

リスク統合管理モデルの生保 ALM への活用*

金融研究部門 主席研究員 田中 周二 tanaka@nli-research.co.jp
副主任研究員 室町 幸雄 muromati@nli-research.co.jp

概要

本稿では、生命保険会社の資産及び負債を評価・分析するための新しいフレームワークを提案する。具体的には、Kijima and Muromachi [20] が提案した金利リスクと信用リスクの統合評価のフレームワークをベースとして、さらに、資産側には株価変動リスクを、負債側には保険契約のリスクである死亡リスクと解約リスクを組み込んだモデル化を行い、資産・負債・サープラスの変動性を議論する。

非常に単純化した資産及び負債構成を仮定して、さまざまな環境の下でシミュレーションを行い、それぞれのリスクの寄与の大きさや、資産と負債のデュレーション・マッチングによる金利リスクヘッジの効果などを具体的に示す。また、現在広く使われている VaR が、あるケースの下ではポートフォリオのリスクの大きさを適切に表現できていないことを、具体的に示す。

*本稿は、筆者らが 9th International AFIR Colloquium で発表した Tanaka and Muromachi[26] の主要部分を日本語訳し、さらに、発表当日の資料を付加したものである。本稿の作成には上田泰三研究員の協力を受けた。

目 次

1	はじめに	53
2	既存研究	53
3	生命保険会社の cohort モデル	55
4	生命保険会社の資産サイドのモデル化	57
4.1	金利リスクと信用リスクのモデル化	57
4.2	資産の現在価値	58
5	生命保険会社の負債サイドのモデル化	59
5.1	死亡リスクと解約リスクのモデル化	59
5.2	生命保険契約の現在価値	59
5.3	単純化した例	61
5.4	生命保険証券と社債の類似性	62
6	生命保険会社のポートフォリオの価格感応度	62
6.1	デュレーション・マッチング	63
6.2	資産価値の偏微分係数	63
7	生命保険会社の全社 (firm - wide) モデル	64
7.1	リターンの分解	64
7.2	リスクの分解	64
7.3	RAPM	65
8	将来価格分布の算出と VaR	66
8.1	将来価格分布の算出	66
8.2	モンテカルロ法で求めた VaR の誤差評価	66
9	数値例：簡単な生命保険会社のモデル	67
9.1	前提条件	67
9.1.1	資産及び負債の構成	67
9.1.2	パラメータの設定	70
9.2	結果と考察	70
10	おわりに	74

1 はじめに

銀行は短い期間の資金調達を行い、長期の貸出を行うことで利益を得ている。また、生命保険会社は、保険契約者から保険料として長期の資金を受け取り、これらを債券・株式・融資・不動産などで運用するが、予定利率として最低利回りを保証している。

昨今、金融機関の破綻が相次いでいるが、銀行破綻の要因は、主に景気低迷による借り手企業の倒産や地価の下落である。また、生命保険会社の破綻は、長引く超低金利を受け、運用利回りが既契約の予定利率に届かない逆鞘が続いていることが大きい。仮に、景気好転から金利が上昇しても、銀行は調達金利の上昇が新たなリスクになるし、生命保険会社は低金利時の契約の解約リスクが大きくなる。

つまり、金融機関は市場リスクや信用リスクなど様々なリスクに晒されており、統合的なリスク管理が極めて重要となる。さらに、ALMはその名の通り、資産サイドだけでなく負債サイドもモデル化することが不可欠である。

本稿では、生命保険会社の ALM (Asset Liability Management) について述べるが、銀行、保険会社、ノンバンク、年金基金、一般事業会社などの様々な業態への応用も可能である。

2 既存研究

本節では、保険会社のリスク管理／ALM モデルの研究を簡単にサーベイした後、リスク資産の価格モデルとポートフォリオのリスク計量モデルの既存研究について、簡単に触れる。ここで、リスク資産としては、デフォルトリスクのある金利資産及び株式資産を対象とする。

保険会社のリスク管理モデルをアクチュアリアルな立場から紹介した文献には Daykin, Pentikainen and Pesonen [8] がある。同書は、損害保険事業を中心に記述されているが、第 15 章では生命保険、第 16 章では年金制度を取り扱っている。そこでは、まず、古典的な保険数学の枠組みで保険会社の剰余金の生成と利益の要因分析を取り扱い、次に、それぞれの要素を確率変数化して、剰余金を確率的に変動させることによりリスクの概念を導いている。このような方法は動的キャッシュフロー・シミュレーション法と呼ばれており、同様の立場からの研究は多数存在している（例えば、Ziemba and Mulvey [29]）。この手法は、ソルベンシーのチェックなどには適しているものの、保険会社の最適資本配分の問題などを取り扱うには適切でない場合が多い。また、資産ポートフォリオの効果について分析することには限界があろう。

このような問題を取り扱うには、Taylor [27] や Schnieper [25] が試みたように、保険負債を時価評価した上で、剰余金（＝資産－負債）の変動を記述するモデルを構築すれば良い。両論文とも、主に損害保険の負債を意識し、資産は確定利付証券とリスク資産（株式等）を考慮したモデルにより、資本の最適配分の問題を取り扱っている。この手法は、定期的にリスク／リターンの関係を監視し、資産ポートフォリオのリバランスのための情報などの提供を行う目的に適している。そもそも資本配分

の問題は、銀行のリスク管理手法として VaR や EaR などの概念が導入され、RAPM (Risk Adjusted Performance Measure) と呼ばれるパフォーマンス手法が銀行経営の基準になったことから始まっている。保険会社モデルは、それらの既存研究の蓄積の上に立ち、類推適用するものと言えよう。銀行のリスク管理や RAPM については、Matten [23] や Jorion [17] などが詳しい。

今回のモデルの特徴は、資産について企業銘柄ごとの信用リスクを明示的に取り扱い、資産のポートフォリオ分散効果が十分に働かない条件の下でのリスク管理体系を考察することにある。そのため、同一企業の倒産リスクを共有する社債と株式を組み入れることにした。保険負債についても、死亡率や経済的ローディングの水準の異なる保険群団を想定した。すなわち、同質的 (homogeneous) な資産・負債構造ではなく、異質的 (heterogeneous) なポートフォリオに対し、適切な資本配分はどういうものかを理解することが目標である。

まず、リスク資産として金利資産を取り扱う場合には、Heath, Jarrow and Morton [10] が展開したマルチファクターのフォワードレート過程モデルを用いるのが一般的であろう。彼らのモデル（以下では HJM モデルと略）は、金利の期間構造に関する無裁定条件を満たし、しかも現時点におけるイーランドカーブの全情報を取り込むことが可能であるという優れた性質を持っている。さらに、Amin and Jarrow [5] は、通常の株価過程モデルに金利過程として HJM モデルを組み込み、無裁定な株価・金利モデルを提案した。

一方、社債など信用リスクのある資産の価格評価の研究で代表的なものは、Jarrow and Turnbull [16], Jarrow, Lando and Turnbull [15], Duffie and Singleton [9], Longstaff and Schwartz [22] である。しかし、これらのモデルは全て 1 資産の価格評価に関する研究であり、多資産間の分散投資効果を評価できる枠組みにはなっていないため、そのままポートフォリオのリスク計量化には使えない。

ポートフォリオの市場リスク評価モデルのスタンダードは RiskMetricsTM[13] であり、信用リスク評価モデルでは CreditMetricsTM[14] や CREDITRISK⁺[6] が代表的だが、基本的にそれらは市場リスクのみ、信用リスクのみしか計測対象としていない。

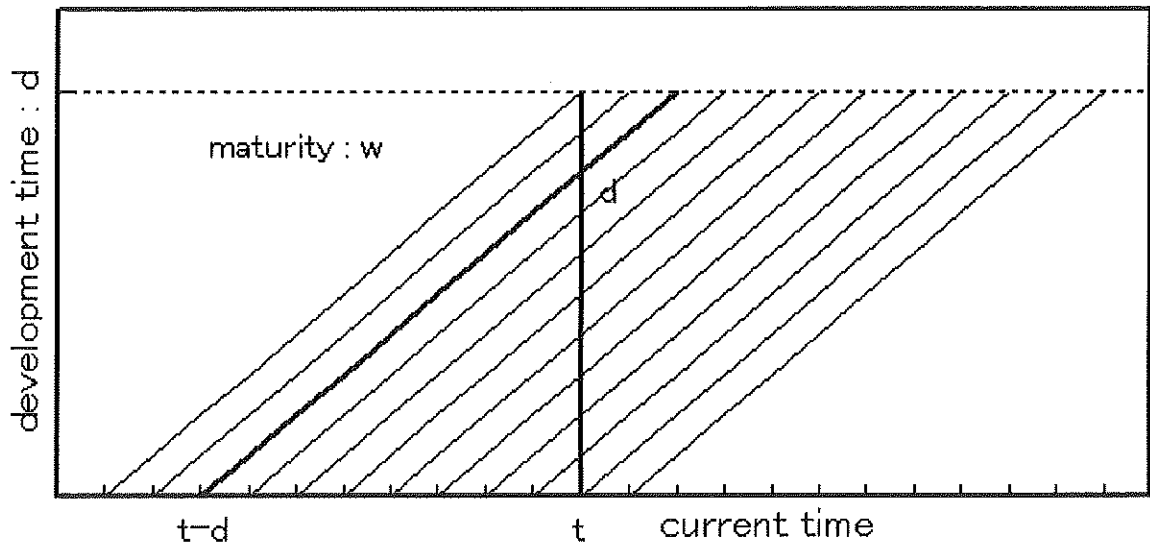
本稿で提案する資産サイドのモデルは、前述の Amin and Jarrow [5] と Kijima and Muromachi [20] を組み合わせたものである。また、生命保険を金利商品と考えると、負債サイドは Kijima and Muromachi [20] を元にモデル化する。その際、取り扱う事象の類似性から、Kijima and Muromachi [19] のデフォルト・スワップの価格評価モデルを参考に式を展開する。為替も必要であれば、さらに Amin and Jarrow [4] の方法を参照すればよい。

なお、前述のように HJM モデルは優れた性質を持っているが、マルコフ過程でないために実務的な取り扱いは難しかった。これに対し、Inui and Kijima [12] は、フォワードレートのボラティリティ関数に対してある制約を加えることにより、HJM モデルと整合的な、マルコフ性をもつスポットレート過程を導くことができることを示した。Hull and White [11] による拡張 Vasicek モデルは、そのようなスポットレート過程の一つであり、しかも 1 ファクターのため取り扱いが容易なので、本稿の数値例にはこのモデルを使用する。

3 生命保険会社の cohort モデル

生命保険会社の評価として、最初に、単純な確率論的モデルの「Cohort モデル (契約年度別保険群団モデル)」について述べる。生命保険会社の被保険者は多数にわたるが、男性（女性）の死亡や保険契約の解約などリスク特性の観点から同種の被保険者毎にグループ分けでき、このグループが保険群団、コーホートである。ここで、死亡率、解約率、キャッシュフローを割り引くための利子率は、全て決定論的とする。 $l(t)$ を離散時点 $t = 0, 1, \dots, n$ の下で t 時点の群団に属する人数と定義すると、 $l(t)$ は以下の式を満たす。 $[l(t) = l(t-1)[1 - q(t-1) - w(t-1)]$ ここで、 $q(t)$ は時点 t から 1 年間の間に死亡する確率、 $w(t)$ は時点 t から 1 年間の間に解約される確率を定義し、すなわち、時点 t まで生き、時点 t から $t+1$ の間に死ぬという条件付き確率である。 $t = 0$ で x_0 才の群団の $q(t)$ は、また t での q_{x_0+t} とも表現され、これは統計データから $x_0 + t$ 才の人が 1 年間に死亡する確率を見積もったものである。

図 1: コーホート・モデル



満期 $t = n$ であり、また以下の給付内容の保険契約を考える。

• $S_d(t)$ = (契約者が時点 $t (< n)$ で死亡したときの保険金額)

• $S_e(t)$ = (満期 $t = n$ での保険金額)

• $S_w(t)$ = (契約者が時点 t で解約したときの返戻金),
$$\begin{cases} t < w - x_0 S_w(t) = 0 \\ t \geq w - x_0 S_w(t) > 0 \end{cases}$$

このとき、保険金が $S_d(t) = S_e(t)$ の保険が養老保険である。

生命保険の評価のため、保険による将来のキャッシュ・フローを現在価値に割り引く。時点 t から

$t+1$ の将来の利子率 $j(t)$ で表せば、ディスカウント・ファクターは、以下の式で与えられる。

$$v(t) = \frac{1}{1+j(t)} v(t, s) = v(t) v(t+1) \cdots v(s-1) v(s)^{\frac{1}{2}} v(t, t) = v(t)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1+j(t))^{\frac{1}{2}}}$$

ここで $v(t, s)$ は事業年度 t の期初から、事業年度 s の半期末までのディスカウント・ファクターであり、死亡が年央にのみ起こることを想定している。

保険数理の基本原則は、「ある保険に対して保険会社が維持しなくてはならない資産の大きさは、将来の給付の現在価値と将来の払込保険料の現在価値の差額に等しい」である。この原則を式にすると、 $[l(t)V(t) = \sum_{s=t+1}^{\infty} l(s-1)v(t, s)[S_e(s) + w(s)S_w(s) + q(s)S_d(s) - B(s) + E(s)]]$ ここで $V(t)$ は t 時点の保険料積立金、 $B(s)$ は s 年度に支払われる営業保険料、 $E(s)$ は付加保険料を示す。特に、 $E(s) = 0$ のとき、 $V(t)$ は純保険料積立金、 $B(s)$ は純保険料と呼ばれる。営業保険料は、純保険料と付加保険料とに分けられる。保険数理の仮定が保守的になっているような制度を持つ国では、 $V(t)$ はたいていプラスになる。純保険料が収支相当の原理から計算された場合、 $V(t)$ は 0 となり、一方、付加保険料は外生的に与えられる。Schnieper[25] によれば、付加保険料について、費用分の付加保険料と費用は相殺されるため、本稿での付加保険料は利益を生み出す分だけを含む。また、保険証券は市場で取引されないため、保険の現在価値を、純保険料積立金 $V(t)$ と将来の付加保険料の期待値の現在価値の合計と定義する。さらに、本論文では、保険契約者への配当は無視する。

会社経営のモデルの次のステップは、死亡率 $q(t)$ 、解約率 $w(t)$ 、投資リターン $j(t)$ 、事業費率 $E(t)$ や割引率 $v(t)$ などを確率過程として表現することである。これら仮定をモデル化するのに共通の手法はないが、以下は最もシンプルなモデルの一つである。

1. j 番目の保険契約者の死亡を確率変数 $q_j(t)$ で判断する。ここで、 $q_j(t)$ は死亡時に 1、生存時には 0 となる。このとき、全体の死亡者数は $q(t) = \sum_j q_j(t)$ である。
2. j 番目の保険契約者の解約を確率変数 $w_j(t)$ で判断する。ここで、 $w_j(t)$ は解約時に 1、継続時には 0 となる。このとき、全体の解約者数は $w(t) = \sum_j w_j(t)$ である。
3. 残存人数 $l(t)$ は、 $l(t) = l(t-1)[1 - q(t-1) - w(t-1)]$ で定義される。
4. 投資リターン $j(t)$ は、Wilkie [28] や Mulvey and Thorlacius [24] のような適切な投資収益生成モデルで生成する。
5. 事業費率 $E(t)$ は、通常初年度のコストと、次年度以降のコストとに分けられ、後者にはインフレの要素を含める。

$$E(1) = E_1$$

$$E(t) = E_2 \times \prod_{s=1}^t (1 + i(s)), t \geq 2$$

ここで、 $i(t)$ はインフレ率である。

6. 割引率 $v(t)$ は、利子率のモデルの適切な期間構造による。

我々のモデルは、死亡率と解約率がハザード過程に従う点と、資産と負債の価格をハザード過程の下、リスク中立化法で評価している点で、上記モデルよりも複雑である。

4 生命保険会社の資産サイドのモデル化

田中・室町 [2] で紹介したガウス型モデルを使用して、割引債と株式からなる資産ポートフォリオの将来価格の変動を、具体的にモデル化する¹。

4.1 金利リスクと信用リスクのモデル化

N 個の企業を考え、企業 $j, j = 1, \dots, N$, のデフォルト時刻を τ_j とする。現在時刻を $t = 0$, 時刻 t における企業 j のハザード率を $h_j(t)$, 株価を $S_j(t)$, 満期 T の割引社債の価格を $p_j(t, T)$, 回収率を一定で δ_j とし, $j = 0$ は国や政府などデフォルト・フリーな団体を表すものとする。また、デフォルト・フリー金利を $r(t)$ とする。

観測確率 P の下で、各確率変数は、

$$\begin{aligned} dr(t) &= a_0(m_0 - r(t))dt + \sigma_0 dz_0(t), \quad t \geq 0, \\ dh_j(t) &= b_j(t)dt + \sigma_j dz_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad t \geq 0, \\ \frac{dS_j(t)}{S_j(t)} &= [\mu_j + X_j(t)h_j(t)]dt + \delta_{0j}dz_0(t) + \delta_{N+j}dz_{N+j}(t) + dX_j(t), \quad j = 1, \dots, M, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

に従うと仮定する。ただし、 M は非負の整数で $M \leq N$, $\mathbf{z}(t) = (z_0(t), z_1(t), \dots, z_{N+M}(t))$ は $N + M + 1$ 次元標準ブラウン運動, $a_0, m_0, \sigma_0, \sigma_j, \delta_{0j}, \delta_{N+k}, j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M$, は非負の定数, $\mu_j, j = 1, \dots, N$ は定数, $b_j(t), j = 1, \dots, N$ は時刻 t の確定的な関数で, $X_j(t) = 1_{\{\tau_j > t\}}$ である。田中・室町 [2] で述べたガウス型モデルと比較すると、ハザード率の平均回帰性がなく ($a_j = 0$), しかも株式の期待収益率がやや異なるモデルとなっている²。

(1) より,

$$h_j(t) = h_j(0) + \int_0^t b_j(s)ds + \sigma_j z_j(t), \quad j = 1, \dots, N, \quad t \geq 0$$

となるが、ここで、この期待値が 3 パラメータ・ワイブル分布に従う、すなわち、

$$E[h_j(t)] = h_j(0) + \int_0^t b_j(s)ds = \lambda_j \gamma_j (t + \eta_j)^{\gamma_j - 1}, \quad j = 1, \dots, N, \quad t \geq 0$$

と仮定する。ここで、 $\lambda_j, \gamma_j, j = 1, \dots, N$ は正の定数, $\eta_j, j = 1, \dots, N$ は非負の定数である。

¹ 基礎方程式の一般的な表現は、田中・室町 [2] を参照されたい。

² ハザード率に平均回帰性を持たせたモデル化も可能である。また、株価の変動を示す確率微分方程式の右辺第一項を $\mu_j + h_j(t)$ とすると、瞬間的な期待収益率が μ_j となるので形式的には美しいが、実際に個々の企業の株価データからパラメータ推定をする際には、現時点においてデフォルトしていない企業しか扱わないので、 μ_j の推定は困難になる。

また、リスク中立確率 $\tilde{P}$ の下では、

$$\begin{aligned} dr(t) &= (\phi_0(t) - a_0 r(t))dt + \sigma_0 d\tilde{z}_0(t), \quad t \geq 0, \\ \tilde{h}_j(t) &= h_j(t) + \ell_j(t), \quad j = 1, \dots, N, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

に従うと仮定する。ただし、 $\tilde{h}_j(t)$ はリスク中立確率 $\tilde{P}$ の下でのハザード率、 $\tilde{z}_0(t)$ はリスク中立確率 $\tilde{P}$ の下での標準ブラウン運動で、 $\ell_j(t)$ および $\phi_0(t)$ は時刻 t の確定的な関数である。

なお、デフォルトの発生は条件付き独立である、と仮定する。条件付き独立に関しては、田中・室町 [2] を参照されたい。さらに、問題の簡略化のため、金利とハザード率は独立と仮定する³。

4.2 資産の現在価値

このとき、時刻 $t > 0$ において、

$$\begin{aligned} S_j(t) &= S_j(0)X_j(t) \exp \left\{ \left(\mu_j - \frac{1}{2}(\delta_{0j}^2 + \delta_{N+j}^2) \right) t + H_j(0, t) \right\}, \quad j = 1, \dots, N, \\ p_0(t, T) &= R_1(t, T)e^{-R_2(t, T)r(t)}, \\ p_j(t, T) &= p_0(t, T) [\delta_j + X_j(t)(1 - \delta_j)L_j(t, T)P_t \{\tau_j > T\}], \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} R_1(t, T) &= \exp \left\{ \frac{\sigma_0^2}{2} \int_t^T R_2^2(u, T) du - \int_t^T \phi_0(u) R_2(u, T) du \right\}, \\ R_2(t, T) &= \frac{1 - e^{-a_0(T-t)}}{a_0}, \\ P_t \{\tau_j > T\} &= \exp \left\{ -B_j(t, T) + \frac{1}{2}S_j^2(t, T) \right\}, \\ B_j(t, T) &= (T-t)h_j(t) + \int_t^T (T-s)b_j(s)ds, \\ S_j^2(t, T) &= \frac{1}{3}\sigma_j^2(T-t)^3, \\ L_j(t, T) &= \exp \left\{ -\int_t^T \ell_j(s)ds \right\}, \\ r(t) &= m + \{r(0) - m\}e^{-a_0 t} + \sigma_0 \int_0^t e^{-a_0(t-s)} dz_0(s), \\ h_j(t) &= h_j(0) + \int_0^t b_j(s)ds + \sigma_j z_j(t), \\ H_j(t, T) &= \int_t^T h_j(s)ds \end{aligned}$$

である。

³ 相関を持たせることも容易に可能である。

5 生命保険会社の負債サイドのモデル化

次に、生命保険会社の負債の抱えるリスクを、金利リスク、死亡リスク、解約リスクとみなして、資産サイドと同様にモデル化し、価格評価を行う。ここでは、金利リスクは資産サイドと同様なので省略し、死亡リスクと解約リスクのモデル化に関してのみ述べる。

5.1 死亡リスクと解約リスクのモデル化

L 個の生命保険 j において⁴，死亡のハザード率を $h_{qj}(t)$ ，解約のハザード率を $h_{wj}(t)$ とおき，これらが以下の確率微分方程式

$$\begin{aligned} dh_{qj}(t) &= \mu_{qj}(t)dt + \sigma_{qj}(t)dz_{qj}(t), \quad j = 1, \dots, L, \quad t \geq 0, \\ dh_{wj}(t) &= \mu_{wj}(t)dt + \sigma_{wj}(t)dz_{wj}(t), \quad j = 1, \dots, L, \quad t \geq 0, \\ dz_a(t)dz_b(t) &= \rho_{ab}(t)dt, \quad a, b = 0, j, q_j, w_j, \quad j = 1, \dots, L, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

に従うと仮定する。ただし、 $\sigma_{qj}(t)$ 、 $\sigma_{wj}(t)$ は時刻 t の確定的な関数で非負、 $\mu_{qj}(t)$ 、 $\mu_{wj}(t)$ 及び相関係数 $\rho_{ab}(t)$ は時刻 t の確定的な関数で、 $\mathbf{z}_L(t) = (z_{q1}(t), z_{w1}(t), \dots, z_{qL}(t), z_{wL}(t))$ は $2L$ 次元標準ブラウン運動である。また、条件付き独立も仮定する。

5.2 生命保険契約の現在価値

簡単な生命保険契約を考え、その現在価値について考える。

モデル化の対象は定期付養老保険とし、その契約内容を以下のように定める。「満期 T_j まで解約せずに生存していれば満期 T_j に $S_{e,j}$ 円、時刻 $\tau_{qj} < T_j$ に死亡すればその時点で $S_{d,j}$ 円、時刻 $\tau_{wj} < T_j$ に保険から脱退すればその時点で $S_{w_j}(\tau_{wj})$ 円を受け取る、という生命保険証券 j に対し、契約者は、時刻 t_{ji} 、 $t_{ji} > 0$ 、 $i = 1, \dots, n$ に純保険料 $\pi_j(t_{ji})$ と付加保険料 $\ell_j(t_{ji})$ を支払う。ただし、契約時点は $t = 0$ 、 $S_{w_j}(t)$ は時刻 t によって確定的に与えられる単調増加関数であり、ここでは簡単のため、 $S_{w_j}(0) = 0$ 、 $S_{w_j}(T_j) = S_{e,j}$ を満たすものとする。また、 $S_{d,j} > S_{e,j}$ とする。」

複数の引数の中から最小値をとる関数 $\min(\cdot)$ を用いて表すと、この生命保険証券は、

- $\min(\tau_{qj}, \tau_{wj}, T_j) = T_j$ のとき、時刻 T_j において $S_{e,j}$ 円、または、
- $\min(\tau_{qj}, \tau_{wj}, T_j) = \tau_{wj}$ のとき、時刻 τ_{wj} において $S_{w_j}(\tau_{wj})$ 円、または、
- $\min(\tau_{qj}, \tau_{wj}, T_j) = \tau_{qj}$ のとき、時刻 τ_{qj} において $S_{d,j}$ 円

を受け取る条件付き請求権であり、このキャッシュフローは、2 資産を対象とするバスケット型デフォルト・スワップのそれと形式的に同じである。そこで、Kijima and Muromachi[19] によって導かれ

⁴ j はある一つの生命保険資産を示す。即ち、ある個人に対するある生命保険資産である。

たバスケット型デフォルト・スワップの価格評価法を用いて、この生命保険証券の現在価値を評価する。なお、契約者の支払うキャッシュフローは、

- $\min(\tau_{q_j}, \tau_{w_j}, T_j) > t_{ji}$ のとき、時刻 t_{ji} において $\pi_j(t_{ji}) + \ell_j(t_{ji})$ 円

である。

生命保険会社から見た、満期 T の生命保険契約 j の時刻 $t, t < T$ における価値 $p^{LI}(t, T)$ は、無裁定価格理論によると⁵、

$$p_j^{LI}(t, T) = PV_1^{out}(t, T) + PV_2^{out}(t, T) + PV_3^{out}(t, T) - PV_{net}^{in}(t, T) - PV_{load}^{in}(t, T) \quad (2)$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} PV_1^{out}(t, T) &= S_{e,j} \tilde{E}_t \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(v) dv \right\} 1_{\{\min\{\tau_{q_j}, \tau_{w_j}, T\} = T\}} \right], \\ PV_2^{out}(t, T) &= \tilde{E}_t \left[\int_t^T S_{w_j}(u) \exp \left\{ - \int_t^u r(v) dv \right\} 1_{\{\min\{\tau_{q_j}, \tau_{w_j}\} = \tau_{w_j} = u\}} du \right], \\ PV_3^{out}(t, T) &= S_{d,j} \tilde{E}_t \left[\int_t^T \exp \left\{ - \int_t^u r(v) dv \right\} 1_{\{\min\{\tau_{q_j}, \tau_{w_j}\} = \tau_{q_j} = u\}} du \right], \\ PV_{net}^{in}(t, T) &= \tilde{E}_t \left[\sum_{t < t_{ji} < T} \pi_j(t_{ji}) \exp \left\{ - \int_t^{t_{ji}} r(v) dv \right\} 1_{\{\min\{\tau_{q_j}, \tau_{w_j}\} > t_{ji}\}} \right], \\ PV_{load}^{in}(t, T) &= \tilde{E}_t \left[\sum_{t < t_{ji} < T} \ell_j(t_{ji}) \exp \left\{ - \int_t^{t_{ji}} r(v) dv \right\} 1_{\{\min\{\tau_{q_j}, \tau_{w_j}\} > t_{ji}\}} \right] \end{aligned}$$

で、 $\tilde{E}_t[\cdot]$ は時刻 t までの情報が既知のときのリスク中立確率 $\tilde{P}$ の下での条件付き期待値演算子である。

詳細な議論は省くが、リスク中立確率 $\tilde{P}$ の下でのハザード率 $\tilde{h}_{q_j}(t)$, $\tilde{h}_{w_j}(t)$ が与えられているとき、ある条件の下では⁶、上述の式は累積ハザード率を用いて、

$$PV_1^{out}(t, T) = S_{e,j} \tilde{E}_t \left[\exp \left\{ -H_0(t, T) - \tilde{H}_{q_j}(t, T) - \tilde{H}_{w_j}(t, T) \right\} \right], \quad (3)$$

$$PV_2^{out}(t, T) = \tilde{E}_t \left[\int_t^T S_{w_j}(u) \tilde{h}_{w_j}(u) \exp \left\{ -H_0(t, u) - \tilde{H}_{q_j}(t, u) - \tilde{H}_{w_j}(t, u) \right\} du \right], \quad (4)$$

$$PV_3^{out}(t, T) = S_{d,j} \tilde{E}_t \left[\int_t^T \tilde{h}_{q_j}(u) \exp \left\{ -H_0(t, u) - \tilde{H}_{q_j}(t, u) - \tilde{H}_{w_j}(t, u) \right\} du \right], \quad (5)$$

$$PV_{net}^{in}(t, T) = \tilde{E}_t \left[\sum_{t < t_{ji} < T} \pi_j(t_{ji}) \exp \left\{ -H_0(t, t_{ji}) - \tilde{H}_{q_j}(t, t_{ji}) - \tilde{H}_{w_j}(t, t_{ji}) \right\} \right], \quad (6)$$

$$PV_{load}^{in}(t, T) = \tilde{E}_t \left[\sum_{t < t_{ji} < T} \ell_j(t_{ji}) \exp \left\{ -H_0(t, t_{ji}) - \tilde{H}_{q_j}(t, t_{ji}) - \tilde{H}_{w_j}(t, t_{ji}) \right\} \right]$$

⁵ 保険契約に無裁定価格理論を用いられるかどうか、用いるべきかどうかに関しては議論があるが、ここではとりあえず用いたときの結果を示す。

⁶ 例えば、ハザード過程が Cox 過程であればよい。なお、以下の式変形の詳細は Kijima and Muromachi[19] を参照されたい。

と書ける。ただし,

$$H_0(t, T) = \int_t^T r(s) ds, \quad \tilde{H}_{q_j}(t, T) = \int_t^T \tilde{h}_{q_j}(s) ds, \quad \tilde{H}_{w_j}(t, T) = \int_t^T \tilde{h}_{w_j}(s) ds$$

である。ここで,

$$\tilde{m}_j(t, T, T_{q_j}, T_{w_j}) = \exp \left\{ -H_0(t, T) - \tilde{H}_{q_j}(t, T_{q_j}) - \tilde{H}_{w_j}(t, T_{w_j}) \right\},$$

とおき, 微積分演算の交換可能性を仮定すると,

$$PV_1^{out}(t, T) = S_{e,j} \tilde{E}_t [\tilde{m}_j(t, T, T, T)], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} PV_2^{out}(t, T) &= -\tilde{E}_t \left[\int_t^T S_{w_j}(u) \frac{\partial}{\partial T_{w_j}} \tilde{m}_j(t, T, T_{q_j}, T_{w_j}) \Big|_{T=T_{q_j}=T_{w_j}=u} du \right] \\ &= -\int_t^T S_{w_j}(u) \frac{\partial}{\partial T_{w_j}} \tilde{E}_t [\tilde{m}_j(t, T, T_{q_j}, T_{w_j})] \Big|_{T=T_{q_j}=T_{w_j}=u} du, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} PV_3^{out}(t, T) &= -S_{d,j} \tilde{E}_t \left[\int_t^T \frac{\partial}{\partial T_{q_j}} \tilde{m}_j(t, T, T_{q_j}, T_{w_j}) \Big|_{T=T_{q_j}=T_{w_j}=u} du \right] \\ &= -S_{d,j} \int_t^T \frac{\partial}{\partial T_{q_j}} \tilde{E}_t [\tilde{m}_j(t, T, T_{q_j}, T_{w_j})] \Big|_{T=T_{q_j}=T_{w_j}=u} du, \end{aligned} \quad (9)$$

$$PV_{net}^{in}(t, T) = \sum_{t < t_{ji} < T} \pi_j(t_{ji}) \tilde{E}_t [\tilde{m}_j(t, t_{ji}, t_{ji}, t_{ji})], \quad (10)$$

$$PV_{load}^{in}(t, T) = \sum_{t < t_{ji} < T} l_j(t_{ji}) \tilde{E}_t [\tilde{m}_j(t, t_{ji}, t_{ji}, t_{ji})] \quad (11)$$

となる。 $\tilde{m}_j(t, T, T_{q_j}, T_{w_j})$ を具体的に与えて (7)–(11) を計算すれば, (2) より生命保険契約 j の価値 $p^{LI}(t, T)$ が得られる。

5.3 単純化した例

実用化のため, 以下の仮定を追加する。

- 仮定 1. $\sigma_{q_j}(t) = 0$, $h_{q_j}(t)$ は時刻 t の確定的な関数,
- 仮定 2. $r(t)$ と $h_{w_j}(t)$ は独立,
- 仮定 3. 時刻 t の確定的な関数 $\ell_{w_j}(t)$ を用いて, $\tilde{h}_{w_j}(t) = h_{w_j}(t) + \ell_{w_j}(t)$ と書ける,
- 仮定 4. $S_{w_j}(t) = \frac{A}{T}t$,

仮定 1–3 より,

$$\tilde{E}_t [\tilde{m}_j(t, T_j, T_{q_j}, T_{w_j})] = p_0(t, T) e^{-\tilde{B}_{q_j}(t, T_{q_j}) - \tilde{B}_{w_j}(t, T_{w_j}) + \frac{1}{2} S_{w_j}^2(t, T_{w_j})}$$

と書ける。ただし,

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{q_j}(u, v) &= \int_u^v \tilde{h}_{q_j}(s) ds, \\ \tilde{B}_{w_j}(u, v) &= \tilde{E}_u \left[\int_u^v \tilde{h}_{w_j}(s) ds \right], \\ S_{w_j}^2(u, v) &= \frac{1}{3} \sigma_{w_j}^2 (v - u)^3\end{aligned}$$

である。

$h_{q_j}(t)$ と $E[h_{w_j}(t)]$ は、実測データから具体的に与えるものとする。他のパラメータも適宜与えられるとすれば、 $p_j^{LI}(t, T)$ は初等的な関数の数値積分により求められる。生命保険契約の評価で問題なのは、これらの負債は現実に市場で取引されているわけではないので、債券の場合と異なり、リスクプレミアム調整率 $\ell_{w_j}(t)$ を市場で観測されるデータから推定できないという点である。

5.4 生命保険証券と社債の類似性

例えば、「 $S_{e,j} = A$ 」「死亡時及び解約時の支払いは満期 T に発生し、その支払額は共通で $A\delta$ 」「 $r(t)$, $h_{w_j}(t)$, $h_{q_j}(t)$ は互いに独立」と仮定すると、前述の生命保険証券の時刻 t における価値は、

$$\begin{aligned}p^{LI}(t, T) &= Ap_0(t, T) \left[\tilde{P}_t \left\{ \tau_{q_j} > T, \tau_{w_j} > T \right\} + \delta \tilde{P}_t \left\{ \tau_{q_j} \leq T, \tau_{w_j} > \tau_{q_j} \right\} + \delta \tilde{P}_t \left\{ \tau_{w_j} \leq T, \tau_{q_j} > \tau_{w_j} \right\} \right] \\ &= Ap_0(t, T) \left[\tilde{P}_t \left\{ \tau_{q_j} > T, \tau_{w_j} > T \right\} + \delta \left(1 - \tilde{P}_t \left\{ \tau_{q_j} > T, \tau_{w_j} > T \right\} \right) \right] \\ &= Ap_0(t, T) \left[\delta + (1 - \delta) \tilde{P}_t \left\{ \tau_{q_j} > T, \tau_{w_j} > T \right\} \right]\end{aligned}$$

となる。この表現は、「死亡または解約」を「デフォルト」とみなしたときの額面 A の割引社債の価値に等しい。また、死亡時と解約時で支払い額が異なる場合は、死亡と解約をそれぞれ異なる債務者のデフォルトと解釈すると、生命保険証券は、債務者別に支払い金額が異なるファースト・デフォルト・スワップ⁷とみなすこともできる。このため、Kijima and Muromachi[19]のデフォルト・スワップの価格評価法が生命保険契約の価格評価に適用できる。

6 生命保険会社のポートフォリオの価格感応度

M 個の株式と N 個の割引社債を持ち、 L 個の生命保険契約を抱える場合について考える。保険会社から見た、時刻 t におけるサープラス＝資産－負債の価値を $\pi(t)$ とすると、この場合、

$$\pi(t) = \sum_{j=1}^N w_j p_j(t, T_j) + \sum_{j=1}^M w_j S_j(t) - \sum_{j=1}^L w_j p_j^{LI}(t, T_j)$$

と書ける。この式は線形なので、 $\pi(t)$ の各変数 ($r(t)$, $h_j(t)$, $h_{q_j}(t)$, $h_{w_j}(t)$) に対する感応度は、個別資産価格の各変数に関する偏微分を求めれば計算できる。

⁷ 複数債務者のデフォルトに対するバスケット型のデフォルト・ブット・オプションの一種で、最初にデフォルトした債務者に対してのみ支払いが発生するものを指す。

6.1 デュレーション・マッチング

$r(t)$ の微小変動に対して $\pi(t)$ が変動しない条件は,

$$\frac{\partial \pi(t)}{\partial r(t)} = \sum_{j=1}^N w_j \frac{\partial p_j(t, T_j)}{\partial r(t)} - \sum_{j=1}^L w_j \frac{\partial p_j^{LI}(t, T_j)}{\partial r(t)} = 0$$

である。これは、資産ポートフォリオの価格を $\pi_A(t)$ 、修正デュレーションを D_A 、負債ポートフォリオの価格を $\pi_L(t)$ 、修正デュレーションを D_L とすると、

$$\pi_A(t) D_A = \pi_L(t) D_L$$

とも書ける。ただし、

$$\begin{aligned} \pi_A &= \sum_{j=1}^N w_j p_j(t, T_j) + \sum_{j=1}^M w_j S_j(t), & \pi_D &= \sum_{j=1}^L w_j p_j^{LI}(t, T_j), \\ D_A &= -\frac{1}{\pi_A} \sum_{j=1}^N w_j \frac{\partial p_j(t, T_j)}{\partial r(t)}, & D_L &= -\frac{1}{\pi_L} \sum_{j=1}^L w_j \frac{\partial p_j^{LI}(t, T_j)}{\partial r(t)} \end{aligned}$$

である。

6.2 資産価値の偏微分係数

前述のガウス型モデルにおける資産価値の偏微分係数は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_j(t, T)}{\partial r(t)} &= -R_2(t, T) p_j(t, T), \\ \frac{\partial p_j(t, T)}{\partial h_j(t)} &= -X_j(t)(1 - \delta_j)(T - t) p_0(t, T) L_j(t, T) \exp \left\{ -B_j(t, T) + \frac{1}{2} S_j^2(t, T) \right\}, \\ \frac{\partial p_j^{LI}(t, T)}{\partial r(t)} &= -S_{e,j} R_2(t, T) p_0(t, T) Q_j(t, T) \\ &\quad - \int_t^T S_{w,j}(u) \left\{ E[h_{w_j}(u)] - \frac{1}{2} \sigma_{w_j}^2(u - t)^2 \right\} R_2(t, u) p_0(t, u) Q_j(t, u) du \\ &\quad - S_{d,j} \int_t^T E[h_{q_j}(u)] R_2(t, u) p_0(t, u) Q_j(t, u) du \\ &\quad + \sum_{t < t_{ji} < T} (\pi_j(t_{ji}) + l_j(t_{ji})) R_2(t, t_{ji}) p_0(t, t_{ji}) Q_j(t, t_{ji}), \\ \frac{\partial p_j^{LI}(t, T)}{\partial h_{q_j}(t)} &= -S_{e,j}(T - t) p_0(t, T) Q_j(t, T) \\ &\quad - \int_t^T S_{w,j}(u)(u - t) \left\{ E[h_{w_j}(u)] - \frac{1}{2} \sigma_{w_j}^2(u - t)^2 \right\} p_0(t, u) Q_j(t, u) du \\ &\quad + S_{d,j} \int_t^T (1 - (u - t) E[h_{q_j}(u)]) p_0(t, u) Q_j(t, u) du \\ &\quad + \sum_{t < t_{ji} < T} (\pi_j(t_{ji}) + l_j(t_{ji}))(t_{ji} - t) p_0(t, t_{ji}) Q_j(t, t_{ji}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_j^{LI}(t, T)}{\partial h_{w_j}(t)} = & -S_{e,j}(T-t)p_0(t, T)Q_j(t, T) \\
& + \int_t^T S_{w,j}(u) \left(1 - (u-t) \left\{ E[h_{w_j}(u)] - \frac{1}{2}\sigma_{w_j}^2(u-t)^2 \right\} \right) p_0(t, u)Q_j(t, u)du \\
& - S_{d,j} \int_t^T (u-t)E[h_{q_j}(u)]p_0(t, u)Q_j(t, u)du \\
& + \sum_{t < t_{ji} < T} (\pi_j(t_{ji}) + l_j(t_{ji}))(t_{ji}-t)p_0(t, t_{ji})Q_j(t, t_{ji}).
\end{aligned}$$

と書ける。ただし、

$$Q_j(u, v) = \exp \left\{ -B_{q_j}(u, v) - B_{w_j}(u, v) + \frac{1}{2}S_{w_j}^2(u, v) \right\}$$

であり、これ以外の偏微分係数はゼロである。

7 生命保険会社の全社 (firm - wide) モデル

ここまで準備ができると、いよいよ生命保険会社全体のモデルに取り組むことが可能となる。本節では、リターンとリスクの個別資産への分解と、パフォーマンス尺度に関して述べる。

7.1 リターンの分解

時刻 t における保険契約 j の純保険料式責任準備金を $V_j(t)$ とおくと、

$$V_j(t) = PV_1^{out}(t, T_j) + PV_2^{out}(t, T_j) + PV_3^{out}(t, T_j) - PV_{net}^{in} \quad (12)$$

である。(3)-(6) と (12) より、

$$\frac{dV_j(t)}{dt} = r(t)V_j(t) + h_{q_j}(t)[V_j(t) - S_{d,j}] + h_{w_j}(t)[V_j(t) - S_{w_j}(t)] + \sum_{t_{ji}} \pi_j(t_{ji})\delta(t - t_{ji}) \quad (13)$$

が導かれる。ただし、 $\delta(x)$ は Dirac の δ 関数である。(13) はこの設定におけるティーレの微分方程式に相当する。通常のティーレの微分方程式では、左辺は責任準備金 $V_j(t)$ の時間的増加率であり、右辺第1項は利息による増加、第2項は死亡保険金の支払による減少と死亡者の責任準備金積立を逃れるための増加、第3項は解約返礼金の支払による減少と解約者の責任準備金積立を逃れるための増加、第4項は純保険料収入による増加を示すが、ここではそれらの係数が確率変数となっている。ティーレの微分方程式に関しては、二見[1]を参照されたい。

7.2 リスクの分解

計算されたリスク量をもとに、各資産にリスク・キャピタルを割り当てる方法はいろいろありうるが、ここでは Litterman [20] の考え方に基づく方法を紹介する。

N 個のリスク資産から成るポートフォリオの、将来時刻 $\bar{t}$ における価格を

$$\pi(\bar{t}) = \sum_{j=1}^N w_j P_j(\bar{t})$$

(w_j : 資産 j のウェイト, $P_j(\bar{t})$: 時刻 $\bar{t}$ における資産 j の価格) とする. このポートフォリオ全体のリスク量として, 例えば, $\pi(\bar{t})$ の期待値と α パーセンタイルの差を $R_\pi(\vec{w}, \vec{P}; \alpha)$ とおく. ただし, $\vec{w} = (w_1, \dots, w_N)$, $\vec{P} = (P_1(\bar{t}), \dots, P_N(\bar{t}))$ である. すると, 関数 $R_\pi(\vec{w}, \vec{P}; \alpha)$ は明らかに $\vec{w}$ に関する一次の同次関数であり,

$$R_\pi(k\vec{w}, \vec{P}; \alpha) = k R_\pi(\vec{w}, \vec{P}; \alpha)$$

と書ける. このとき, 同次関数のオイラーの定理より,

$$R_\pi(\vec{w}, \vec{P}; \alpha) = \sum_{j=1}^N w_j \frac{\partial R_\pi(\vec{w}, \vec{P}; \alpha)}{\partial w_j} \quad (14)$$

が成り立つ. この式は, 全体のリスク量 $R_\pi(\vec{w}, \vec{P}; \alpha)$ が各資産 j へ $w_j \frac{\partial R_\pi(\vec{w}, \vec{P}; \alpha)}{\partial w_j}$ ずつ配分できることを示している. $\frac{\partial R_\pi(\vec{w}, \vec{P}; \alpha)}{\partial w_j}$ は現在のポートフォリオにおける資産 j の限界リスク量⁸ であり, ポートフォリオの分散投資効果を反映する. この限界リスク量に保有量 w_j を掛けた量 $w_j \frac{\partial R_\pi(\vec{w}, \vec{P}; \alpha)}{\partial w_j}$ は, リスクの尺度としては決して悪くない量であろう.

上述のリスクの分解は, ポートフォリオ全体のリスク量が資産保有量の同次関数であるときに適用可能である. 例えば, リスク量として標準偏差を採用した場合も, 標準偏差は資産保有量の一次の同次関数なので, 全く同様に扱える. 詳しくは室町 [3] も参照されたい.

7.3 RAPM

(14) で示した量を各資産へのリスク配分量とみなすと, 資産 j の $RAPM_j$ は,

$$RAPM_j = \frac{w_j (E[P_j(\bar{t})] - (1 + r_{rf})P_j(0))}{w_j \frac{\partial R_\pi}{\partial w_j}} = \frac{E[P_j(\bar{t})] - (1 + r_{rf})P_j(0)}{\frac{\partial R_\pi}{\partial w_j}}$$

($E[\cdot]$: 期待値演算子, $r_{rf} = -\frac{\ln[p_0(0, \bar{t})]}{\bar{t}}$: 現時点における満期 $\bar{t}$ の割引債の利回り) から求められる. $RAPM_j$ が大きい資産ほど, 単位リスク当たりのリターンが高く, 収益に有効と判断できる⁹.

ただし, ポートフォリオの将来価格の分布は, 正規分布のように単純ではないので, リスク量をたった一つのリスク量 R_π だけを用いて捉えることは不適切である¹⁰. ここで述べた RAPM による収益評価も, ある唯一つの α に対する $RAPM_j$ だけで判断するべきではない.

⁸ 偏微分係数を限界～ (marginal ～) と呼ぶ慣例に従うと, これが正当な限界リスク量の定義である. CreditMetricsTM などという限界リスク量 (marginal amount of risk) の概念は, これとは異なる. 詳しくは室町 [3] を参照.

⁹ 田中・室町 [2] では, 分子を超過収益でなく収益で図示した. これは, 超過収益で表示するとグラフの読み方が若干複雑になるからである.

¹⁰ Kijima and Muromachi [20] のシミュレーション結果を参照.

8 将来価格分布の算出と VaR

本節では、将来価格の分布の算出手順と、シミュレーションで求めた VaR の誤差評価について述べる。

8.1 将来価格分布の算出

将来時点（リスク・ホライズン） $\bar{t}$ における資産ポートフォリオ及び負債ポートフォリオの将来価格の分布を算出するには、

1. 相関をもつ正規乱数を発生させる。
2. 1で発生させた乱数を用いて、金利、各種ハザード率、リスク資産（株式）価格など各確率変数の時刻 $\bar{t}$ における値を、現実の確率測度 P における式に従ってモンテカルロ法で算出する。また、デフォルトの発生も企業別に算出する。（これら全体が、時刻 $\bar{t}$ におけるシナリオ一つ分に相当する。）
3. そのシナリオをもとに、債券を含む金利デリバティブや、リスク資産を原資産とするデリバティブの時刻 $\bar{t}$ における価格を算出する。価格は、時刻 $\bar{t}$ 以降の原資産は測度 $\tilde{P}$ における式に従って変動すると考えて、時刻 $\bar{t}$ における将来キャッシュフローの割引価値の $\tilde{P}$ の下での期待値として算出する。また、負債である生命保険契約の価格も算出する。
4. そのシナリオにおける $\bar{t}$ 時点の資産（負債）ポートフォリオの価格は、全資産（負債）の価格の総和として算出する。

という手順を、必要な回数だけ繰り返せば良い。

このようにして、 $\bar{t}$ における資産及び負債ポートフォリオの将来価格の分布が具体的に得られれば、各ポートフォリオの各種リスク指標（例えば標準偏差、VaR, LPM（Lower Partial Moment）など）は容易に計算できる。また、サープラスの分析も同様に行うことができる。

8.2 モンテカルロ法で求めた VaR の誤差評価

モンテカルロ法を用いて算出される分布関数は、真の分布関数の近似である。そのため、算出される VaR などの全ての統計量には誤差が存在する。ここでは、その誤差を解析的に評価する簡単な方法について考える。

ある連続な確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ 、確率水準 $100(1 - \alpha)$ パーセントのパーセント点を ξ_α とする。Cramer [7] によると、 X のサンプルとして十分大きな n 個の独立なデータ X_i ($1 \leq i \leq n$) を得たとき、そのデータから算出される確率水準 $100(1 - \alpha)$ パーセントのパーセント点 ζ_α は漸近的に（平均 ξ_α 、分散 $\frac{\alpha(1-\alpha)}{nf^2(\xi_\alpha)}$ ）の正規分布に従う。ここでは、簡単のため、データ X_i ($1 \leq i \leq n$) を小

さい順に並べたとき、任意の確率水準 $100(1 - \alpha)$ に対して、 $\zeta_\alpha = X_m$ となるようなデータ X_m (m は $2 \leq m \leq n - 1$ を満たす整数) が存在することを仮定する。また、通常 ξ_α と $f(x)$ は未知なので、 ξ_α は ζ_α で、 $f(\xi_\alpha)$ は $f(\zeta_\alpha)$ で代用し、さらに $f(\zeta_\alpha)$ は n 個のデータから数値的に算出する。

例えば、一階微分に中心差分近似¹¹ を用いた場合、

$$f(\zeta_\alpha) \cong \frac{F_D(X_{m+1}) - F_D(X_{m-1})}{X_{m+1} - X_{m-1}} = \frac{2}{n(X_{m+1} - X_{m-1})}$$

($F_D(x)$: データ X_i ($1 \leq i \leq n$) の分布関数) となるので、データ X_i ($1 \leq i \leq n$) による ξ_α の推定値は $\mu_\alpha = X_m$ 、分散は $\sigma_\alpha^2 = n\alpha(1 - \alpha)(X_{m+1} - X_{m-1})^2/4$ となる。これを用いると、近似的に、 ξ_α は確率 $1 - 2\beta$ で $(\mu_\alpha - z_\beta\sigma_\alpha, \mu_\alpha + z_\beta\sigma_\alpha)$ にあることになる。ただし、 z_β は標準正規分布の 100β パーセント点である。

なお、この議論の実用上の有効性は $X_{m+1} - X_{m-1}$ の漸近的性質に依存する。具体的には、 $X_{m+1} - X_{m-1} = o(n^{-\frac{1}{2}})$ の場合に有効と考えられる。

9 数値例：簡単な生命保険会社のモデル

前述のガウス型モデルを用いて、1年後の資産、負債、サープラス (= 資産 - 負債) の価値を計算した結果を示す。

9.1 前提条件

計算の前提条件として、考慮する資産ポートフォリオと負債ポートフォリオの具体的な構成と、基礎方程式のパラメータの設定について述べる。

9.1.1 資産及び負債の構成

資産ポートフォリオの構成を表1に、負債ポートフォリオの構成を表2に、貸借対照表を表3に示す。以下では、資産に株式を含む場合と含まない場合とを取り扱うが、表1-2における () が株式を含む場合にのみ考慮される資産である。株式を含む場合、資産ポートフォリオの時価の24%が株式である。また、割引債が一銘柄として取り扱われる場合を single と呼び、多数の小口割引債の集合体として取り扱われる場合を group と呼ぶ。single 資産の場合、1年後の状態はデフォルトしているかしていないかのどちらかであるが、group 資産の場合、その1年間のデフォルト確率の分だけデフォルトが発生し、元本が小さくなるものとする。もちろん、デフォルトした分の回収額は考慮する。

¹¹ この中心差分近似の式では、 X_i は均等分布とみなしている。不均等分布の場合も、式を若干改訂すれば評価できる。

表 1. 資産ポートフォリオの構成

	格付	5 年債券		10 年債券		株式 時価	デフォルト の可能性	single/ group
		額面	時価	額面	時価			
企業 A	Aaa	0.4	0.3084	0.4	0.2378	(0.4)	有	single
企業 B	Aaa	0.2	0.1542	0.2	0.1189	(0.4)	有	single
企業 C	Baa	0.4	0.3038	0.4	0.2308	(0.4)	有	single
企業 D	Baa	0.2	0.1519	0.2	0.1154	(0.4)	有	single
企業 E	B	0.4	0.2819	0.4	0.1986	(0.4)	有	single
企業 F	B	0.2	0.1409	0.2	0.0993	(0.4)	有	single
企業 G	Aaa	0.4	0.3084	0.4	0.2378		有	single
企業 H	Aaa	0.2	0.1542	0.2	0.1189		有	single
企業 I	Baa	0.4	0.3038	0.4	0.2308		有	single
企業 J	Baa	0.2	0.1519	0.2	0.1154		有	single
企業 K	B	0.4	0.2819	0.4	0.1986		有	single
企業 L	B	0.2	0.1409	0.2	0.0993		有	single
債券 Index 1	Aaa	0.2	0.1542				有	group
債券 Index 2	Aa	0.2	0.1534				有	group
債券 Index 3	A	0.2	0.1527				有	group
債券 Index 4	Baa	0.2	0.1519				有	group
債券 Index 5	Ba	0.2	0.1482				有	group
債券 Index 6	B	0.2	0.1409				有	group
国債		4.2	3.2710	2.0	1.2131		無	
株式 Index						(0.8)	無	

表 2. 負債ポートフォリオの構成

保険契約	年齢	$S_{e,j}(T)$	契約者	予定利率	純保険料	付加 保険料率	現在責任 準備金
	満期	$S_{d,j}$					
	(年)	(百万円)					
1 定期付養老	32	2.00	1	2.75	122000 (平準払)	10	-0.24 (-3.0%)
	60	20.00					
2 定期付養老	40	2.50	4	5.50	87000 (平準払)	5	2.11 (26.4%)
	60	15.00					
3 定期付養老	50	1.25	2	5.00	46000 (平準払)	15	1.46 (18.3%)
	60	7.50					
4 定期付養老	57	0.83	1	4.00	35000 (平準払)	15	0.75 (9.4%)
	3	5.00					
5 養老保険	50	5.00	1	5.50	162000 (平準払)	5	1.93 (24.1%)
	60	5.00					
6 養老保険	40	2.50	1	3.75	1775000 (一時払)	0	1.97 (24.7%)
	45	2.50					

表 3. 貸借対照表

(兆円)

資産		負債, サープラス	
社債	5.5854	保険契約 1	-0.3400
国債	4.4840	保険契約 2	1.9752
(社債)	(3.2000)	保険契約 3	1.3827
		保険契約 4	0.7390
		保険契約 5	1.8901
		保険契約 6	1.9728
		負債計	7.6197
		サープラス	2.4497
			(5.6497)
資産計	10.0694	負債+サープラス	10.0694
	(13.2694)		(13.2694)

9.1.2 パラメータの設定

まず、現在のフォワードレートの期間構造 $f_j(0, t)$ は、表1にまとめるように、デフォルト・フリーでも格付別でもすべてフラットとする。また、デフォルト・フリー金利の平均回帰力は $a_0 = 0.02$ とする。金利リスクの影響を調べるため、ボラティリティ σ_0 は可変とし、表3,4にまとめるように、ケースによって0.0%, 1.0%, 2.0%のどれかの値をとるものとする。解約率のボラティリティも同様である。

表2に、格付別のハザード率のパラメータと回収率をまとめる。また、ハザード率の相関は田中・室町[2]の数値例と同じであり、ハザード率と金利は独立と仮定する。株価のドリフト率は $\mu_j = 0.1$ 、株価固有のボラティリティは $\delta_{N+j} = 0.2$ 、 $r(t)$ と相関のあるボラティリティは $\delta_{0j} = 0.01$ とする。

表4. 現在時点のフォワードレート

	国債	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B
$f_j(0, t)$	5.0%	5.2%	5.3%	5.4%	5.5%	6.0%	7.0%
スプレッド	-	0.2%	0.3%	0.4%	0.5%	1.0%	2.0%

表5. デフォルトに関するパラメータ

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B
λ_j	0.000051	0.000234	0.000289	0.001539	0.01249443	2.164202
γ_j	2.0142	1.5656	1.6963	1.4221	1.1998	0.1725
η_j	0	0	0	0	0	9.721
σ_j	0.000885	0.000993	0.001171	0.002054	0.005505	0.008004
δ_j	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4

表6. シミュレーション・ケース

株式を含まない		金利の volatility : σ_0		
ポートフォリオ		0	0.01	0.02
解約率の	0	Case1	Case2	Case3
volatility	0.005	Case4	Case5	Case6
: σ_w	0.01	Case7	Case8	Case9

株式を含む		金利の volatility : σ_0		
ポートフォリオ		0	0.01	0.02
解約率の	0	Case11	Case12	Case13
volatility	0.005	Case14	Case15	Case16
: σ_w	0.01	Case17	Case18	Case19

9.2 結果と考察

このモデルでは、金利リスク、株価変動リスク、信用リスク、死亡リスク、解約リスクを考慮している。このうち、金利リスクは資産と負債の全体的な分布の形状に影響を及ぼし、株価変動リスクは資産の全体の分布に、信用リスクは特に資産の下側（左側）の分布に、死亡リスクと解約リスクは負債の全体的な分布に影響を及ぼすことは自明である。

まず、株式を含まない計算例として、Case 3 と Case 8 における資産・負債・サープラスの将来価値の分布を図2に示す。資産と負債の分布は、Case8 よりも Case 3 の方が広がっているが、サープラ

スの分布は Case 3 の方が集中している。これは、Case 3 で資産と負債の分布を広げる大きな要因であった金利リスクのかなりの部分が、資産と負債で相殺されているためである。その結果、Case 3 のサープラスの分布は鋭い峰になっている。なお、この峰の右側に比べて左側の方が裾野が長いのは、資産にしか効かない信用リスクの寄与である。一方、Case 8 でも金利リスクは資産と負債の間で相殺されているが、死亡リスクと解約リスクは負債にしか効かないので、これらと信用リスクがサープラスの分布を広げている。

図 2: 資産、負債、サープラスの分布

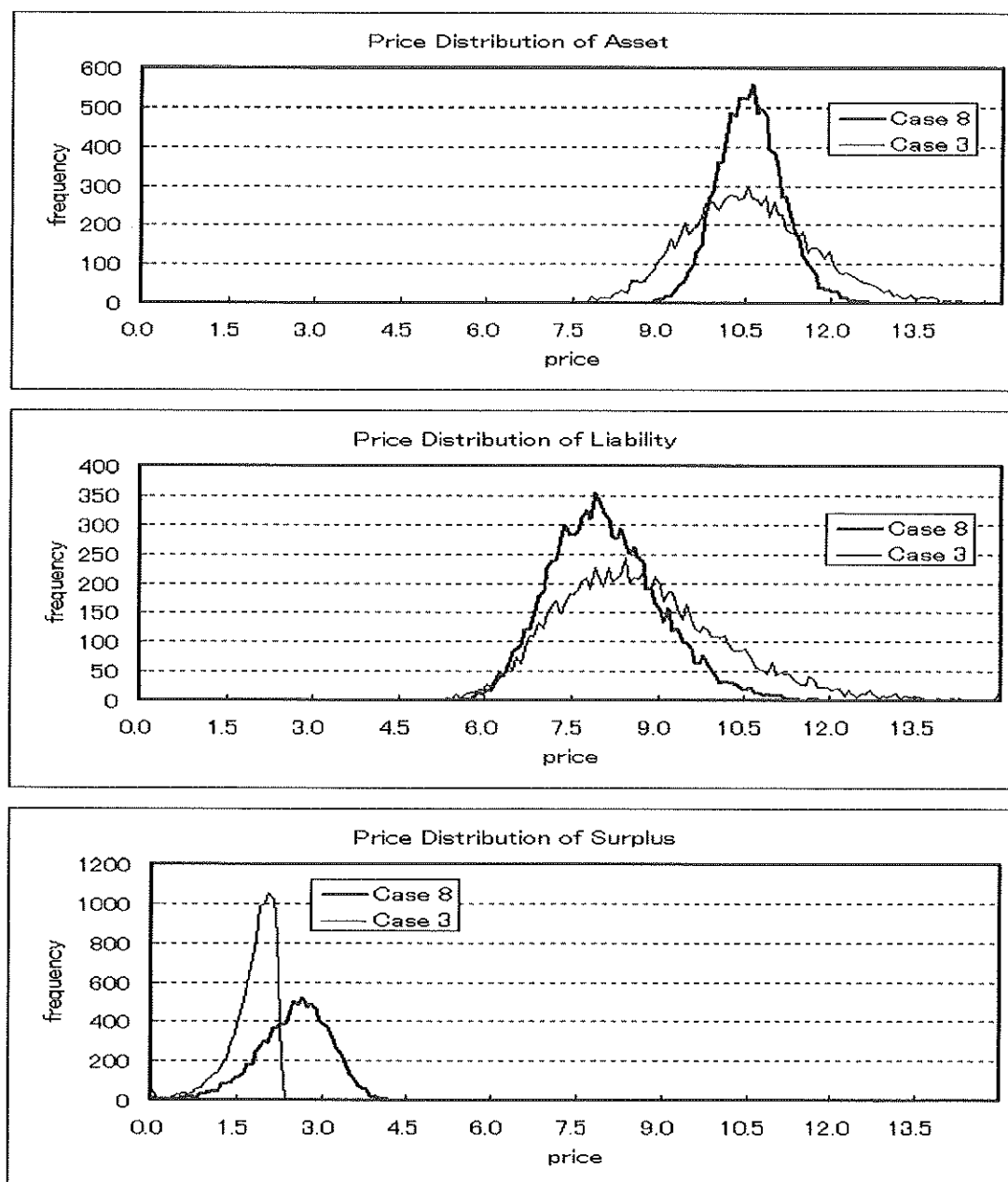


図 3 に、Case 8 における資産・負債・サープラスの VaR を、個別資産の VaR は積み上げグラフ

で、ポートフォリオの VaR は折れ線グラフで示す。室町 [3] で紹介した risk contribution とは異なり、個別資産の VaR を合計してもポートフォリオの VaR と一致しないことに注意されたい。このため正確な表現にはならないが、敢えて述べると、Case 8 の資産ポートフォリオの VaR では、90%-VaR の約 40%¹² は国債であるが、95%-VaR、99%-VaR とパーセントが高くなるほどその割合は低下し、99%-VaR では 30% を下回る。代わりに増加しているのは、低格付け債、B 格の VaR である。このことは、パーセントが高くなるほど、すなわち分布の裾にいくほど、金利リスクよりも信用リスクが効いてくることを示している。なお、この例では、資産と負債で金利リスクの大部分が相殺された結果、サープラスの VaR は資産と負債の中間的な値をとっている。

図 3: 資産・負債・サープラスの VaR (Case 8)

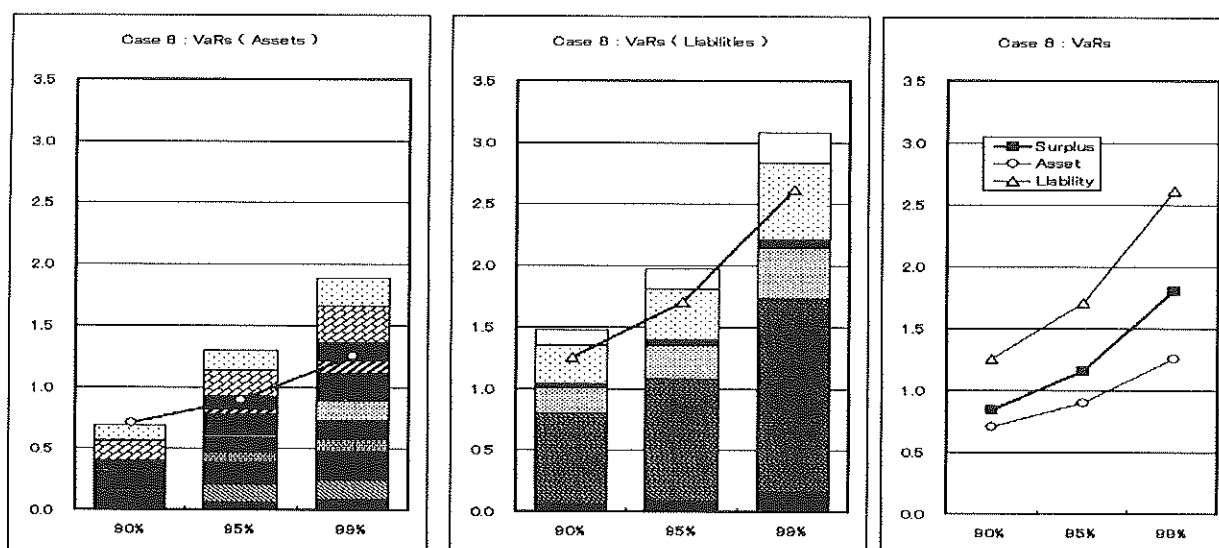


図 3 の資産の 90%-VaR では、個別資産の総和をポートフォリオの値が若干上回っているが、これは室町 [3] で触れた VaR の非劣加法性を示している。この性質は、図 4 に示す Case 7 において顕著に表れている。この非劣加法性は、金利リスクよりも信用リスクが支配的な場合に顕著に表れやすいようである。なお、負債では VaR の非劣加法性は見られなかった。これは、負債はすべて群団 (group) 扱いのため、信用リスクが金利リスクのように取り扱われているためだと考えられる。

図 5 に、さまざまなケースにおける 95%-VaR を示す。株式を含まないケースでは、負債の VaR に大きな影響を及ぼす解約リスクがサープラスの VaR にも大きな影響を与えている¹³。株式を含まず、しかも資産と負債で金利リスクがある程度相殺されている場合には、信用リスクとともに解約リスクも重要であることがわかる。次に株式の影響だが、一般に株価のボラティリティーは大きいので、ある程度以上の量の株式を保有している場合には、当然株価変動リスクが支配的になる。これを反映して、株式を含まないケースに比べ、株式を含むケースでは資産・サープラスの VaR は高くなっている。

¹² 個別資産の VaR の合計に対する比率である。

¹³ 死亡リスクは、解約リスクに比べて影響は小さい。

図 4: 資産の VaR (Case 7)

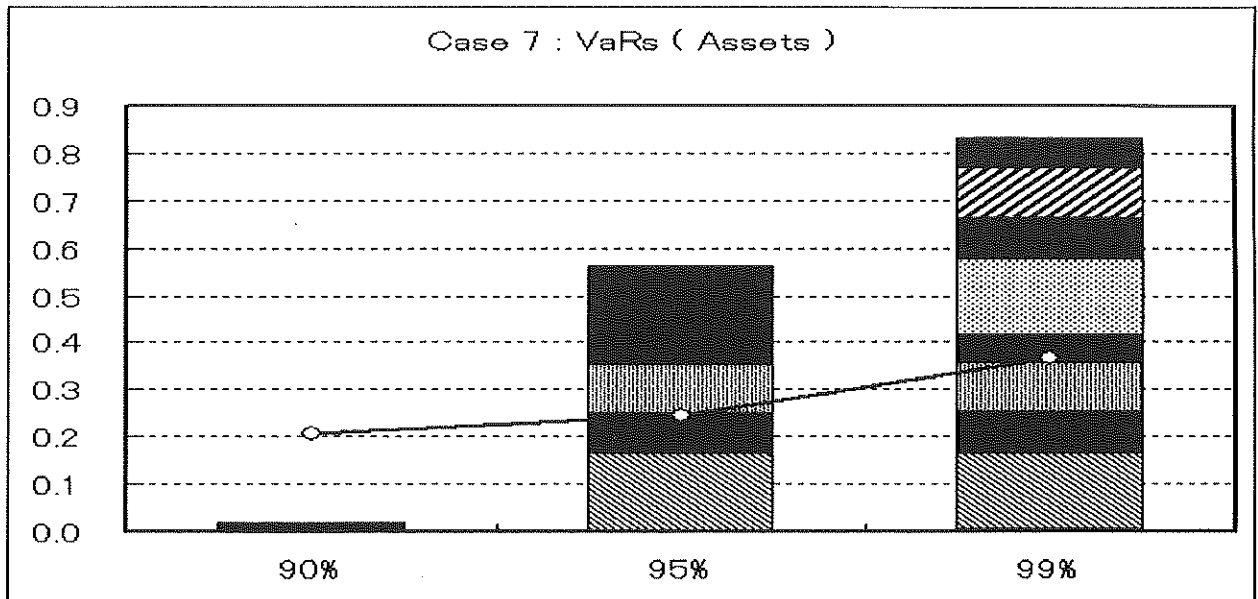


図 5: 各ケースの 95%-VaR

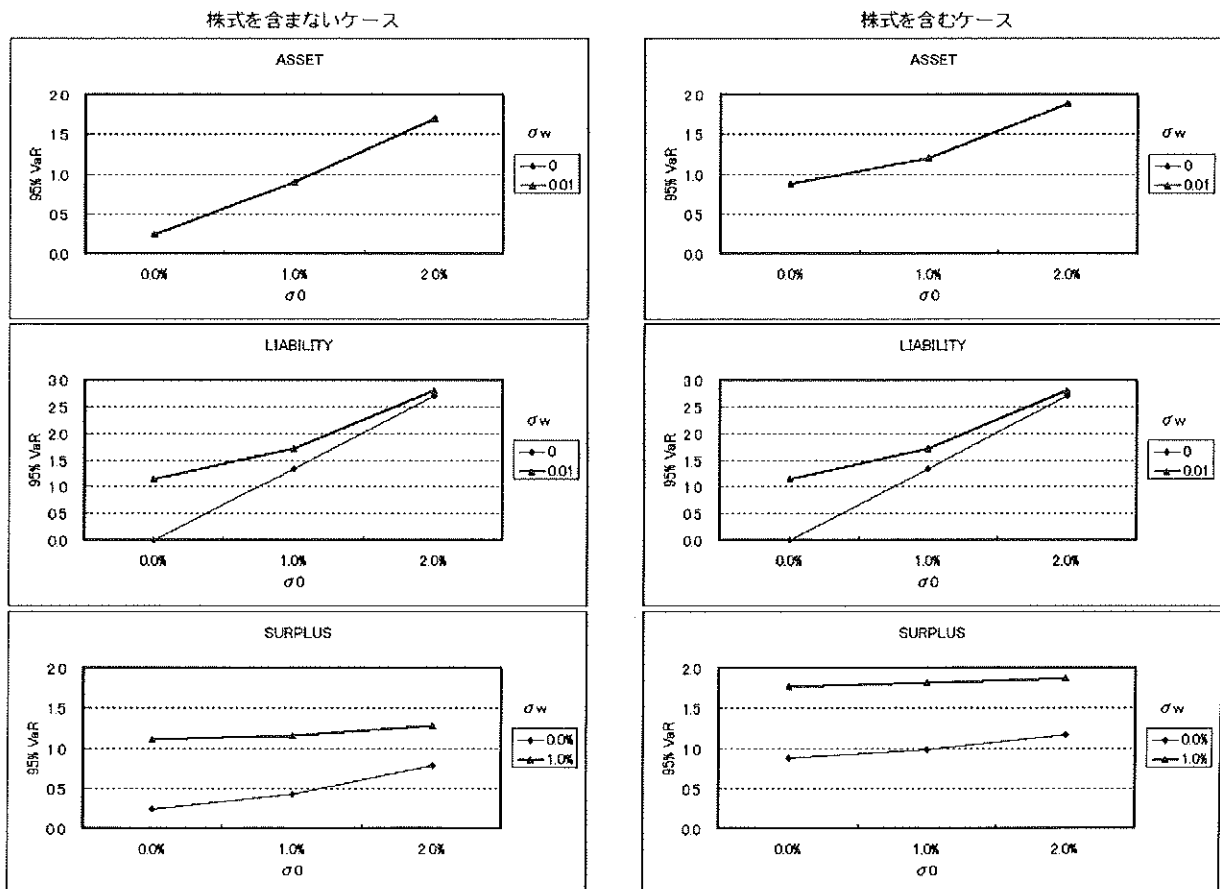


図 6: 個別資産の評価 (Case 8)

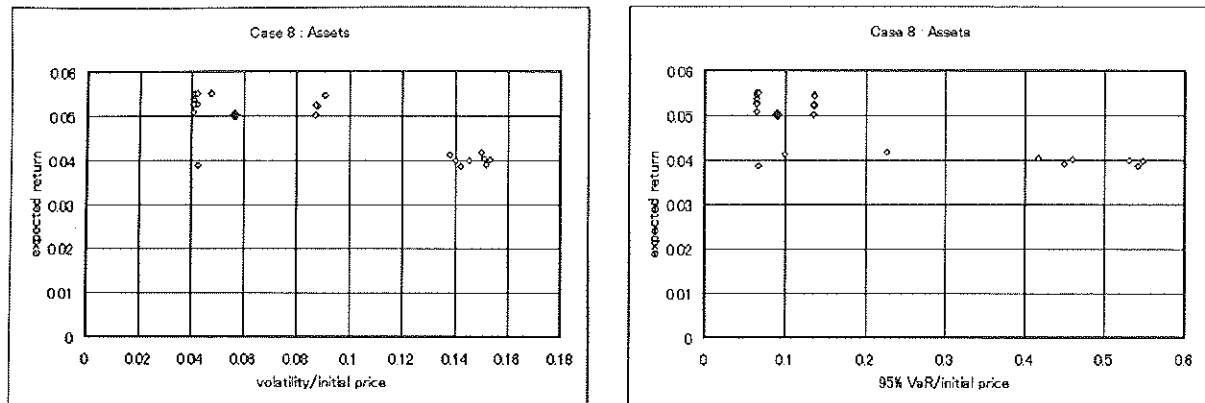


図 6 に、Case 8 における個別資産のリターン・リスク分析の結果を示す。リスクを示す尺度として、左図では個別資産の価格の標準偏差を、右図では 95%-VaR を採用し、各図中で黒い点はポートフォリオを示している。採用するリスク尺度によって、リターン・リスク分析の結果は微妙に変わってくる事がわかる。

10 おわりに

本稿では、生命保険会社の資産及び負債を評価・分析する新しいフレームワークを提案した。具体的には、Kijima and Muromachi [20] の金利リスクと信用リスクの統合評価のフレームワークをベースに、株価変動リスク、死亡リスク、解約リスクを組み込んでモデル化を行った。それを用いて、非常に単純化した資産及び負債構成を仮定して、さまざまな環境下でシミュレーションを行い、各リスクの寄与、資産と負債による金利リスクヘッジの効果などを具体的に示した。その結果、金利リスクが資産と負債である程度相殺できる状況の下では、保険契約の解約リスクが、株価変動リスクに次いで重要になりうることを示した。また、現在広く使われている VaR がポートフォリオのリスクを適切に表現できていない顕著な例も示した。

(冒頭でも述べたが、本稿は Tanaka and Muromachi[26] の主要部分の翻訳と AFIR 大会発表時の資料の抜粋を再構成したものである。より詳細な部分に関しては、オリジナルの資料を参照されたい。)

参考文献

- [1] 二見隆 (1992), 『生命保険数学』, 生命保険文化研究所
- [2] 田中周二, 室町幸雄 (2000), “市場リスク・信用リスク統合評価モデル,” ニッセイ基礎研究所報, 16, 14–50.

- [3] 室町幸雄 (2000), “個別資産へのリスクの配分とポートフォリオの最適化,” ニッセイ基礎研究所報, **16**, 77–100.
- [4] Amin, K.I. and R.A. Jarrow (1991), “Pricing foreign currency options under stochastic interest rates,” *Journal of International Money and Finance*, **10**, 310–329.
- [5] Amin K.I., and R.A. Jarrow (1992), “Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy,” *Mathematical Finance*, **2**, 217–238.
- [6] Credit Suisse Financial Products, (1997), CREDITRISK⁺.
- [7] Cramer, H. (1946), *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press.
- [8] Daykin, C. D., T. Pentikainen and M. Pesonen (1994), *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, 408–434.
- [9] Duffie, D. and K. Singleton (1999), “Modeling term structures of defaultable bonds,” *Review of Financial Studies*, **12**, 687–720.
- [10] Heath D., R. Jarrow and A. Morton (1992), “Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation,” *Econometrica*, **60**, 77–105.
- [11] Hull, J. and A. White, (1990), “Pricing interest-rate-derivative securities,” *Review of Financial Studies*, **3**, 573–592.
- [12] Inui, K. and M. Kijima (1998), “A Markovian framework in multi-factor Heath-Jarrow-Morton models,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **33**, 423–440.
- [13] JPMorgan, (1997a), RiskMetricsTM Technical Document.
- [14] JPMorgan, (1997b), CreditMetricsTM Technical Document.
- [15] Jarrow, R.A., D. Lando and S.M. Turnbull (1997), “A Markov model for the term structure of credit risk spread,” *Review of Financial Studies*, **10**, 481–523.
- [16] Jarrow, R.A. and S.M. Turnbull (1995), “Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk,” *Journal of Finance*, **50**, 53–86.
- [17] Jorion, P. (1997), *Value at Risk*, McGraw-Hill Companies, Inc.
- [18] Kijima, M. (1999), “A Gaussian term structure model of credit risk spreads and valuation of yield-spread options,” Working Paper, Tokyo Metropolitan University.
- [19] Kijima, M. and Y. Muromachi (2000a), “Credit events and the valuation of credit derivatives of basket type,” *Review of Derivatives Research*, **4**, 53–77.
- [20] Kijima, M. and Y. Muromachi (2000b), “Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes,” *Journal of Risk*, **3**, No. 1, 5–36.
- [21] Litterman, R. (1997), “Hot spots and hedges (I),” *Risk*, **10**, 42–45.
- [22] Longstaff, F. and E. Schwartz (1995), “A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt,” *Journal of Finance*, **50**, 789–819.
- [23] Matten, C. (1996), *Managing Bank Capital*, John Wiley & Sons Ltd.
- [24] Mulvey, J. M. and A. E. Thorlacius (1998), “The Towers Perrin Global Capital Market Scenario Generation System,” in *Worldwide Asset and Liability Modeling*, Publication of the Newton Institute, Cambridge University Press, 286–312.
- [25] Schnieper, R. (1997), “Capital Allocation and Solvency Testing,” SCOR Notes International Prize in Actuarial Science : Solvency and Capital allocation, 49–104.

- [26] Tanaka, S. and Y. Muromachi (1999), "A new method for evaluating and managing the complex risks embedded in the life insurer's balance sheet: basic ideas and preliminary results," *Joint Day Proceedings of the 30th International ASTIN Colloquium and the 9th International AFIR Colloquium*, Tokyo, 195–226.
- [27] Taylor, G. C. (1997), "Risk, Capital and Profit in Insurance," SCOR Notes International Prize in Actuarial Science : Solvency and Capital allocation, 5–47.
- [28] Wilkie, A. D. (1986), "A stochastic investment model for actuarial use," *T. F. A.*, **39**, 251.
- [29] Ziemba, W. T. and J. M. Mulvey (1998), *Worldwide Asset and Liability Modeling*, Publication of the Newton Institute, Cambridge University Press.