

軟らかい弾性体膜の緩和弾性率

青 柳 良 二

Relaxation Modulus of Soft Elastic Membrane

AOYAGI Ryoji

Synopsis

Characteristics of membranes in biological structures, such as these of the internal organs of the living organisms, blood vessels, and cuticle membranes in foods, have recently attracted interest. Many of these objects exhibit the stress relaxation behavior of decreasing stress over time with constant deformation. Herein, we report a theoretical analysis of Young's modulus when an indenter consisting of a planar surface or a hemisphere-shaped cylindrical bar is pressed into a membrane fixed at its edges. We also measured the load over time and calculated the Young's modulus and relaxation modulus for comparison with the theory. These results confirmed the validity and convenience of this proposed theoretical analysis.

Keywords : Membrane, Viscoelasticity, Relaxation modulus, Young's modulus, Maxwell element

1. はじめに

物体の特性を表す指標の一つに、硬さ、やわらかさなどの弾性特性がある。硬さの試験法には、押し込み硬さ試験、動的硬さ試験などがあるが、主に等方性のバルク材を対象する。

最近、生体の臓器や組織表面膜、食品の表皮、工業用高分子フィルムなど、膜状物体の測定方法に関心が集まっている。これらの物体は、一定変形時の応力が時間経過とともに減少する応力緩和、定応力時の変形率が時間とともに増大するクリープ特性など、粘弾性特性を示すことが多い。筆者らは、これまで超音波振動子を測定物体に接触させた時の反作用によるスティフネス、質量、弾性損失の付加による共振周波数や共振尖鋭度の変化から、物体のヤング率などを測定する「接触インピーダンス方式」センサを用いた硬さ計の開発を行ってきた[1-4]。ヤング率が数10キロパスカルの皮膚や筋、ゴムなどの低硬度から、金属やセラミックスなどの数100ギガパスカルに至る広いレンジを測定できるものである。また、粘弾性を表す応力緩和特性を新しく開発した硬さ試験片について測定し報告している[5-8]。

しかし、測定物体が膜状の場合は、スティフネスおよび質量効果の作用が減少し、「接触インピーダンス方式」センサによる測定は難しくなる。その上、生体膜や食品膜の

表面には、濡れが層状に付着している場合があり、振動子のエネルギーが濡れに吸収されるため、この方式のセンサでは精度の良い測定が望めないことがある。

現在、高分子フィルムやシートは、クリープ特性を含めて、膜の引張強度試験法として JIS 規格に公表されている[9]。これらの測定法は、試験片を指定形状に製作、挟み具を用いて引張荷重治具に取り付け、伸びを測定する方法である。この方法は、

- (1) 試験片の製作に手間がかかる
- (2) 挟み具への試験片の装着具合により測定値がばらつく
- (3) 試験片によるため実用製品が測定出来ない

などの問題は避けられない。

これに対して、本研究は、上述の問題点の改善に加え、測定法が簡便、製造現物への使用などを考慮した測定方法の確立、その測定器の開発を目指すものである。これは、変形を与えた時の応力の時間変化をリアルタイムで測定する方法を原理とする。また、この方法は物体表面の濡れの影響も小さいと考える。

この研究では、まず膜の周辺部を円形に固定し、端面が平面あるいは半球状の円柱状圧子をその中心部に押し込んだ時の、押し込み変位と荷重の関係を理論的に考察した。次に、押し込み量による荷重の時間的変化を測定し、これからヤング率および応力緩和特性を求め、理論的考察の妥当性を検証した。

2. 扇形膜の変形と荷重の解析

2.1 円柱押し込み時の扇形膜の変形と荷重

図1に示す周辺固定、半径 R の円形膜の中央部を、先端が平面の半径 a の円柱を用いて、押し込み量 d で押し込んだ場合の反発力 F を考える。扇1と扇2は、それぞれ内半径 a 、外半径 R 、中心角 $d\theta$ の扇形で、円の中心に点対称である。

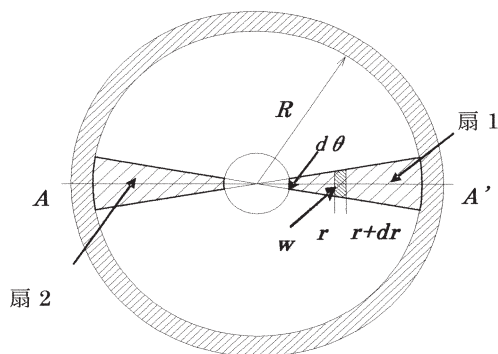


図1 2つの扇形膜の変形

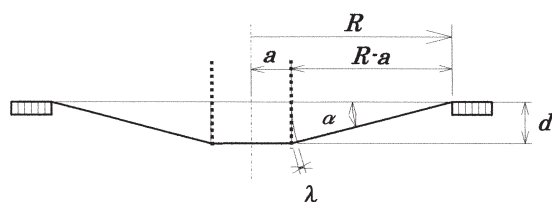


図2 円柱の圧子の押し込みによる円形膜の変形

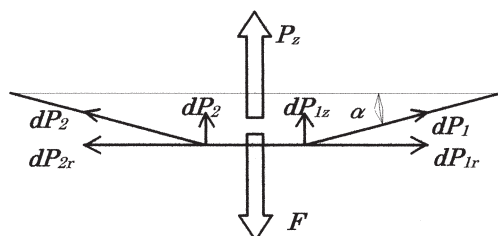


図3 張力 P と荷重 F の釣り合い

膜の反発力 F は、扇形の半径方向への伸びにより発生する。まず扇1の両端に張力 dP を与えた場合の伸び λ を考える。扇1の半径 r における微小領域 dr の円周方向の幅 w および断面積 S は、膜厚を t とすると、それぞれ、(1), (2) 式で与えられる。

$$w = r \cdot d\theta \quad (1)$$

$$S = w \cdot t = t \cdot r \cdot d\theta \quad (2)$$

これから、張力 dP により dr の部分に発生する伸び $d\lambda$ は、ヤング率の定義から (3) 式となる。

$$d\lambda = \frac{dP}{S \cdot E} \cdot dr = \frac{dP}{t \cdot r \cdot d\theta \cdot E} \cdot dr \quad (3)$$

ここで、膜厚 t の変化は伸び λ に較べ十分小さいとし無視する。 dP による扇の伸び λ は、(3) 式の全扇についての積分により求められ、(4) 式を得る。

$$\lambda = \int_a^R d\lambda = \frac{dP}{t \cdot E \cdot d\theta} \int_a^R \frac{1}{r} dr = \frac{dP}{t \cdot E \cdot d\theta} \log \frac{R}{a} \quad (4)$$

(4) 式より、張力 dP と伸び $d\lambda$ の関係は (5) 式になり、これから張力 dP は扇の伸び λ と膜のヤング率 E に比例することがわかる。

$$dP = \frac{\lambda \cdot t \cdot E \cdot d\theta}{\log \frac{R}{a}} = K \cdot E \cdot \lambda \cdot d\theta \quad (5)$$

ここで、定数 K は (6) 式で与えられる。

$$K = \frac{t}{\log \frac{R}{a}} \quad (6)$$

図2, 3は、半径 a の円柱が d だけ押し込まれ、扇1および扇2がそれぞれ λ だけ伸びたときの作用力を示す図である。扇1と扇2が押し込み円柱に与える力 dP_1 および dP_2 は、円柱の外径、すなわち扇の内円に作用し、それらは互いに等しく (5) 式になる。

それを径方向成分 P_r と荷重方向成分 P_z とおくと、扇1、扇2は円の中心に点対称のため、径方向の成分は (7) 式に示すように互いに打ち消しあい、垂直方向成分 P_z のみが (8) 式のように加算され2倍になる。

$$dP_{1r} = -dP_{2r} = dP \cos \alpha = K \cdot \lambda \cdot E \cdot d\theta \cdot \cos \alpha \quad (7)$$

$$\therefore dP_r = dP_{1r} + dP_{2r} = 0$$

$$dP_{1z} = dP_{2z} = dP \sin \alpha = K \cdot \lambda \cdot E \cdot d\theta \cdot \sin \alpha$$

$$\therefore dP_z = dP_{1z} + dP_{2z} = 2K \cdot \lambda \cdot E \cdot d\theta \sin \alpha \quad (8)$$

円形の膜全体を押し込んだときの張力成分 P_z は、(8) 式の角度 θ を0から π まで積分することにより求められ、(9) 式になる。

$$P_z = \int_0^\pi dP_z d\theta = 2\pi \cdot K \cdot \lambda \cdot E \cdot \sin \alpha \quad (9)$$

この式の P_z が、押し込み荷重 F に等しくなる。

2.2 膜への荷重 F とヤング率 E の関係

押し込み量 d を与えた場合の膜の伸び λ 、押し込み角 α は (10), (11) 式となる。

$$\lambda = \sqrt{(R-d)^2 + d^2} - (R-d) \quad (10)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{d}{R-d} \quad (11)$$

これから、押し込み荷重 F (=反発力) は次式となる。

$$\begin{aligned}
 F &= P_z = 2\pi \cdot K \cdot \lambda \cdot E \cdot \sin \alpha \\
 &= 2\pi \frac{t}{\log \frac{R}{a}} \cdot \lambda \cdot E \cdot \sin \alpha \quad (12)
 \end{aligned}$$

膜の半径 R 、円柱半径 a 、膜の厚さ t を与えることにより、押し込み量 d から伸び λ が求められ、これから (13) 式によりヤング率 E が求まる。

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{F}{2\pi \cdot K \cdot \lambda \cdot \sin \alpha} \\
 &= \frac{F \cdot \log \frac{R}{a}}{2\pi \cdot t \cdot \lambda \cdot \sin \alpha} \quad (13)
 \end{aligned}$$

2.3 押し込み円柱先端が半球の場合

先端が平面の場合は、押し付け円柱の膜に対する接触状態や鉛直性などの影響を受けやすい。先端を半球とすることで、この問題を改善できると考える。半球の場合は、円柱の実効的な押し込み量 d' 、接触半径 a は、平面の場合より小さくなり、また d に依存する。

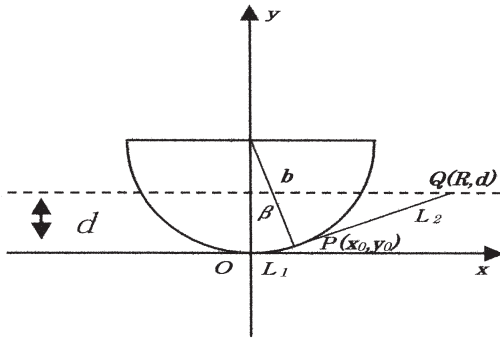


図4 半球圧子と膜の接触

図4において、先端の曲率半径を b 、周辺固定膜の半径を R 、押し込み量を d とすると、実効的な接触半径 a は、接点 P の座標 x_0 であたえられ、また実効的な押し込み量 d' は、 P 点の y 軸の y_0 分を減じた値となり、この x_0 、 y_0 は、それぞれ (14)、(15) 式で与えられる。

$$x_0 = \frac{b^2 \cdot R - \sqrt{b^4 \cdot R^2 - \{(d-b)^2 + R^2\} \{2b^3 \cdot d - b^2 \cdot d^2\}}}{(d-b)^2 + R^2} \quad (14)$$

$$y_0 = \frac{b \cdot d - x_0 \cdot R}{d - b} \quad (15)$$

一方、図4から、半径 b の球面を d だけ押し込むと、半球の弧 OP に接する膜にも伸びが生ずる。したがって、長さ R の部分は、弧 OP の長さ L_1 と線分 PQ の長さ L_2 の合計したものとなり、接点 P に作用する張力は、全体の伸び λ を L_1 と L_2 の伸びの比に分割した L_2 の伸び λ_{L_2} により生ずる。図4において、 L_1 に対する中心角を β とすると、座標 P は (x_0, y_0) となるから、 β は (16) 式で与

えられる。

$$\beta = \tan^{-1} \frac{x_0}{b - y_0} \quad (16)$$

この関係から、 L_1 および L_2 はそれぞれ (17)、(18) 式となる。

$$L_1 = b \cdot \beta \quad (17)$$

$$L_2 = \sqrt{(R - x_0)^2 + (d - y_0)^2} \quad (18)$$

したがって、全伸び λ 、 L_2 の伸び λ_{L_2} は、それぞれ (19)、(20) 式となる。

$$\lambda = L_1 + L_2 - R \quad (19)$$

$$\lambda_{L_2} = \lambda \cdot \frac{L_2}{L_1 + L_2} \quad (20)$$

半球を d だけ押し込んだときの荷重 F (反発力) を測定し、(20) 式により伸び λ_{L_2} を求めて、(13) 式に代入することにより、半球押し込みの場合の膜のヤング率 E が求まる。

3. 測定

測定材料は、身近にある軟弾性体膜の cellophane tape (セロファンテープ、厚さ $49 \mu\text{m}$)、vinyl tape (ビニールテープ、厚さ $186 \mu\text{m}$) と polyethylene film (ラップフィルム、厚さ $12 \mu\text{m}$) を使用した。測定装置は、図5に示すように、上面中央部に直径 10mm 、深さ 8mm の窪みをもつアクリル材ブロックの測定台に、張力がゼロとなるように試料を固定する。先端に直径 6mm の鋼球を接着した円柱圧子を、電磁ソレノイドを用いて円形膜の中心部に 0.8mm 押し込む。この時の荷重 F の時間的変化をロードセル (電子秤) で測定する。

次に、測定方法の妥当性を検証した。実験試料と同一素材から短冊状の試験片を切り出し、自作の引っ張り試験機を用いて、同じ電磁ソレノイドで 0.8mm 引っ張り、その時の荷重 F の時間的変化を測定した。試験片の長さは、直径 10mm の円形膜を直径 6mm の半球で 0.8mm 押し込んだ時の膜の歪と同程度とするために 60mm とし、試験片の幅は、電磁ソレノイドの最大駆動力を考慮して、ビニールテープ、セロファンテープおよびラップフィルムそれを、 10mm 、 10mm 、および 3mm とした。

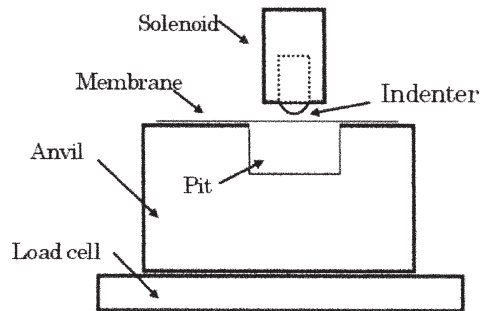


図5 実験装置の構成

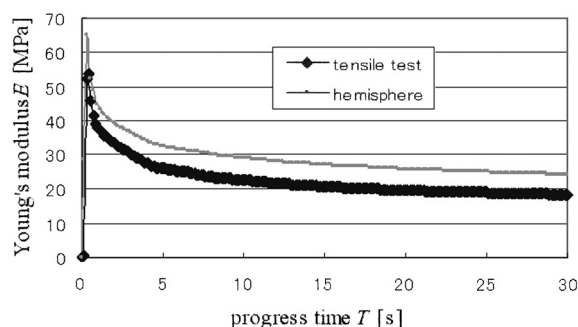


図6 経過時間 T に対するヤング率 E の関係, ビニールテープ。

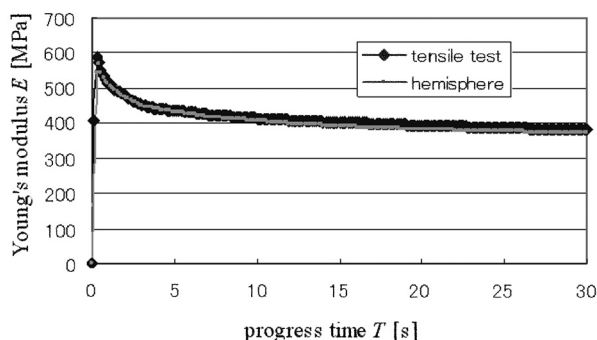


図7 経過時間 T に対するヤング率 E の関係, ラップフィルム。

図6, 7に, ビニールテープおよびラップフィルムの2試料の測定結果例を示す。半球で円形膜を押し込んだ場合の荷重 F から求めたヤング率 E と短冊状の試験片の引張荷重試験から求めたヤング率を比較して示したものである。

4. 応力緩和

今回実験に用いたビニールテープ, セロファンテープおよびラップフィルムなどの高分子材料は, 変形を与えたときの張力あるいは圧縮力は, 時間とともに変化する, いわゆる応力緩和を示すものが多く, このような物質は粘弾性体と呼ばれる。

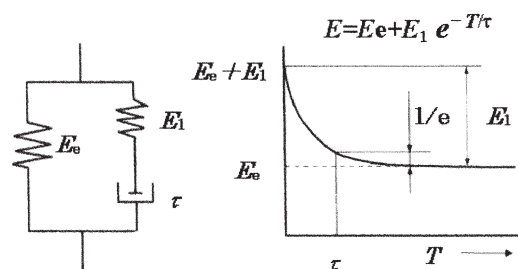


図8 応力緩和の Maxwell 要素モデル
(ヤング率: E_1 , E_e , 緩和時間: τ)

表1 サンプル数 n と Maxwell 要素値の関係, ビニールテープ。

	$n=5$	$n=10$	$n=20$
E_e [MPa]	38.0	32.9	29.6
E_1 [MPa]	25.1	23.8	23.4
τ [s]	0.56	1.35	2.25

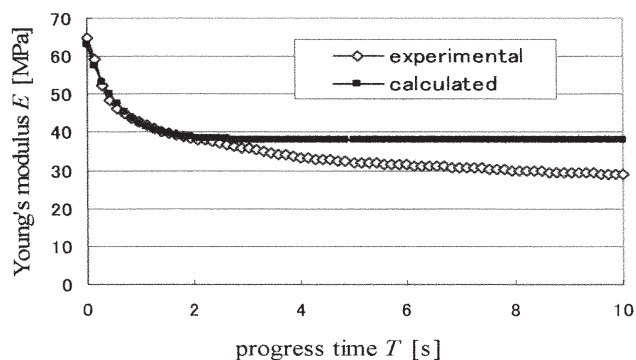
粘弾性体の応力緩和の最も基本的なモデルとして, 図8に示す Maxwell 要素モデル (ヤング率: E_e , E_1 , 緩和定数 τ) が知られている。粘弾性体のヤング率 E は, 図8および図中の式で表される変化を示し, 時間 T とともに減少する。

図6, 7の結果から2つの試料は, 明瞭な応力緩和特性を示すことが見てとれる。この特性を定量的に捉えるために, 図8の Maxwell 要素モデルで近似する。

近似方法に関しては2, 3の手法が提唱されているが, ここでは修正指数曲線のパラメータ推定法 (3点推定法) を用いて近似を行った[10]。この近似法は, 測定データを連続する3つのグループに分け, グループごとにサンプリングした n 個のデータの平方和から, 修正指数曲線のパラメータを推定するもので, 各グループのデータ数 n により, 近似できる範囲が決まる。

図6に示すビニールテープの円形膜の応力緩和の測定から, サンプル数データを $n=5, 10, 20$ として求めた Maxwell モデルの各要素の推定値を第1表に示す。

また, 図9(a), (b), (c)に, 第1表の推定値を用いて求めた経過時間 T が10[s]までのヤング率 E の計算値と実測値を比較して示す。データ1個のサンプリング時間が0.14[s]であるため, $n=5, 10, 20$ は, 推定値の1グループに要する時間は, それぞれ0.7, 1.4, 2.8[s]となる。



(a) sampling number, $n=5$

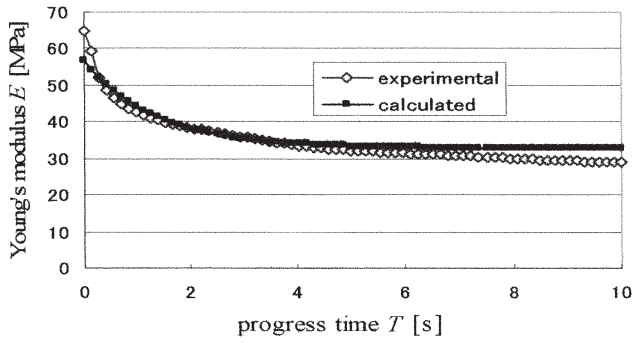
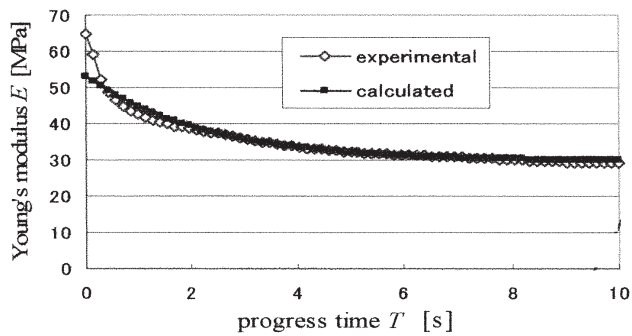

 (b) sampling number, $n=10$

 (c) sampling number, $n=20$

 図9 ヤング率 E の実測値とパラメータ推定法による
近似計算値の比較, ビニールテープ

n が小さいときは, 経過時間 T が小さい領域で実測値と計算値は良く一致するが, 逆に大きい領域では実測値と計算値の差が拡大する。 n が大きい場合は, 実測値と計算値が一致する領域は広がるが, 経過時間が小さい初期領域は差が大きくなる。

このことは, 実際の応力緩和特性を第8図に示す簡単な3要素モデルで近似するには限界があることを示している。しかし, 実際に必要とする時間領域あるいは周波数領域を限定すれば, 本方法で示した Maxwell 要素モデルでも, 十分な精度で求められることになる。

表2に, 3種類の試験片材料について, サンプルング数を $n=5$ とした円形膜の押し込み試験と自作引張試験による応力緩和特性から求めた Maxwell 要素の値を示す。円形膜押し込み試験と引張試験のヤング率 E_e , E_l は, 3試料ともほぼ近い値を示しているが, セロファンテープとラップフィルムの τ の値は, 大小が入れ替っている。この点については, さらに詳しい検討が求められる。

5. 検 討

図6, 7の結果を見ると, 引張試験のヤング率 E に対する円形膜押し込み試験のそれは, ラップフィルムの場合にはほぼ一致しているが, ビニールテープは, +18%程度の差異を示している。これは試料を測定台に貼り付ける際の張り具合(初期張力をゼロの状態に張る)によるバラツキと考えられる。しかし, 時間に対するヤング率の変化は, 2試料ともほぼ同様の傾向を示していると云える。これから, 本研究で提案する周辺固定円形膜への半球の押し込みによるヤング率の測定方法は, 理論的に十分な根拠を持つ方法と云える。

ここには数値的に示していないが, その他の測定結果のバラツキとしては, 押し込み半球の先端位置の検出誤差を考えなければならない。これについては, 半球の押し込み精度を上げるための測定系や測定治具の改善が必要である。

6. む す び

先端が平面あるいは半球状圧子を, 周辺固定円形膜の中心部に押し込んだ場合の荷重を測定する方法により, 軟粘弾性体膜のヤング率を求める関係式を明確にした。市販の膜試料のセロファンテープ, ビニールテープおよびラップフィルムのヤング率および応力緩和の測定を行い, 測定方法の妥当性を検証した。

今後, 測定値のバラツキ等の検討を行い, 測定精度の向上を目指す予定である。また, この研究結果に基づく本方式による膜硬さ計の開発, 製品化を目指す。

 表2 膜試料の Maxwell モデル要素値 E_e , E_l , τ

test-piece	hemispherical indenter			tensile test		
	E_e	E_l	τ	E_e	E_l	τ
	[MPa]	[MPa]	[s]	[MPa]	[MPa]	[s]
vinyl tape	38	25	0.56	31.6	17.6	0.65
cellophane tape	960	171	0.99	1254	304	1.21
polyethylene film	444	114	1.17	458	124	0.91

文 献

- [1] 青柳良二, 長尾敦, 吉田哲男: Viscoelasticity of Test-pieces for Tissue Sensor, 電子情報通信学会総合大会講演論文集, A-11-11, p.236 (2003.3).
- [2] Ryoji Aoyagi, Tetsuo Yoshida, "Frequency Equations of an Ultrasonic Vibrator for the Elastic Sensor Using a Contact Impedance Method," Jpn. Jour. Appl. Phys., 43-5B, pp. 3204-3209 (2004).
- [3] 青柳良二, 吉田哲男: 生体センサ用試作硬さ試験片の粘弾性特性, 電気関係学会東北支部連合大会講演論文集, 1B-14, p.53 (2004.8).
- [4] 青柳良二, 吉田哲男: 超音波振動子硬さセンサの統一的周波数式解析, 日本工業出版, 17-1, pp.27-32 (2005).
- [5] Subaru Kudo, Yuuichi Akiba, Ryoji Aoyagi, Tetsuo Yoshida, "Finite Element Analysis of Viscoelasticity of Test Pieces for Tactile Sensor," "Jpn. Jour. Appl. Phys., 43-5B, pp.3045-046 (2004).
- [6] 青柳良二, 吉田哲男: 軟弾性体膜の変形と粘弾性特性, 電子情報通信学会超音波研究会, US2004-48, pp. 1-6 (2004.9).
- [7] 青柳良二, 吉田哲男: 軟弾性体膜の変形と応力緩和, 第25回超音波エレクトロニクスの基礎と応用に関するシンポジウム講演論文集, P3-7, pp.351-352 (2004.10).
- [8] 青柳良二, 吉田哲男: 軟らかい粘弾性体の緩和弾性率の測定, 2005年電子情報通信学会総合大会講演論文集, D-7-9, p.66 (2005.3).
- [9] JIS 規格, 膜の試験法, JIS K-7115, JIS K-7127, JIS K-7161.
- [10] 蓑谷千風彦: 回帰分析のはなし (東京図書, 1999).

(平成17年 8 月12日原稿受理)