に合わせて、拡張期の分散が収縮期のそれよりも小さくなるように設定した上で、パラメータを推定した。その推定結果を用いて、拡張期と収縮期の期待継続期間も推定した。

変化率であるが、拡張期の平均が0.4706、収縮期の平均が - 1.1023と推定され、平均変化率が1.5729も異なることが分かった。そして収縮期の分散が16.01、拡張期の分散が4.21であるから、拡張期には収縮期よりも分散がかなり大きくなっていることも分かった。推移確率であるが、拡張期を継続する確率が約0.9239、収縮期を継続する確率が約0.7655と推定された。その推定値から、拡張期及び収縮期の期待継続期間を推定したところ、拡張期及び収縮期の期待継続期間は13.14期と4.26期であった。1978年以降の、高度成長期を含む期間のデータを用いているので拡張期が長く続いたため、拡張期が続く確率とその期待継続期間が大きな値となっていると考えられる。

推定結果は必ずしも満足のいくものではなかった。しかし、この論文は県を対象とした景気の分析の第一歩として執筆したものであるので、今後、解決することとしたい。

これから分析すべき課題は多い。まず、ダイナミック・ファクター・モデルによる分析を行う必要がある。ただし、一国単位では得られても、県単位では得られないデータもあると思われるので、推定に当たっては工夫が必要であろう。そして、ダイナミック・ファクター・モデルにマルコフ・スイッチングを組み込んだモデルによる分析も必要である。さらにこれらの分析に当っては、日本全体と山形県との比較が欠かせない。これらのことに留意しながら、今後の研究を進める予定である。

参考文献

- [1] 荒木英一，2000，“地域景気動向のMSモデル推計 鉱工業生産指数（近畿・全国）による分析”，*桃山学院大学経済経営論集*，Vol.42（1），pp.1-10．
- [2] Fukuda, S. and T. Onodera，2001，“A New Composite Index of Coincident Economic Indications in Japan : How can we Improve the Forecast Performance ?”，*International Journal of Forecasting*，Vol.17，pp.483-498．
- [3] Hamilton, J.D.，1989，“A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationarity Time Series and Business Cycle”，*Econometrica*，vol.57（2），pp.357-384．
- [4] 廣松 = 高木 = 佐藤 = 木村，2006，『経済統計』，新世社．
- [5] 加納悟，2006，『マクロ経済分析とサーベイデータ』，岩波書店．
- [6] Kim, C.J. and C.R. Nelson，1998，“Business Cycle Turning Points, A New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor Model with Regime Switching”，*The Review of Economics and*

Statistics , Vol.80 (2) , pp.188-201 .

- [7] Kim, C. J. and C. R. Nelson , 1999 , *State Space Models with Regime Switching* , MIT Press .
- [8] 大日康史 , 1992 , “ 日本における確率的景気指数の開発 ” , 経済学論叢 (同志社大学) , 第44巻第 1 号 , pp.25-60 .
- [9] 里吉清隆 , 2004 , “ マルコフ・スイッチングGARCHモデルによる日本の株式市場のボラティリティーの分析 ” , 日本統計学会誌 , Vol.34 (1) , pp.1-19 .
- [10] Stock, J.H. and M.W.Watson , 1988 , “ A Probability Model of the Coincident Economic Indicators ” , *NBER Working Papers* , No.2772 .
- [11] 内山博邦 , 2002 , “ Markov-Switching VARモデルによる景気転換点の推定 ” , 大阪大学経済学 , Vol.52 (2) , pp.94-108 .
- [12] 内山博邦 , 2003 , “ マルコフ・スイッチングVARモデルによる日本の景気転換点の測定 ” , 大阪大学経済学 , Vol.53 (3) , pp.323-339 .
- [13] Watanabe , T. , 2003 , “ Measuring Business Cycle Turning Points in Japan with a Dynamic Markov Switching Factor Model ” , *Monetary and Economic Studies* , Vol.21 (1) , pp.35-68 .