多資産ポートフォリオのT-VaR計算における モンテカルロ法の加速

金融研究部門　主任研究員　湯前祥二　yumae@nli-research.co.jp
研究員　鈴木輝好　suzuki@nli-research.co.jp

概 要

モンテカルロ法の加速手法には，大きく準モンテカルロ法と分散減少法の２つがある．準モンテカルロ法では，乱数に替えて low discrepancy sequence を用いる．また，解の収束原理もモンテカルロ法とは異なる．一方，分散減少法では，乱数をそのままに，評価対象関数に工夫を加えるなどして，解の誤差分散を小さくする．モンテカルロ法の枠組みを外れることなく，解の収束は中心極限定理により保証される．本稿では，両手法を紹介したあと，高次元問題に分散減少法のひとつであるインポータンス・サンプリング法を適用する際の問題点とその解決事例を示す．

目 次

1 準モンテカルロ法

モンテカルロ法の計算時間を短縮する技術の 1 つに，乱数列ではなく，low-discrepancy 列[1] を使う方法がある．この方法は，モンテカルロ法に類似しているが，その範疇をはみ出す手法として，準モンテカルロ法と呼ばれる．その，(1) 点列の性質，(2) 理論的な基盤，(3) 誤差の評価，の何れもが，モンテカルロ法とは異なっているからである．

モンテカルロ法では，(1) 乱数を使い，(2) 大数の強法則と中心極限定理を理論的な基盤としており，(3) 誤差は，試行回数 N に対して $1/\sqrt{N}$ のオーダーで小さくなる．一方，準モンテカルロ法では，(1)low-discrpancy 列 を使い，(2)Koksma-Hlawka の不等式を基盤としており，(3) 誤差は，試行回数 N に対して $1/N$ のオーダーで小さくなる．N を増やしたとき，$1/\sqrt{N}$ と $1/N$ では，後者の方がより急速に小さくなる．たとえば，誤差を 1/10 にするために，前者では N を 100 倍にする必要があるが，後者では 10 倍で済む．したがって，準モンテカルロ法を使うことによって，モンテカルロ法に比べて計算時間を短縮できる可能性がある．

モンテカルロ法と準モンテカルロ法では，適用可能な問題の範囲に若干のずれがある．しかし，low-discrepancy を使えることが確認できれば，準モンテカルロ法の計算手順は，モンテカルロ法と変わらない．既存のモンテカルロ法のプログラムについては，乱数列を low-discrpancy 列で置き替えれば良い．

1.1 1 次元の low-discrepancy 列

準モンテカルロ法の鍵は，low-discrepancy 列 を使うことである．ここでは，具体例として，van der Corput 列（1 次元の low-discrepancy 列 ）を実際に構成してみよう．

1. n を 0 から順に増える数字（10 進数）とする．
2. n を 2 進数であらわす．これを $n_{(2)}$ とする．
3. $n_{(2)}$ を小数点で対称に折り返す．これを $n'_{(2)}$ とする．
4. $n'_{(2)}$ を 10 進数に戻す．これを $n'_{(10)}$ とする．

この $n'_{(2)}$ （もしくは $n'_{(10)}$）が，van der Corput 列（ただし基数 2）である（表 1 参照）．

この van der Corput 列は，10 進数で見ると，

(a) 0 の値を取る．

(b) 次に，0 と 1 の真ん中 0.5 の値を取る．

(c) さらに，その 0.5 と 0 の真ん中の値 0.25 と，0.5 と 1 の真ん中の値 0.75 の値を取る．

(d) 以下，同様．

という列になっている．「乱数をこの van der Corput 列で置き換えると，誤差の減り方が $1/\sqrt{N}$ から $1/N$ になる」というのが，準モンテカルロ法の考え方である[2]

---

[1] 準モンテカルロ法が比較的新しい手法のため，まだ日本語訳が定まっていないが，「超一様分布列」や「低喰い違い列」などと訳されている．

[2] もちろん，実際に使う場合は，それほど単純ではない．とくに，1 次元の問題であれば，数値積分（台計則）が，モンテカルロ法や準モンテカルロ法より効率的である．

表 1: van der Corput 列

n	$n_{(2)}$	$n'_{(2)}$	$n'_{(10)}$
0	0	0	0
1	1	0.1	0.5
2	10	0.01	0.25
3	11	0.11	0.75
4	100	0.001	0.125
5	101	0.101	0.625
6	110	0.011	0.375
7	111	0.111	0.875
⋮	⋮	⋮	⋮

1.2 多次元の low-discrepancy 列

現実の多次元の問題には，多次元の low-discrepancy 列（Halton 列，Sobol' 列，Faure 列など）が使われる．このうち，Halton 列は，

(a) 先に求めた 2 進数を使った基数 2 の van der Corput 列に加えて，

(b) 3 以上の素数を基数とした van der Corput 列を複数つくり，

(c) それらを束ねる，

という手順で，多次元の列としたものである．Sobol' 列や Faure 列は，もう少し複雑な過程を経て作られる．

多次元の low-discrepancy 列 では，列毎の「性能」の差が大きく，準モンテカルロ法の収束の速さは，(オーダーは $1/N$ で同じとしても）使う列によって大きく異なる．たとえば，Halton 列は，作るのは簡単だが，残念ながら性能がそれほど良くないことが知られている．既存の列を元にした，より収束の速い low-discrepancy 列 の開発は，現在も続いている．特に性能が良いケースでは，列それ自体が高価格で売買される場合もあるようである．

1.3 金融分野での利用

Paskov [5] は，CMO(モーゲージを担保にした債券) の価格評価の効率を，疑似乱数を使う場合と low-discrepancy 列を使う場合で比較した．Paskov [5] は，Sobol' 列を使った準モンテカルロ法が，疑似乱数を使ったモンテカルロ法に対して，常に優位であったと報告している[3]．また，Papageorgiou and Traub [4] は，Sobol' 列と一般化 Faure 列を使って，CMO の価格評価を行った．彼らは，両列とも疑似乱数に比べて収束が速く，特に一般化 Faure 列が優秀であると報告している[4]．

[3] Paskov の報告は BUSINESS WEEK/JUNE 20, 1994 でも紹介され，話題となった．

[4] Traub らは，low-discrepancy 列を使った証券価格の計算等に関する特許を日米で申請し，米国では特許が成立している．

2 分散減少法

モンテカルロ法における解の信頼度は誤差分散により計測される．分散減少法[5]は，モンテカルロ法の誤差分散を減らす手法で，計算時間を増やさずに解の信頼度を上げる効果，すなわち，同等の信頼度を保ちながら計算時間を短縮する効果を持つ．この章では，主な分散減少法をオプション・プライシングを例に説明しよう．

まずは，次のような単純なモンテカルロ法を考えよう．単純なモンテカルロ法では，理論値

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$$

をモンテカルロ解

$$\hat{c}_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\varepsilon_i)$$

により推定する．ここでε_iは確率密度$\phi(\cdot)$を持つ互いに独立な乱数である．以下では，$\phi(\cdot)$を標準正規分布の密度関数とし，cをペイオフ関数$f(\cdot)$をもつオプション価格と考えよう．このとき$\hat{c}_0$の推定精度は誤差分散

$$V[\hat{c}_0] = \frac{1}{N}V[f(\varepsilon)]$$

により定義される．

次に，主な分散減少法について簡単に解説しよう．

2.1 負の相関法

負の相関法は，発生確率が等しい一対の乱数を用いる方法である．負の相関法では，理論値cを

$$\hat{c}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{f(\varepsilon_i) + f(-\varepsilon_i)}{2}$$

により推定する．ひとつの乱数に対し，符号を変えたもう一つの乱数を用意するだけで良いので，コーディングが容易な点で優れている．このとき誤差分散は

$$V[\hat{c}_1] = \frac{1}{2N}\left\{V[f(\varepsilon)] + Cov[f(\varepsilon), f(-\varepsilon)]\right\} \tag{1}$$

により定義されるので，ペイオフ関数が変動の根元となるブラウン運動に対して単調ならば，誤差低減効果が高い．コール・オプションやプット・オプションなどでは，ペイオフ関数が単調性を持つので，負の相関法の効果は高い．一方，ペイオフがV字型になるような特殊なオプションでは，負の相関法は効果を発揮しない可能性が高い．ただし，厳密に単調でなくても誤差分散減少効果が得られるので，適用範囲は広い．

2.2 インポータンス・サンプリング法

インポータンス・サンプリング法は，関数値の高い場所に対して重点的に計算を行う方法である．例えばアウト・オブ・ザ・マネーのヨーロピアン・コール・オプションを考えよう．通常のシミュレーションでは，コール価値がゼロのパスばかりになるので，発生させた乱数の大半を無駄にしてしまい，誤差分散を大きくする原因となる．よって，コール価値が高い部分に対して重点的に乱数を発生させ

[5] 金融工学への応用については湯前・鈴木 [1] を，理論的な解説については Fishman[2] を参照されたい．

ることで，誤差分散を低減させることができる．ここで，このような乱数ε'を発生させる密度関数をφとしよう．すると，cの推定値は，

$$\hat{c}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\varepsilon'_i)\frac{\phi(\varepsilon'_i)}{\varphi(\varepsilon'_i)} \tag{2}$$

により与えられる．またこのとき，$\hat{c}_3$の推定誤差は

$$V[\hat{c}_2] = \frac{1}{N}V\left[f(\varepsilon')\frac{\phi(\varepsilon')}{\varphi(\varepsilon')}\right]$$

により与えられる．

上式によると，関数値$f(\cdot)$の高い部分で$\varphi(\cdot)$を大きくすれば，誤差分散減少効果が大きい．これは，関数値の高い部分を重点的にサンプリングすることを意味する．インポータンス・サンプリング法は，関数$f(\cdot)$がどの部分で高い値をとるかが分かっていれば使用できる点で優れている．

2.3 制御変量法

制御変量法は，積分値の分かっている別の関数を利用する方法である．ペイオフ関数$g(\cdot)$を持つオプションの理論価格

$$v = \int_{\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)$$

が計算可能であるとしよう．すると制御変量法によるcの推定値は

$$\hat{c}_3 = \sum_{i=1}^{N}\{f(\varepsilon_i) - g(\varepsilon_i)\} + v$$

により与えられる．また，このとき誤差分散は

$$V[\hat{c}_3] = \frac{1}{N}V[f(\varepsilon) - g(\varepsilon)]$$

により定義されるので，ペイオフ関数fとgが似たような形であるときに効果が得られる．オプション・プライシング問題では，制御変量gとして，ブラック・ショールズ式を利用できるので，制御変量法は利用しやすい．

ところで，制御変量法の拡張としては，回帰分析法と呼ばれる手法がある．もとの評価対象関数と制御変量の差が最小になるようにすることで，誤差分散減少効果を最大限に得ることができる．ただし，回帰分析を行うため，大規模なシミュレーションではメモリー管理に工夫が必要になる．さらに，制御変量法の金融工学への応用では，マルチンゲール分散減少法と呼ばれる手法がある．オプション・プライシング問題において，ヘッジポートフォリオを制御変数とする制御変量法である．解析解が分からなければ，ヘッジ戦略は特定できないが，これを価格変動が似たような別の資産で代替する．詳しくは湯前，鈴木[1]を参照されたい．

2.4 層別化法

積分区間をいくつかに分けて，区間ごとに互いに独立な乱数を用いることで誤差分散の減少をはかる方法である．ただし，金融工学問題は次元が高くなる傾向があるので適用が難しい．例えば100次元の問題では，各次元を2分割したとしても，2^{100}の分割が必要になり，各区間に1点の乱数を発生させることですら困難な状況だからである．

3　分散減少法と T-VaR

ここでは，ポートフォリオ・ロスのリスク指標 (T-VaR) を算出する問題に対して分散減少法を適用する方法について考察する．

3.1　T-VaR とは

あるポートフォリオにおける各資産への配分をベクトル

$$x \in R^n$$

とし，資産価格をベクトル

$$y \in R^m$$

で表わす．また，資産価格の同時密度を $p(y)$ とし，ポートフォリオ・ロスを関数 $f(x,y)$ で表わす．

このとき，ポートフォリオ・ロスの分布関数は

$$\Psi(x,\alpha) = \int_{f(x,y)<\alpha} p(y)dy$$

となるので，ポートフォリオ・ロスの β パーセンタイル点 (VaR) は，

$$\alpha(x,\beta) \quad = \quad \min\{\alpha \in R : \Psi(x,\alpha) > \beta\} \tag{3}$$

と表わすことができる．また，Tail Value at Risk(T-VaR) は

$$\Phi(x) = \frac{1}{1-\beta}\int_{f(x,y)>\alpha(x,\beta)} f(x,y)p(y)dy \tag{4}$$

により定義する．

T-VaR は式 (4) により，明示的に積分形で定義されているので，分散減少法の適用が可能である．次に，各手法の適用可能性について考えてみよう．

3.2　誤差分散減少の可能性

負の相関法

オプション・プライシング問題に負の相関法を適用する場合には，評価対象となる関数が発生させる乱数に対して単調性を持つときに効果を発揮した．多資産の問題であるポートフォリオ・ロス問題では，ポートフォリオに含まれる各資産が，発生させる乱数に対して単調性を持てばよい．すなわち，株式，債券などプレーンな資産を買いもちするポートフォリオ，もしくは，ある株式を買って別の株式を売っているようなポートフォリオでは，負の相関法が機能する．一方，ポートフォリオ全体が何らかの手段でヘッジされていたり，ペイオフがV字型なるような派生商品を多く含む場合，負の相関法の効果は低くなる．

このように考えると，プレーンな商品の単純な買いもち戦略が多い，年金基金や生命保険会社の資産に関する T-VaR 算出には，負の相関法は大きな効果を発揮すると予想される．

制御変量法

資産価格が正規分布に従うような特別な場合を除いて，ポートフォリオ・ロスに関する T-VaR の解析解は得られていない．逆に言うと，資産価格が正規分布に近い分布に従う場合は，正規分布を仮定した T-VaR を制御変量に用いて誤差分散の減少をはかることができる．ただし，信用リスクを含むポートフォリオの場合は，資産価格は正規分布とはほど遠い場合が多いので，制御変量法は効果を発揮できる可能性が低い．

インポータンス・サンプリング法

インポータンス・サンプリング法において誤差分散を減少させるには，評価対象関数の値が高いところを重点的にサンプリングすれば良かった．ポートフォリオ・ロス問題においては，よりたくさんのロスがでるような確率密度関数により乱数を発生させれば良い．例えば，株式ポートフォリオであれば，買いポジションの資産については，株価が下がるような乱数を，売りポジションの資産については，株価が上がるような乱数を発生させれば良い．また国債ポートフォリオについても，全体としてロスが大きくなるように，金利を上下のどちらかの方向にずらして発生させれば良い．デフォルトリスクのある資産についても，全体としてロスが大きくなるように，例えば格付けが悪くなるような乱数，あるいは，デフォルトが多く発生するような乱数を発生させれば良い．ただし，式 (2) より，発生させた乱数 ε ごとに確率密度の比 ϕ/φ を計算する必要があり，多次元の問題では，計算の効率が非常に悪くなる可能性がある．たとえ正規分布を仮定しても，相関がある限り，多次元の同時密度の計算には行列計算が含まれるからである．

以下では，多次元ポートフォリオ問題におけるインポータンス・サンプリング法の実装について，ハザード率が確率的に変動する Kijima and Muromachi(2000) モデルを例に考えてみよう．

3.3 Kijima and Muromachi(2000) モデルにおけるインポータンス・サンプリング法の実装

前節でも示したように，インポータンス・サンプリング法では，同時密度関数の比を計算する必要がある．また多次元正規分布の同時密度関数は行列演算を含むので計算負荷は低くない．よって，発生乱数の次元があまりに高いと，計算時間の短縮という本来の目標を達成できない可能性が出てくる．例えば，一般に社債（貸付）ポートフォリオは多くの銘柄を含む．したがって，業種分類などによるグルーピングを行わない限り，T-VaR の計算には，少なくとも銘柄数と等しいだけの次元 (m) を持つ乱数を発生させ，$m \times m$ の行列演算を行う必要がある．ただし，Kijima and Muromachi[3] モデルのように，条件付独立を前提とするモデルでは，この問題を解決することができる．以下に，その方法を示す．

Kijima and Muromachi モデルでは，時刻 t における企業 j のハザード率 $h_j(t)$ が確率微分方程式

$$dh_j(t) = \mu_j(\boldsymbol{h}(t), t)dt + \sigma_j(\boldsymbol{h}(t), t)dz_j(t), \quad j = 1, \dots, m \tag{5}$$

に従う．ただし，

$$\boldsymbol{h}(t) = (r(t), h_1(t), \dots, h_m(t)) \tag{6}$$

で，$r(t)$ は無リスク金利を表わす．このとき時刻 t において企業 j が時刻 T まで生存している確率は

$$P\{\tau_j > T\} = \exp\left\{-\int_t^T h_j(u)du\right\} \tag{7}$$

により表わされる．ここで，条件付独立[6]を仮定すると，時刻Tまでのハザード率が顕在化したあとでは，各企業のデフォルトは独立に発生すると考えることができる．よって，次のようなシミュレーションにより T-VaR を計算することができる．このシミュレーションでは，生存確率は互いに相関するが，デフォルトは条件付独立になる．簡単化のため1期間モデルを想定しよう．また，T-VaR は関数$f(\boldsymbol{h}(T))$により定まるとする．

step 1 式 (5) に従う企業jのハザード率を

$$h_j(T) = h_j(t) + \varepsilon_j, \quad j = 1, \ldots, m$$

により発生させる．このとき使用する正規乱数

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$$

は平均$\boldsymbol{\mu}$，分散共分散行列$\boldsymbol{\Sigma}$により特徴づけられ，確率密度関数$\phi_n(\cdot)$を持つとする．

step 2 式 (7) により企業jの生存確率$P\{\tau_j > T\}$を計算する．

step 3 区間$[0,1]$の互いに独立な一様乱数

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$$

を発生し，

$$\begin{cases} \xi_j \leq P\{\tau_j > T\} & \text{ならば　企業 } j \text{ は生存} \\ \xi_j > P\{\tau_j > T\} & \text{ならば　企業 } j \text{ はデフォルト} \end{cases} \tag{8}$$

とする．

step 5 ここまでの **step 1** から **step 4** をN回繰り返し

$$\text{T-VaR} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\boldsymbol{h}(T)) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\xi})$$

を算出する．

さて，インポータンス・サンプリング法の基本は，関数値の高いところを重点的にサンプリングすることであった．また，社債（貸付）ポートフォリオにおける T-VaR 関数は，デフォルトが起きたときに高い値を示すと考えるのが常識的である．よって，デフォルトが発生しやすいような確率空間をつくることで，効果的なインポータンス・サンプリング法を構成できる．そのような方法は2つ考えられる．

方法1 ハザード率を，より平均値の高い正規乱数

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m)$$

により発生させる．ここで$\boldsymbol{\varepsilon}'$は平均値$\boldsymbol{\mu}'$，分散共分散行列$\boldsymbol{\Sigma}$により特徴づけられ，確率密度関数を$\varphi_n$とする．これにより，ハザード率が上昇し，デフォルト確率$P\{\tau_j \leq T\}$が上がる．ただし，デフォルトを決定する一様乱数$\boldsymbol{\xi}$には手を加えない．このとき，密度関数の比は

$$\frac{\phi_n(\boldsymbol{\varepsilon}')}{\varphi_n(\boldsymbol{\varepsilon}')} = \frac{\dfrac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left\{(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\mu})\right\}}{\dfrac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left\{(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\mu}')^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\mu}')\right\}}$$

により与えられる．

[6] 詳しくは本号所載「市場リスク・信用リスク統合評価モデル」を参照．

方法 2 デフォルトを決定する乱数を (step 3)，例えば，確率密度 $\varphi_u(x) = 2x$ をもつ互いに独立な乱数

$$\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1', \ldots, \xi_m')$$

で与える．これにより，多くの乱数が区間 $[P\{\tau > T\}, 1]$ に入るようになり，デフォルト発生件数が増える．ただし，ハザード率を決定する乱数 ε には手を加えない．このとき，同時密度関数の比は

$$\frac{\phi_u(\boldsymbol{\xi}')}{\varphi_u(\boldsymbol{\xi}')} = \frac{1^m}{\prod_{j=1}^m 2\xi_j'}$$

により与えられる．

どちらの方法も，T-VaR 関数 $f(\cdot)$ の値が高いところでサンプリングを多く実行する．したがって誤差分散減少の効果が期待できる．ただし，方法 1 では，m が大きくなると計算負荷が急増し，多くの計算時間を費やす．これは，乱数を発生させるたびに密度比の計算が必要であることが原因である．これに対し，方法 2 ならば，計算負荷はほとんどかからない．詳細は省くが，T-VaR 関数 $f(\cdot)$ の計算が密度比 $\left(1/\prod_{j=1}^m 2\xi_j'\right)$ に比べて十分に複雑だからである．さらに，方法 2 はプログラミングの変更が容易な点でも優れている．

結局，我々の提案する方法 2 による T-VaR は

$$\text{T-VaR} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{f(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}')}{\prod_{j=1}^m 2\xi_j'}\right\}$$

により算出することができる．ただし，ここで選択したデフォルトを増やすための密度関数 $\varphi_u(x) = 2x$ は一例であり，どのような $\varphi_u(\cdot)$ を選択すればより効率が高いかは，問題（ポートフォリオ等の条件）に依存する．

4　さいごに

本稿では，モンテカルロ法の加速手段である準モンテカルロ法と分散減少法を紹介し，高次元問題におけるインポータンスサンプリング法の実装について，ひとつのアイデアを示した．

参考文献

[1] 湯前祥二，鈴木輝好 (2000),『モンテカルロ法の金融工学への応用』，朝倉書店.

[2] Fishman, J.S. (1996), *Monte Carlo*, Springer-Verlag.

[3] Kijima, M. and Y. Muromachi (2000), "Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes," *Journal of Risk*, Vol.3, No.1.

[4] Papageorgiou, A. and J. Traub (1996), "Beating Monte Carlo", *Risk*, Vol.9, No.6.

[5] Paskov, S. H. (1994) "Computing High Dimensional Integrals with Application to Finance", Technical Report CUCS-023-94, Department of Computer Science, Columbia University.