Research Reports of
Sendai National College of Technology No.37, 2007

符号関数と超関数による波形解析

–全波整流，半波整流，三角波形への応用–

福島正忠，海野啓明

Analysis of Simple Electrical Waveforms Using Sign Function and Dirac's Delta Function

FUKUSHIMA Masatada and KAINO Keimei

The Fourier series of a periodic function with the period 1 is $\sum_n c_n \exp(j2\pi nx)$ where c_n is the Fourier coefficient. When the periodic function is linear and piecewise continuous as a rectangular or a sawtooth waveform, the first derivative or the second derivative is the periodic sign function or the impulse train. In this case we will show a simpler method to obtain the Fourier series of this kind of periodic functions. This method is useful for college students to learn about the Dirac's delta function.

Keywords: Electrical waveforms, Fourier series, Dirac's delta function, Sign function

1　はじめに

信号解析，信号処理の技術や基礎理論がますます重要になっている．例えば、フラクタル媒質における電磁波伝播や異常な拡散現象を取扱うためには，関数が連続で微分可能であるという通常の仮定は不十分である．そのため，物質が示す複雑な現象に即した関数が取扱えるような，一般化フーリエ変換が考えられている [1]．フーリエ解析は，古典解析理論からはみ出した実りの多い分野であり，今後ますます発展する分野だと思われる．さらにフーリエ解析に関連して超関数の応用をもっとすすめるべきである [2]．

例えば，オイラー (1707-1783) はすでにフーリエ級数を知っていた．そして，

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} &= \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\end{aligned}$$

などの式から幾つもの有用な公式を導いている [3]．フーリエ (1768-1830) が指摘したように，上の式は区間 $(-\pi,\pi)$ 以外では成立しない [2]．すなわち左辺が周期関数であるときに正しい．今日では次式で表されるであろう。

$$\frac{x}{2}\{H(x+\pi) - H(x-\pi)\} * \mathrm{III}(\frac{x}{\pi})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

ここに，$H(x)$ は階段関数，$\mathrm{III}(x) = \sum_n \delta(x-n)$ は Shah 関数 (無限のパルス列) [2]，また $*$ は合成積を表わす．x の小数部分を表す関数 $\{x\}$ を用いれば不連続点を除いて

$$\pi\left(\left\{\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

となる．関数 $\{x\}$ は三角 (鋸歯状) 波形を表すが，微分すると上述の Shah 関数 $\mathrm{III}(x)$ が生じる．信号処理には符号関数がよく出るので超関数はごく普通に生じる．このように，高専生は符号関数や超関数などが普通の関数のように扱える新しい理論に慣れておくのが望ましい．このため技術者教育に携わる者は，新しい理論や技術を学生に分かりやすく伝える必要がある．そのため，超関数についての分かりやすい教材を用意して高専の実用数学に取り入れることを目標とする．

本論では，２章で整流波形や三角波形など身近な波形をフーリエ級数 (アナログ的な表現) で表わし，その微分波形を求める．３章では，微分が定義できない波形に対して，簡単な演算規則により波形解析ができることを示す．このため波形解析に有用な符号関数と超関数の定義と特徴について述べ，さらに周期的デルタ関数 (Shah 関数) のフーリエ級数表示 (ポアッソンの和公式) を示す．４章では，３章で示した超関数の演算規則と Shah 関数の

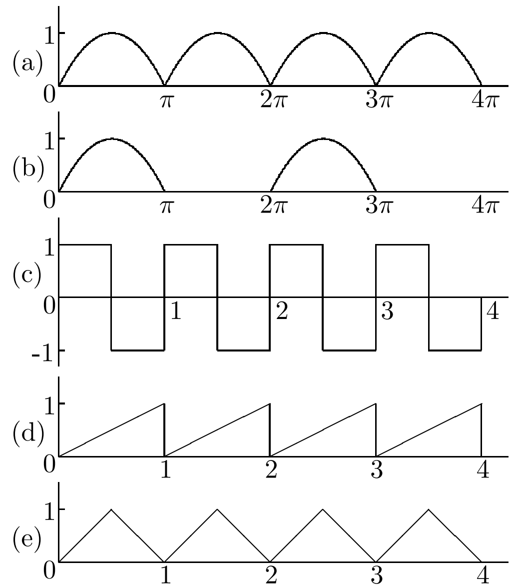

図 1: 解析対象の各種波形:(a) 全波整流波形，(b) 半波整流波形，(c) 矩形パルス，(d) 三角波形 $\{x\}$，(e) 三角波形 $\|x\|$.

級数表示を利用すれば，２章で求めた波形のフーリエ級数は，フーリエ係数を求める方法ではなく，微分方程式を解く方法により得られることを示す．５章はまとめである．

2　身近な波形のフーリエ級数表示

身近な波形として図１に示す５つの波形を考える．これらは，上から，全波整流波形，半波整流波形，矩形パルス，三角 (鋸歯状) 波形，三角 (山型) 波形と呼ばれる．

2.1　全波整流波形の級数表示

電気回路で用いられる波形で $|\sin x|$ を全波整流波形という．このフーリエ級数は次式で表される．

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}. \tag{1}$$

したがって，全波整流波形の微分，2 階微分ののフーリエ級数はそれぞれ,

$$\frac{d}{dx}|\sin x| = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{4n^2-1}\sin 2nx, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}|\sin x| &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}\cos 2nx, \\ &= -|\sin x| + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2nx \end{aligned} \tag{3}$$

である．

2.2　半波整流波形の級数表示

半波整流波形も電気回路でよく現われ，そのフーリエ級数は,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\{\sin x + |\sin x|\} \\ &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx. \end{aligned} \tag{4}$$

であり，また,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx, \tag{5}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = -f(x) + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2nx \tag{6}$$

である．

2.3　矩形パルス波形の級数表示

周期 1 の矩形パルス信号は１次のラデマッハ関数

$$r_1(x) = \mathrm{sgn}(\sin 2\pi x) \tag{7}$$

で表され，フーリエ級数は

$$r_1(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi(2n-1)x}{2n-1} \tag{8}$$

である．これを微分したものは

$$\frac{d}{dx}r_1(x) = 8\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2\pi(2n-1)x \tag{9}$$

である．

k 次のラデマッハ関数は

$$r_k(x) = \mathrm{sgn}(\sin 2^k\pi x) \tag{10}$$

と表される．ラデマッハ関数列 $\{r_k(x)\}$ は完全ではないが正規直交列を作る．最も重要な点は独立な関数列を作るところである [4]．フーリエ級数表示は (8) より,

$$r_k(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^k\pi(2n-1)x}{2n-1}. \tag{11}$$

これを微分すると,

$$\frac{d}{dx}r_k(x) = 2^{k+2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2^k\pi(2n-1)x. \tag{12}$$

2.4 三角 (鋸歯状) 波形の級数表示

$\{x\}$ は, x の小数部分を表し, 周期 1 の三角 (鋸歯状) 波形の関数となる. また, $[x]$ は, x の整数部分を表し, 整数化関数 (ガウス記号) となるから,

$$\{x\} + [x] = x$$

である. 三角波形 $\{x\}$ のフーリエ級数表示は次式で与えられる.

$$\frac{1}{2}(\{x+0\} + \{x-0\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2\pi nx. \tag{13}$$

これを微分したものは

$$\frac{d}{dx}\{x\} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2\pi nx \tag{14}$$

となる.

2.5 三角 (山型) 波形の級数表示

$\|x\|$ は x から最も近い整数までの距離を表す関数である. 関数 $\|x\|$ は周期 1 の二等辺三角形を表す. このフーリエ級数表示は,

$$\|x\| = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \tag{15}$$

これを微分したものは,

$$\frac{d}{dx}\|x\| = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi(2n-1)x}{2n-1} = r_1(x), \tag{16}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\|x\| = 8\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2\pi(2n-1)x \tag{17}$$

である.

3 符号関数などの微分規則と区分的一次関数の微分

ここでは符号関数の微分規則とデルタ関数, Shah 関数の主な性質を示し, ラデマッハ関数などの区分的一次関数を微分する.

3.1 符号関数とデルタ関数, Shah 関数

符号関数の定義は,

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & (x>0) \\ 0, & (x=0) \\ -1, & (x<0) \end{cases} \tag{18}$$

符号関数の微分規則は [2],

$$\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x) = 2\delta(x) \tag{19}$$

である.

以下の計算で使う演算規則を示す [2]. はじめに,

$$x\delta(x) = 0, \quad f(x)\delta(f(x)) = 0. \tag{20}$$

次に, デルタ関数の性質として $a \neq 0$ のとき

$$\delta(ax+b) = \frac{1}{|a|}\delta(x+\frac{b}{a}). \tag{21}$$

また, $f(x)=0$ の根を x_n とするとき,

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|f'(x_n)|}. \tag{22}$$

Dirac のデルタ関数はインパルス関数とよばれる.

Bracewell の Shah 関数 $\mathrm{III}(x)$ は無限のインパルス系列であり, 次式で与えられる [2].

$$\mathrm{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n) = \pi\delta(\sin\pi x). \tag{23}$$

Shah 関数は Comb 関数, サンプリング関数ともいわれる.

3.2 Heaviside 関数と微分

Heaviside 関数 $H(x)$ は, 符号関数を使えば次式で与えられる.

$$H(x) = \frac{1}{2}\{1+\mathrm{sgn}(x)\} = \begin{cases} 1, & (x>0) \\ \frac{1}{2}, & (x=0) \\ 0, & (x>0) \end{cases} \tag{24}$$

Heaviside 関数は単位ステップ関数 $u(x)$ ともいわれる. この関数の微分は (19) 式より,

$$\frac{d}{dx}H(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x) = \delta(x). \tag{25}$$

3.3 絶対値関数と微分

符号関数を用いると，絶対値関数 $|x|$ は,

$$|x| = x \cdot \mathrm{sgn}(x) \tag{26}$$

であり，同様にして

$$|f(x)| = f(x) \cdot \mathrm{sgn}(f(x)) \tag{27}$$

である．その微分は (19)，(20) 式を用いると，

$$\frac{d}{dx}|x| = \mathrm{sgn}(x). \tag{28}$$

同様にして，

$$\frac{d}{dx}|f(x)| = \frac{df}{dx}\mathrm{sgn}(f(x)). \tag{29}$$

3.4 x の整数部分 $[x]$，小数部分 $\{x\}$ とその微分

$[x]$ は x の整数部分を表す関数，また $\{x\}$ は x の小数部分を表す関数である．それぞれ周期 1 の周期関数で，

$$\{x\} + [x] = x$$

が成り立つ．関数 $[x]$ は Heavisde 関数 $H(x)$ を用れば，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left([x+0]+[x-0]\right)\\ &= \left\{\begin{array}{ll} H(x-1)+H(x-2)+\cdots & (x>+0)\\ -H(-x)-H(-x-1)-\cdots & (x\leq +0)\end{array}\right.\end{aligned} \tag{30}$$

と表される．上式と (25)，(23) を用いれば，$[x]$ と $\{x\}$ の微分は

$$\frac{d}{dx}[x] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n) = \mathrm{III}(x), \tag{31}$$

$$\frac{d}{dx}\{x\} = 1 - \mathrm{III}(x) \tag{32}$$

のように求まる．

3.5 三角 (山型) 波形 $\|x\|$ と微分

$\|x\|$ は x から最も近い整数までの距離を示す特殊関数である．すなわち，

$$\|x\| = \min\{x-[x], 1+[x]-x\} \tag{33}$$

である．また，次の関係式を満たす．

$$|\sin 2\pi x| = \sin 2\pi\|x\|, \quad \cos 2\pi x = \cos 2\pi\|x\|. \tag{34}$$

これと (29) より $\|x\|$ の微分は符号関数となり，さらに (19),(22),(23) を用いれば 2 階微分は Shah 関数で表される．

$$\frac{d}{dx}\|x\| = \mathrm{sgn}(\sin 2\pi x), \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\|x\| &= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(x-\frac{n}{2})\\ &= 2\ \mathrm{III}(x) - 2\ \mathrm{III}(x-\frac{1}{2}).\end{aligned} \tag{36}$$

4 符号関数の波形解析への応用

はじめに Shah 関数 $\mathrm{III}(x)$ の級数表示を与える．これと 3 章で示した特殊関数を用いれば 2 章の 5 波形のフーリエ級数がフーリエ係数の計算なしに得られる．

4.1 Shah 関数の級数表示

Shah 関数 $\mathrm{III}(x)$ の級数表示はポアッソンの和公式により次式で与えられる [4].

$$\mathrm{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2\pi nx + 1. \tag{37}$$

この式はフーリエ級数として形式的に導けるので付録に示す.

4.2 矩形パルス波形の微分と級数表示

矩形パルス波形は (7) 式のようにラデマッハ関数で表される．

$$r_1(x) = \mathrm{sgn}(\sin 2\pi x).$$

この微分波形は (36) 式となり，そのフーリエ級数表示は (37) 式を用れば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}r_1(x) &= 2\ \mathrm{III}(x) - 2\ \mathrm{III}(x-\frac{1}{2})\\ &= 8\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2\pi(2n-1)x\end{aligned} \tag{38}$$

となる．これは (17) 式と一致する．

両辺を x について積分し，$r_1(0) = 0$ を用いると，

$$r_1(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi(2n-1)x}{2n-1} \tag{39}$$

となる．これは (8) 式と一致する．

4.3　全波整流波形と微分

全波整流波形を符号関数を用いて表すと,

$$|\sin x| = \sin x \cdot \mathrm{sgn}(\sin x) \tag{40}$$

となる．(39) 式より

$$\mathrm{sgn}(\sin x) = r_1(\frac{x}{2\pi}) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \tag{41}$$

を得るから，これを (40) に代入して整理すると,

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi}\left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2x}{4n^2-1}\right) \tag{42}$$

が導かれる．これは (1) 式に一致する．

全波整流波形 $|\sin x|$ を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|\sin x| &= \cos x \cdot \mathrm{sgn}(\sin x), && (43) \\ \frac{d^2}{dx^2}|\sin x| &= -\sin x \cdot \mathrm{sgn}(\sin x) + 2\delta(\sin x) && \\ &= -|\sin x| + \frac{2}{\pi}\ \mathrm{III}(\frac{x}{\pi}) && (44) \end{aligned}$$

となるので，1 階微分の右辺に (39) 式を代入して整理すれば (2) 式と一致する．また 2 階微分の右辺に (37) を代入すれば (3) 式が得られる．

さて，$|\sin x|$ は微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) + f(x) = \frac{2}{\pi}\ \mathrm{III}(\frac{x}{\pi}) \tag{45}$$

の特殊解であるから，一般解は c_1,c_2 は任意定数として

$$f(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + |\sin x| \tag{46}$$

と表される．

4.4　半波整流波形と微分

半波整流波形を符号関数で表すと,

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + |\sin x|) \tag{47}$$

である．これに (42) 式を代入すると,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \tag{48}$$

が得られる．これは (4) 式に一致する．また (5),(6) 式が成り立つことは，**4.3** と同様にして確かめられる．

4.5　三角 (鋸歯型) 波形と微分

三角波形 $\{x\}$ は整数化関数 $[x]$ と

$$[x] + \{x\} = x$$

の関係にある．これらの関数の微分は，(31) 式により

$$\frac{d}{dx}[x] = \mathrm{III}(x), \quad \frac{d}{dx}\{x\} = 1 - \mathrm{III}(x).$$

フーリエ級数表示は，和公式 (37) 式により

$$\frac{d}{dx}\{x\} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2\pi nx \tag{49}$$

となるので，(14) 式と一致する．

上式の両辺を積分して，条件

$$\frac{1}{2}(\{x+0\} + \{x-0\})|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

を用いると,

$$\frac{1}{2}(\{x+0\} + \{x-0\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n} \tag{50}$$

が得られる．これは (13) 式と一致する．

4.6　三角 (山型) 波形と微分

x から最も近い整数までの距離を表す関数 $\|x\|$ は周期１の二等辺三角形の繰り返し波形を表している．その微分は矩形パルス波形であり，ラデマッハ関数で表される．したがって，(39) 式より,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\|x\| &= r_1(x) = \mathrm{sgn}(\sin 2\pi x) && \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi(2n-1)x}{2n-1} && (51) \end{aligned}$$

となる．上式を積分して，条件

$$\|\frac{1}{2}\| = \frac{1}{4} \tag{52}$$

を用いると，三角波形 $\|x\|$ のフーリエ級数表示

$$\|x\| = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2} \tag{53}$$

が得られる．これは (15) 式と一致する．

以上のように，符号関数などの区分的一次関数において，その微分がデルタ関数や Shah 関数で表されるならば，ポアッソンの和公式を用いて積分するだけでフーリエ級数が得られる．なお，関数が一周期の区間が有限個の部分区間に分かれ，その各部分で関数が多項式であるとき，フーリエ係数を区分的不連続量により表示できることも知られている [3].

5　まとめ

(1) よく知られた電気信号波形として，全波整流波形，半波整流波形，矩形パルス波形，三角 (鋸歯状) 波形，三角 (山型) 波形など，微分が許されない点を含む波形をフーリエ級数で表した．

(2) つぎに，符号関数，Heaviside 関数，デルタ関数，Shah 関数などの超関数の定義と特徴を示した．

(3) 上記の電気信号波形の解析を行い，その１階微分，２階微分を符号関数，デルタ関数，Shah 関数で表した．

(4) さらに，Shah 関数をポアッソンの和公式を用いて級数に直し，さらに積分すれば，上記の電気信号波形のフーリエ級数表示が得られる．通常のフーリエ係数を求める方法とは異なる方法である．

本論で述べられたことがらに基づき，高専生に超関数を教えるためのテキストを作成し，利用する予定である．

参考文献

[1] B.J.West, M.Bologna, and P.Grigolini: Physics of Fractal Operators, Springer, 2002.
[2] R.N.Bracewell: The Fourier Transform and Its Applications, Second Edition, McGraw-Hill, 1986.
[3] 河田龍夫：応用数学概論 II，岩波書店，1952.
[4] M.J.Lighthill: An introduction to Fourier analysis and generalised functions, Cambridge University press, 1958.

付録: Shah 関数のフーリエ級数表示

Shah 関数のフーリエ級数表示 (37) 式はポアッソンの和公式により証明される [4]．ここでは普通の周期関数として，この式を導く．周期１の周期関数 $f(x)$ があるとき，そのフーリエ級数は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{j2\pi nx}$$

となる．フーリエ係数 c_n は

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{e}^{-j2\pi nx} dx$$

により求められる．Shah 関数

$$\mathrm{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

は $x = \pm\frac{1}{2}$ のときは連続であるからフーリエ係数は

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta(x)\mathrm{e}^{-j2\pi nx} dx = 1$$

となるので，形式的に (37) 式

$$\mathrm{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi nx} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi nx$$

が得られる．Shah 関数は超関数であり，また上式の和も収束性を議論すべきであるが，本論の範囲では実用上問題はない．