研究ノート

情報化と論理

小宮山 隆*

はじめに

「情報」概念が「原子」および「エネルギー」概念に次ぐ第三の包括的、基礎的な概念として認知されるようになって久しい。しかしながら、「情報とは何か」については、いまだに共通の了解が成り立っているとは言い難いようである。それは、「情報」が前二者よりも広い概念であるというより、「原子」や「エネルギー」がもっぱら物質の世界にかかわるものであるのにたいして、「情報」が人間と深くかかわりをもたざるをえず、したがって人間にとっての意味や価値と切り離せないことによるといえるだろう。

ところが、「情報化とは何か」ということになると、事情は一変するように思う。「情報」概念を棚上げしたまま「情報化」を云々できるというのも奇妙な話なのだが、「運動とは何か」、「力とは何か」を棚上げしたまま、いわばその変化の相に注目し、それを通じて当の運動や力を捉えていくというのは、近代科学にとってはお手のものの芸当でさえある。

ところで、どう事情が一変するかというと極言すれば「情報」が何であれ、つまりそれが物であれ観念であれ、「情報化」とはそれらを記号化し、その記号を操作することによって、実体を扱うのと同じ効果を得ようとする工夫と見なしうるということである。その「情報化」がわれわれの日常生活にどのような変化をもたらすか、あるいはまたどのような意味をもつか、そうした「われわれ」にとって最も根本的な問題をこれまたひとまず棚上げにするなら、「情報化」とは記号化にほかならず、記号として処理しうるように「情報」を加工する工夫にほかならない、と言えるだろう。

ところで、一口に記号といっても、われわれは日常生活のなかで実に様々の記号系に取り囲まれ、それらをほとんど意識せずに使い分けてさえいる。そもそも言葉や身振りがそれぞれに記号系をなしているし、交差点の信号の色から抽象絵画の形や色にいたるまで、実に様々な記号の系列を数えあげることができる。そうしたなかで「情報化」ということで問題になる記号化とはどのようなものだろうか。このことは「情報」なり「情報化社会」を考える際の基本的な事柄の一つとして整理しておくべきことのように思われる。

ここでは、「情報化」という場合の記号化と論理における記号化の間に類縁関係を指摘できるという観点から1)論理における記号化の契機と仕組、2)現代論理学への展開における記号化の位置づけ、3)上記の展開といわゆる情報処理技術の発展との関わり、について瞥見していくことにしたい。

1. 論理における記号化の契機と仕組

「論理」の発見

* 東京情報大学講師

1989年8月24日受理

われわれは主として言葉を操ってあれこれと思考し、様々に推理する。その思考や推理の内容とは別個に推理の形式に注目することができる、これが論理を初めて体系的に述べたアリストテレスの発見であった。一例を示そう。

すべての犬は猫でない
すべての人は犬でない
故に　すべての人は猫でない

この推理で、大前提、小前提、結論、いずれの命題も真である。ところが、ここで小名辞の「人」に「仔猫」を入れたならば、結論は「すべての仔猫は猫でない」となり、明らかに偽である。だが「仔猫」に変えても、前提は依然として二つとも真である。他愛のない例だが、これは前提が真であるだけでは、結論の真が保証されないことを端的に示している。つまり、前提の真・偽すなわち内容のほかに、推理の形式が妥当であるか否かを問題にしなければならないのである。

ところで、ある推理形式が妥当でないことは、上記のように反例を挙げることで示すことが可能である。しかし、妥当であることはどのようにして示すことができるだろうか。どんなに多くの例を挙げたとしても、前提がともに真であるのに結論は偽となるケースが存在しないことを示したことにはならない。

アリストテレスはこの問題に、妥当な推理形式のすべてが一つの原理、すなわち「全体および皆無の原理」に帰着できることを示すことによって答えていた。周知のように、いわゆる三段論法は「格」・「式」によって分類される。そして中世の論理学者たちによってBARBARA, CELARENT, DARII, FERIOと呼び習わされるようになる第一格の妥当な推理式のいずれかに、他の格の妥当な推理式のすべてが還元されることがまず示される。さらに、第一格の後二者は前二者、すなわちBARBARA, CELARENTにその妥当性の根拠を求めることができる(ただし、間接証明による)。ところで、BARBARA, CELARENTとは「全体および皆無の原理」(全体について成り立つことは部分についても成り立ち、全体について成り立たないことは部分についても成り立たない) の表現の一つにほかならない[1]。すなわち、第一格の四つの式を公理として他の妥当な式が導かれ、その公理は「全体および皆無の原理」に支えられているという、一種の公理的展開によって推理式の妥当性は根拠づけられていたのである。

中世の寄与

ところで、こうしたアリストテレスの体系をより整理された形で今日に伝えたのは中世の論理学者たちであった。

今日、全称肯定命題をA命題、特称肯定命題をI命題、また全称否定命題、特称否定命題をそれぞれE命題、O命題と呼ぶのは彼らに発するが、これらは、ラテン語のaffirmo(私は肯定する)、nego(私は否定する)の母音を語頭から順に使用したものである。

もっとも、これは単に略号として記号を使用したにすぎないが、妥当な推理式の呼称として知られるBARBARA・CELARENT……のほうにはもう少し手の込んだ細工が施されている。例えば、第二格の妥当な式の一つであるCAMESTRESについて言えば、先ず三つの母音、A、E、Eが大前提・小前提・結論にくる命題の種類(式)を示している。さらに、語頭の“C”はそれがCELARENTに還元されることを示し、語中の“M”や“S”は還元の手順を教えているのである[2]。BARBARA・CELARENT……という呼称の、言葉としての意味には意味がなく、母音の配列やどのような子音が現われるかに意味のある情報がこめられている。

数の列をはじめ、日常語の意味をまったく担わない記号列は頭に残りにくい。そこでわれわれは、例えば新大陸発見の年を「イヨークニが見えた」などと記憶する。これは記憶術である。それと同様の狙いがBARBARA・CELARENT……にもある。ただ、記憶すべき内容に、妥当

な式の形だけでなく、それらの還元の手順が含まれていることは、単なる記憶の術と異なる点だろう。とりもなおさず、還元を論理的に等値な記号的変換によっておこなう術を示しているのである。

この、いわゆる「格式覚え歌」の原型はシャーウッドのウィリアム（William of sherwood, 1200/10-1266/71）によって作られたといわれている。同じ頃、スペインではルルス（Raimundus Lullus, 1235-1316）が、文字の機械的な組み合わせによって真理をえる方法を提唱している。そして「ルルスの術」もまた記憶術として流布した面をもつことは興味深い。略号としての記号、記憶のための符丁としての記号といった実用の利便を満たしながら、そうした記号の組み合わせによる体系的な理想言語の構成という、やがてライプニッツが明確にする夢がここに芽ばえているのを見ることができる。

「ルルスの術」の中味は、残念ながら今日に詳しく伝わっていない。けれども、その「文字の組み合わせによって真理をえる」という方向に形が与えられるには、もうひとつ必要なことがあった。すなわち、「文字の組み合わせ」に規則性を与える「連言」、「選言」、「含意」などの、いわゆる論理語についての考察である。そしてこれが、アリストテレスとは源泉を異にするメガラーストアの論理（命題論理）の継承・深化という、われわれが中世の論理学者たちに負うところの大きい、もうひとつのものである。ちなみに、さきのシャーウッドのウィリアムは、論理語のいくつかを真理関数として定義したことで知られる。

記号化の仕組

一般に、何らかの判断を表わし、真・偽を問うことのできる文章を「命題」と言う。普通、平叙文と言われている文章が概ねこれに該当する。そして、どんなに複雑な文も、したがってどんなに複雑な命題（複合命題）も、簡単な短い文（要素命題）を適当な仕方で結合してつくることができる、と考えたとしよう。文と文の結合は、通常、「接続詞」によって行なわれるが、その数は非常に多いうえに、使われる状況・文脈に応じて、ニュアンスも用法も異なったりする。けれども、それを、文（命題）の結合の型を決定する働きという面からみると、意外に少数のものを問題にするだけで十分であることが知られる。例えば、「かつ」、「そして」、「しかし」、「それでもなお」、「とはいえ」などは、それぞれニュアンスの差は大きいが、上述の働き、すなわち論理的な機能は同じであると考えられる。これらの語は、いずれも、それによって結ばれる二つあるいはそれ以上の文が同時に成り立つとき、そのときにかぎって全体としての文が「正しい」（真）とみなされるような形で文と文を結合する、と考えることができるのである。

通常、こうした文の結合に必要な語として、「否定」・「連言」・「選言」・「含意」（条件）・「等値」（両条件）の五つがあげられ、これらを「論理語」と呼ぶ。そして、それぞれの働きが明確に定義されたならば、それらによって要素命題が結合されてできる複合命題の真・偽（真理値）は、各要素命題の真・偽が定まれば、一義的に定まることになる。すなわち、真理値に関して複合命題（複雑な文）を要素命題（単純な文）の関数と考えることが可能になる。それはまた、多義・曖昧に陥ることを避ける手立てともみなせるのである。

数多くの接続語が少数のものにまとめられる可能性については、「連言」を例にとって示した。では、文の結合の型を決定する働きとは、どのようなことであろうか。天下り的に各論理語の働きを定義するのではなく、それがどのように抽出されるかを見ておくことにしたい。

例えば、「選言」は日常語の「または」に相当する論理語であるが、その働きがどのように決定されるかを見てみよう。日常語の「または」には次の三つの用法が指摘できる。

1）「向こうから来るのは男か女だ」

2）「向こうから来るのはアメリカ人かイギリ

ス人だ」

3）「犯人はＡかＢだ」

1）、2）は「男・女」、「アメリカ人・イギリス人」のどちらか一方しか成り立たないのに対して、3）はＡもＢも犯人である場合が存在する。前者を排反的選言（exclusive disjunction）、後者を両立的選言（non-exclusive disjunction）と呼ぶ。さらに、1）では、男でも女でもないことはありえず、必ずどちらかであるが、2）の場合、アメリカ人でもイギリス人でもなく、ドイツ人というように、第三の可能性が存在する。そこで第三の可能性が存在しない1）の用法を、とくに「厳密な選言」と呼んで区別することがある。

ところで、こうした違いは何によって生ずるのであろうか。「または」にあたる語に区別が存在しないことは明らかである。それが排反的になったり、両立的になったりするのは、ひとえに、この語によって結ばれる語の意味内容による、と考えるべきだろう。したがって、両側に来る語の内容に依存しない、「または」本来の働きは両立的なものであると考えられるのである。そこで、論理学では、この用法にしたがって「選言」を定義し、“∨”で表わす。

p	q	p∨q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

もちろん、排反的なケースを表現しなければならないときもあるだろうが、そのときは、「否定」（～）、「連言」（∧）をあわせて用いて、

$$(p \lor q) \land \{\sim(p \land q)\}$$

〔ｐまたはｑであって、かつ、ｐかつｑであることはない〕と表現すればよく、必要に応じて、排反的選言を表わす記号を導入して、上記のように定義して用いることができる。

ところで、「または」について概観してきた、このような語本来の働き、すなわち論理的機能を決定してゆくうえで、もっとも紛糾したのが、日常語の「ならば」に相当する「含意」であった。これは $p \supset q$、$p \rightarrow q$ などと記号化され、その働きは次のように定義される。

p	q	p⊃q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

日常語の「ならば」がこのように使われているとは即座に認め難いことは明らかだろう。例えば、「消費税が実施されれば、便乗値上げに悩まされる」という命題は、現実に消費税が実施されて、税率をはるかに上まわる物価の上昇があったとき真であり（真理表の第１行）、また、物価の上昇が税率とあまり違わないようであれば偽（第２行）ということになり、上記の真理表と一致する。しかし、かりに消費税が実施されなかったとすれば、この命題は真であろうか、偽であろうか。

そもそも、消費税が実施されなかったときの「便乗値上げ」など、考えられてはいないし、考えられるものでもないだろう。むしろ一般に、われわれが「ｐならばｑ」と言うとき、ｐがなり立ったものとしてあれこれと考えているのであり、ｐが偽の場合は想定されていないことのほうが普通である。にもかかわらず、真理表では、ｐが偽であるときはｑの値にかかわらず、「$p \supset q$」は真と定義されている（第３、４行）。

なぜだろうか。その理由を次の例で考えてみたい。

Ａ　　十歳以上の人は選挙権をもつ
　　　日本の総理大臣は十八歳である
故に　日本の総理大臣は選挙権をもつ

B　十歳以下の人は選挙権をもたない
　　日本の総理大臣は八歳である
故に　日本の総理大臣は選挙権を持たない

Aは $(0 \wedge 0) \supset 1$、Bは $(0 \wedge 0) \supset 0$、すなわち、それぞれ $0 \supset 1$、$0 \supset 0$ であるが、AはBARBARA、BはCELARENTであり、いずれも推理としては正しく、形式的には真とすべきだと考えられる。

また、日常の推理においても、いわゆる反実仮想のように、pが0の場合がまったくないわけではない。さらに、科学史に目を転じれば、天動説が長らく説明としての首尾一貫性を誇っていたことが思い出される(3)。

だがこの定義については、$0 \supset 1$, $0 \supset 0$ がいずれも真であることが、「偽からはいかなることも主張できる」と解釈されるとともに（これは必ずしも経験に反しない）(4)、$1 \supset 1$, $0 \supset 1$ の真が「真はいかなることからも導ける」と解釈され、「含意のパラドクス」として、論争の口火を切ったアベラール（Pierre Abelard, 1079-1142）以来、中世を通じて多くの論議を呼び、「屋根のうえのカラスまでが含意、含意と鳴き叫んでいる」と評されたほどであった。

記号の「節約」

ところで、$p \supset q$ のpを前件、qを後件と呼ぶが、上述の定義は「前件が真で後件が偽」なる場合のみを偽とするということであり、これに $\sim(p \wedge \sim q)$、すなわち「pでありかつqでない、ということはない」という表現を与えることができる。また、ド・モルガンの法則すなわち

$$p \vee q = \sim(\sim p \wedge \sim q)$$
$$p \wedge q = \sim(\sim p \vee \sim q)$$

と二重否定 $\sim(\sim p) = p$ とから、

$$\sim(p \wedge \sim q) = \sim p \vee q$$

が言える。そしてこれらが論理的に同値であることは、真理表をつくって確認することができる。

p	q	$p \supset q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim p \vee q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

一方、「pまたはq」(例えばp：Aが犯人である、q：Bが犯人である)が言えるとき、「pでないならばq」($\sim p \supset q$)であり、同様にして、「$\sim p$ またはq」であるなら、「$\sim p$ でないならば、すなわちpであるならばq」($p \supset q$)が言えるだろう。

したがって、「$p \supset q$」を「$\supset$」を使わずに表現することが可能であり、また「p等値q」($p \equiv q$) は、

$$(p \supset q) \wedge (q \supset p)$$

と表わせるから、[$\sim$、$\wedge$、$\vee$、$\supset$、$\equiv$]を用いた表現は、すべて [$\sim$、$\wedge$、$\vee$] のみによって表わすことが可能になる(5)。

記号の「節約」ということで言えば、先のド・モルガンの法則により、すべてを [$\sim$、$\vee$] または [$\sim$、$\wedge$] で表現することが可能である。

さらには、排反的選言に表現を与えるところで登場した $\sim(p \wedge q)$ を alternative denial $p \mid q$ と定義すれば、

$$\sim p = (p \mid p)$$
$$p \vee q = (p \mid p) \mid (q \mid q)$$

で表わされ、すべてを「|」のみで、まさに棒一本で表現することさえできるのである。
この棒をシェーファーの棒記号(Sheffer stroke)とも呼ぶ(6)。

以上のことを整理すれば、

$$\begin{array}{ccccccc} \sim & & & & & & \\ \wedge & & \sim & & & & \\ \vee & \Leftrightarrow & \wedge & \Leftrightarrow & \sim & \Leftrightarrow & \mid \\ \supset & & \vee & & \vee & & \\ \equiv & & & & & & \end{array}$$

ここで、右にゆくほど、日常語の表現様式から離れていくことは明らかだろう。「pでない」ことを、わざわざ「pでありかつpであることはない」($p \mid p$) などとは、まず言わない。また、日常語の表現から、いきなりシェーファーの棒記号を用いた表現を思い浮べるのは無理な話である。だが、命題を結ぶ記号が一つですむということは、それによって表現された複雑な命題の真・偽を、一種類の操作の繰り返しによって決定できるということにほかならない。言ってみれば、五つの論理語を用いた表現がプログラム言語のレベルにあるとすれば、シェーファーの棒記号による表現は機械語のレベルに位置するのである。

ところで、シェーファーの棒記号による表現にかぎらず、これら記号による表現には、日常の思考、実際の推理過程にはまず現われることのないものが存在する点は注意を要するだろう。例えば、「pまたはq」から「〜pならばq」へという方向の推理はあっても、逆方向に推理することはあるだろうか。そもそも、「pならばq」を「〜pまたはq」と言いかえることが必要な場面が具体的な推理に登場するだろうか。言いかえれば、論理的に同値な変換を繰り返すなかで現われる記号表現の一つ一つが、必ずしも、我々が実際に行なう思考の過程と一対一に対応しているわけではない、ということである。

我々はしばしば、物事を直観的に理解し、直観的に判断する。その、いわばジャンプした部分をつまびらかにすれば、記号的変換のもとに現われる表現が順次えられるというのではない。むしろ、現実の思考と記号的変換とでは、経路がまったく異なると考えるべきなのである。さきに挙げた、中世の論理学者たちを悩ませたパラドクシカルな事態も、実はこの点に起因している。

「妥当な言いかえ」とそれらを相互に関連づけようとする彼らの営みが逢着したパラドクシカルな事態は、すべてを日常語の範囲で説明しつくそうとするところから来ている、と考えることができる。

$$P \supset (Q \supset P)$$

は、P、Qの真理値のどのような組合せにたいしても真、すなわちトートロジーであるが、これを「Pであれば、どんなQからもQならばPであると主張できる」と解釈すれば、確かにパラドクシカルな感じは拭いがたい。ただしこれについては、「すでにPであるのならば、Qであろうとなかろうと、Pであることに変わりはない」として、「QならばP」と主張することに何ら不都合はない、とみることも可能だろう。

だが、すべてについて、上のような別の解釈を与えることができるかというと、もちろん保証のかぎりではない。次のような場合はどうだろうか。

$$(P \supset Q) \vee (Q \supset P)$$

これもトートーロジーであるが、日常語では、「どのようなP、Qについても、PならばQか、QならばPのいずれかがいえる」と解釈される。日常の論理では、とうてい許容されえないものである。しかしこれも、「⊃」や「∨」が、日常語の「ならば」、「または」にもとづきつつも、それを越えて定義されたことから来るものといえるだろう。

形式と内容の分離がもたらすこのような事態に、明確な位置づけが与えられるには、やはりブール以降の、形式の形式としての体系化、形式の記号としての自立的な体系化に待たなければならないのである。

2. 現代論理学への展開

「転換」あるいは「出発点」

論理学にとって近世は「野蛮な衰退期」であった、と評したのはボヘンスキー(J. M. Bocheński)であるが、ライプニッツが普遍学(mathématique universelle) とそれに基づく理想言語の構想を語ってから後、一世紀以上にわたって、論理学は停滞する。「論理学には、アリストテレス以来、一歩の進歩も一歩の退歩もなかった」というカントの有名な言葉も、そうしたなかで発されたものであった。ライプニッツの普遍的記号への意識は、$\int$、dx、dy など、その利便性ゆえに今日に生きる記法を生んだが、その結合術(ars combinatoria) のほうは長いあいだ顧みられないままにとどまっていた。

こうした状況に変化をもたらしたのは、数学者であり、数学における新しい状況であった。近世以来の数学の発展は、十八世紀において、変分法をはじめとする微積分的解析法を自然現象解明の中心的手段とする数理自然学のめざましい展開を招来した。だが、十九世紀になると、そうした数学的発展の根底にひそみ、それまでやや「いい加減」に使われてきた無限について厳密な議論が行われるようになる。コーシーの『解析教程』(A.-L. Cauchy, "Cours d'analyse", 1821)がよい例である。「数学的厳密を愛するすべての解析学者が読むべき傑作」とアーベルがたたえたこの著作で、コーシーは級数の収束性、関数の連続性などを厳密に定式化する。

さて、現代論理学への転回という点で特筆されるべきは、ド・モルガン(Augustus de Morgan, 1806-71) であり、ブール (George Boole, 1815-64)であるが、前者は、数学的帰納法を証明の様式として確立したことや(7)、コーシーの極限概念をいっそう厳密に定式化したことでも知られ、数学に論理的厳密さをもたらそうとした一人でもあった。そして、その友人であった一方のブールは『論理学の数学的分析』(Mathematical Analysis of Logic, 1847) を試みたのである。

いわゆる「論理代数」の理論を、この著作ではじめて展開したブールは、その主著である『思考法則の探究』(An Investigation of the Laws of Thought, 1854) においてそれをさらに発展させ、きわめて整理された、完全に近い記号論理の公理体系を提出した。

これらの著作において、彼はまず、論理とは人間が集合概念を操作するさいの法則であるとみなし、連言や選言を集合間の算法として定義する。そして、そこに成立する演算の基本法則(交換則、分配則、冪等律など) を定め、これと、暗黙のうちに借用した代数の諸法則を援用して、論理の諸命題 (排中律、矛盾律など) を証明していく。すなわち、ここに「集合算」として論理計算という新たな領域が開かれるとともに、その基本法則としてまとめられたいくつかのものを公理とする論理の記号的体系が提示されたのである。

ブールは、この記号の体系のなかで展開される演算と、その演算の解釈を徹底して区別した。今日流に言えば、統辞論 (syntax) と意味論(semantics) を区別したことにほかならないが、とにかく記号の体系を体系として一貫させ、それを自立的なものにすることによって、意味の問題を「棚上げ」する道を示したといえよう。その結果、日常語とこの記号の体系との関係は次のようなものとして整理される。

$$\text{日常語} \quad \underset{\xleftarrow[\text{解釈}]{}}{\xrightarrow{\text{翻訳}}} \quad \text{記号系}$$

ひとたび、日常語からこの記号体系の言葉に「翻訳」されたもの、すなわち論理式は、この記号系における計算規則にしたがって、まったく機械的に処理されうるのであり、また、個々の論理式がとる値、0、1も、この記号系におけるものと考えることができる。この0、1を、普通、それぞれ「偽」「真」を表わすものと考えるが、それは、個々の論理式がどのような意味をもつかということと同様に、「意味」・「解釈」のレベルに属することになる。

「棚上げ」というといかにも聞こえは悪いが、

要は、こうして「切り離して」論じることが可能になったということである。そして「切り離される」ことによって、意味・解釈については混乱を残しさえしながら[8]、その記号の体系は同時代のド・モルガンによって、さらにはジェヴォンズ（W. Jevons, 1835-1882）、シュレーダー（E. Schröder, 1841-1902）らによって修正・厳密化を受け、命題に関する計算として確立されていく。またその一方で、それをあくまでも集合に関する算法として見る立場からは、数学の他の諸分野との関連のなかで束論へと発展していくのである。

論理の拡張

ところで、意味・解釈という「記号系から日常語へ」の方向が物議をかもすなかで、論理学者たちが同様に関心を示し、かつ成果をあげていったのは「日常語から記号系へ」という方向が十全であるかということだった。

命題論理の範囲における「翻訳」の不十分さは次のような例で容易に確認される。

P：「馬は動物である」

Q：「馬の頭は動物の頭である」

ここで「PならばQ」という主張は、「馬」の部分にどのような動物の名が置かれても、また「頭」のかわりに身体のどんな部分が置かれても常に成り立ち、したがって「恒真」であるが、一般に「P ⊃ Q」がトートロジーでないことは明白である。ここに、それまでやや曖昧に「もっとも簡単な文」とされてきた要素命題について、その内部構造を問題にする必要が端的に認められる。

問題の所在自体は、すでにド・モルガンによって意識され、解決の道も模索されていたことであったが、この問題の解決に明確な方向性、すなわち今日の述語論理へという方向性を与えたのはパース（C. S. Peirce, 1839-1914）であり、それを引き継いで一階の述語論理のほぼ完全な体系を示し、のみならず高階の述語論理の一部を公理的な方法で提出したのがフレーゲ（G. Frege, 1848-1925）であった[9]。

フレーゲはまた、命題論理の体系についても、初めてその公理化に成功している。すなわち、少数の公理からすべてのトートロジーを定理として導くことができ、かつ矛盾を含まない、命題論理の形式的体系を構成して見せたのである。こうして、ブール以来の、形式の形式としての体系化、形式の記号としての自立的な体系化は一応の完結を見るのであり、フレーゲにおいて現代の記号論理の基礎が与えられるのである。

ところで、そのフレーゲは「解釈」の問題をどのように考えていただろうか。それを我々は1892年の『意味と指示について』（Über Sinn und Bedeutung）という論文に見ることができる。彼はそこで名辞に二つの働きを指摘する。名辞には人々が授けた「意味」を担う面と、何かあるものを「指示」する面とがあるというのである。この意味と指示は一対一に対応しているわけではない。例えば、「明けの明星」と「宵の明星」とは、それぞれに異なる意味をもつが、その指示はいずれも金星にほかならない、という具合である。フレーゲはさらに、この区別を命題にも適用する。そして、命題にとっての「指示」こそ、その真・偽であるとしたのである。そのうえで彼は、論理学の対象をこの「指示」の面に限定することによって、ブール以来の姿勢をより明確に位置づけたのである。

この点は、フレーゲとの交流もあり、何より今世紀の数学を方向づけた[10]人物として名高いヒルベルト（D. Hilbert, 1862-1943）がとった態度と好対照をなしている。アッカーマンとの共著『幾何学の基礎』（Grundlagen der Geometrie, 1899）においてユークリッド幾何学の完全な公理系を提示した彼が、公理体系のなかで証明を進めるにあたっては使われている言葉の意味をいっさい考える必要のないことをさして、「点、線、面のかわりに椅子、定規、机でもかまわない」と豪語したことはあまりに有名であるが、これにたいして、フレーゲはいわば「解釈を前提しない記号体系など無意味である」という立場を貫きながら、その解釈の場を上述

のように限定したのである。

けれども、フレーゲによるこの限定によって、前節に示したパラドクスが解消するわけではもちろんない。我々を取り巻く「事実」には、考えてみれば実に様々な意味が付着している。「今日はドシャブリである」という事実は、いかに日照り続きではあっても、遠足の日を迎えた幼児にとっては「恨みの雨」であろうし、言うまでもなく農夫にとっては「恵みの雨」であろう。都会人はといえば、例えば給水制限を免れたり、野菜の値段も落ち着くだろうと歓迎する反面、晴耕雨読とはいかぬ身ゆえ、ドシャブリのなかを出かけていかなければならないのはやはり恨めしい、といったところだろうか。このように、一つの事実が「我々」にたいしてもつ意味は十人十色、人様々であり、それはまた「日照り続き」という条件の有無、程度によっても大きく変動するだろう。だが、そうした多種多様な意味も、「雨が降る」という事実がある、またはない、ということが前提になって云々されることを思えば、多様な意味のほうは敢えて対象とせず、その前提の部分、すなわち「事の真・偽」のみを対象としていこうとする姿勢は、それほど突飛なものではないだろう。そしてその範囲でなら、厳密かつ矛盾のない記号の体系として「論理」を展開できることを示したのがフレーゲであった。

確かに、「真・偽を問うことができる文」というフレーゲが論理の対象としてあらためて指定した「文」は、日常言語のなかのごく一部を占めるにすぎない。けれども、事実を無視した、あるいは事実に基づかない思索をことさら「夢想」と呼ぶことを思えば、それが占める部分は決して小さくないといえるだろう。

多様な論理の展開

また、日常の多岐にわたる言語使用を迎え入れる、あるいは「救う」ような「論理」が構築されなかったわけでもない。

例えば、前節に揚げた、

$$(P \supset Q) \vee (Q \supset P)$$

のような、日常語の論理への「解釈」をまったく許さないものについて、やがて、ブラウワー(L. E. J. Brouwer, 1881-1966)に代表される「直観主義の論理」がこたえることになった。この式がトートロジーにならない論理体系が提示されたのである。

ブラウワーは、排中律について、次のような主張を展開した。「円周率πを小数展開すると、そのなかに1から9までの数字がこの順に並んで現われるところがある」という命題を例に、彼は次のような疑問を提示する。そのような箇所は今のところ見つかっていないが、これからも見つからないという確証はない。このような命題について、人は、「今のところ」決定はできないが、真か偽のどちらかではあろうとしてきた。だが、将来決定できるという保証はどこにあるのか、と彼は言うのである。

どんなに大きな桁まで調べてもシロクロがつかない、「実質的に決定不能」ということがありはしないか。のみならず、無限に多くの対象についてすべてを調べつくすことは不可能である以上、何かが「存在する」という主張は「本質的に決定不能」ということもありはしないか。そしてそうであるなら、「存在しない」と仮定すると矛盾が生じるということから、ただちに「よって存在する」と結論づけることはできないのではないか。「存在する」と言うためには、「それ」を具体的に示さなければならない。あるいは少なくとも「有限回の操作でそれに到達できる」という保証を示さなければならない、と主張したのである。

こうしてブラウワーは、数学における排中律の使用に厳しい制限を設けることを提唱した。この主張が数学界で巻き起した議論はひとまずおくとしよう。とにかく彼はこの立場から従来の数学を再構成しようとし、そのことによって、「真」と「偽」のほかに「不定」という第三の値をもつ、三値の論理の展開を促したのである。

その延長上には、命題が0から1までの連続的な値をとる「多値論理」の展開も容易に予想される。

とはいえ、ブラウワーのこの試みは、数学から「怪しげなもの」を放逐しようというもので、それがやや皮肉なことに数学そのものよりも、むしろ論理学に新しい展開をもたらしたのであって、決して日常の言語使用との対応をつけるためのものではなかった。

この点については、様相論理学の先駆けとなったルイス(C. I. Lewis)にも同じようなことがいえる。彼の場合には、前節に示した「含意のパラドクス」の考察・分析が、その新たな論理体系の構成の直接のきっかけであった。

ルイスは、「$p \supset (q \supset p)$」にしても、「$\sim p \supset (p \supset q)$」にしても、あるいはこの両者から導かれる「$(p \supset q) \vee (q \supset p)$」にしても、「$\supset$」に託された真理関数的な意味を反映したもので、“正しく”理解するなら「不思議なこともなければ、ひどい不合理でもない」と指摘する。ただしその一方で、「含意する」(imply)には、ほかにもっと強い意味が存在すると彼は主張する。そしてその強い意味においては、「pはqを含意する」とは「qはpから導かれる」ことを意味する、と。この強い意味においては、真なる命題が任意の命題によって含意されるとか、偽なる命題が任意の命題を含意するとは必ずしも言えないし、また命題の対が互いに他を含意しないこともありうる。そうして、この必然的に、あるいは厳密に成り立つ含意(厳密含意)が決定的な役割を演じるような、つまりは事実上の様相論理の体系を彼は提示したのである(11)。

ここでも、日常の言語のなかの一義的に真理値を決めることのできない文をとらえようという意識はむしろ薄く、上述の考察から出発して、意味解釈をともなわない純粋に形式的な体系の構成が目指されたのだった。それはまた、「意味」を系統的に扱う手段をもたない以上、むしろ賢明な行き方でもあった。

ところでそうした手段が与えられるのは1960年代のことである。これについては、クリプキによる「可能世界意味論」の展開が特筆されるべきだろう(12)。いずれにしても、様相論理学をはじめとする広義の内包論理学が、哲学の問題や言語理論との関わりのなかで大きな話題として取り上げられるようになるのはこの頃からである。さらに、70年代になると、いわゆるモンタギュー文法が提出されて日常言語の論理的構造の分析に力を発揮するようになる(13)。カテゴリー文法と内包論理学の総合に基づくこの文法は、日常言語の意味論について厳密で豊かな記述装置を提供するとともに、意味論の研究を通じて発展してきた形式的手法、とりわけモデル理論的な考えを語用論的な要因をも取り込むかたちで拡張することによって(指標理論)、語用論をも形式的に扱う道を開くに至っている。

また、パーティ(B. Partee)らの指摘を端緒に(1975)、モンタギュー文法といわゆる生成変形文法との関連が考察されるようになり、両者の統合も模索され始めている。いずれにしても、日常言語(自然言語)の複雑さを徐々にではあるが確実に迎え入れる形式的な道具立てが、複合表現をその諸部分の意味の関数としてとらえようという、しばしば「フレーゲの原理」と呼ばれる考えの延長上に、しだいに整いつつあると言えるだろう。

3. 情報処理技術と論理

新しい型のコンピュータへの期待

今日のいわゆる「情報化社会」が、通信技術の著しい発達と、それによってもたらされる多量の情報を処理する技術の、これまた目を見張るばかりの急速な発達に基づくものであることは言わずもがなであろうし、情報処理技術の発達とはコンピュータの発達を指すことも、また言わずもがなのことであろう。

ところで、現代のコンピュータは「ノイマン型コンピュータ」と呼ばれたり、「第四世代コンピュータ」と呼ばれたりする。後者は、第一世代の真空管に始まり、トランジスタ、ICや

LSI、そして超LSIという、コンピュータ素子の世代交代に基づく呼称であり、前者は、現在のコンピュータが、その「生みの親」であるフォン・ノイマン（J. L. von Neumann, 1903-57）の1945年に提出した自動計算機のアイデアを今も踏襲していることを示すものである。

演算素子として真空管を使った最初のデジタル型計算機、ENIACが[14]、真空管18,000本、抵抗70,000個、スイッチ6,000個を用い、重さ130トン、これをおさめたキャビネットの長さが33メートルに及んだというから、外見上の小型化一つをとっても、この間の変化の大きさに驚かされるばかりである。そして、記憶容量の増大、演算速度の向上が外見の変化以上に著しいものであることは周知の事柄である。それだけに、基本設計の部分がノイマン以来のままであることに、よけいに驚かされるのである。

ちなみに、現在のコンピュータ素子の動作速度は、数マイクロ秒から数ナノ秒であるといわれる。脳の素子にあたる神経細胞の動作速度は数ミリ秒程度だというから、神経細胞の1,000倍から100万倍のスピードをもつ勘定になる。このスピードによって、四則演算はもとより、分類、検索、あるいは“順序を変える”といったデータに対する加工を大量かつ短時間に行なうことができ、文字や数字の読み取りのようなパタンの認識についても、実に複雑な手順を必要とするにもかかわらず、人間と同様に「瞬時」に行なうことができるのである。この想像を絶するスピードで「量」をこなしていくコンピュータが、例えば企業では、給与計算、在庫管理、販売管理など、様々な面でその力を発揮している。こうした仕事をすべて人手に頼って行なわなければならないとすれば、産業構造そのものの変化が免れないと言われるるほど、コンピュータは様々なかたちで社会に浸透し、社会を変化させている。

ヘーゲルに「禿頭論法」というのがある。「髪の毛を一本抜いてもハゲにはならない」、「二本抜いても……」、「三本抜いても……」、「ゆえに全部抜いてもハゲにはならない」。もちろん全部抜けば確実に禿頭になる。ヘーゲルはこの例から、量がまとまれば質的な変化をもたらす、「量質転換の法則」を説いた。コンピュータの登場による社会の変化も、「量の変化」が、「質の変化」をもたらした口だと言えるだろう。

さて、留まるところを知らないかに見える素子技術の向上であるが、そこにも限界が指摘され始めている。要するに、光の速さは越えられない、ということである。言いかえれば、素子の改良もほぼ行き着くところまで行ってしまいつつある、ということである。それはまた、問題を処理するために要する時間が、現実的な範囲におさまらなければならないことを考えるなら、計算量の限界が具体的なものとして意識されるようになりつつある、ということでもある。

その一方で、ソフトウエアの危機が叫ばれて久しい。コンピュータにやってもらう仕事が複雑になるにつれて、その仕事の計算手順、処理手順を具体的に与えるソフトウエアも巨大化と複雑化の度を増さざるをえない。そうしたソフトウエアを作り出す技術者の数が社会の需要をほとんど満たせなくなってしまうのではないかという危惧である。そこで、処理手順を具体的に記述しなくても、機能さえ記述すればよい無手順言語も考案されてきたが、無手順にするほど実際の処理に要する時間も長くなり、ハードへの負担も大きくならざるをえない。つまり、今述べたばかりの計算量の限界とも関連して来ざるをえないのである。

こうした、いわば一種の飽和状態に近づきつつあるなかで、この状態を打開する方策として考えられているのが、ノイマン型の直列集中処理方式に対する並列分散処理方式であり、あるいは述語論理型のいわゆる「第5世代コンピュータ」の構想である。後者は、“物真似上手”と皮肉られることが少なくない我が国の科学・技術にあって、日本人科学者の発案ということで注目を集めてもいるが、何より、自然言語に近いものでコンピュータと対話ができる、すなわち現在の手順型言語のかわりに推論規則を記述する論理プログラミングが使えるということで、

ソフトウエア危機解消の決め手の一つとして期待されている。

理論と技術

ところで、「第五世代コンピュータ」などというものが現実味を帯びるのは、現在の技術水準が少々複雑なハードウエアを無理なくつくりうる段階に達しているからでもある。

「計算する機械」の実現はパスカルの加算機（1642）やライプニッツの四則演算機（1694）にまでさかのぼることができるが、今日のコンピュータの前身とみなしうる自動計算機の構想はイギリスの数学者バベジ（C. Babbage, 1792-1871）によって、すでに1830年代に提出されている。そして彼は、計算に必要な数値と四則演算にまで分解した計算手順を与えてやれば、その手順を次々と実行していくこの計算機（解析機械）の製作に没頭した。

バベジの直接の目的は、例えば月の位置を時刻の関数として与える天文表の作成といった、航海術や天文学に必要な正確な数表を作りあげることにあったが、そのために必要な膨大な計算を実行する彼のこの計算機は、６次多項式の値を十進数で20桁まで求められるように設計されていた。けれども、そのためには実に多くの歯車を連動させねばならず、そこで生ずる摩擦力をこえる安定した駆動力を得ることができないまま、約半世紀に及ぶ彼の試みは結局は挫折に終わるのである。

理論と実践はしばしば車の両輪にたとえられるけれども、この二つの車輪をつなぐ車軸は、一方の運動を他方に正確に伝えることのほうがむしろ少ないようである。実践的要請に応えるバベジの理論に対して、実践の側の車輪が回り出すには100年以上の時間が必要だった。

一方、ノイマンは1945年に提出した構想に基づくコンピュータを1950年に完成させている。機が熟していたと言うべきなのだろうが、ノイマンがその構想を提出するにあたってチューリングの万能機械をモデルとしたことはよく知られた事実である。それはハードウエアをできるだけ単純なものにしようとする選択の結果でもあった。少なくとも初期のノイマンはもっと複雑な解析機械を考えていたようなのだが、当時の技術水準が、チューリングの機械をモデルとするような単純な原理を選択させたと言えるだろう。

「計算」概念の拡張

ところで、コンピュータは現在もあくまで「計算する機械」に違いないのだが、それによってなされる仕事は、我々が通常、計算と理解している範囲を著しく越えているように見える。その基本的なカラクリを確認するために最後にゲーデル（K. Goedel, 1906-1978）の仕事について振り返っておきたい。

ヒルベルト、アッカーマンの『幾何学の基礎』についてはすでに触れたが、その成功に意を強くしたヒルベルトは、いわばギリシャ以来のものである公理主義をさらにつきつめた「形式主義」と呼ばれる考えを鮮明にするに至った。すなわち、数学の用語や対象を、それらが意味する表象や解釈を離れた単なる記号、あるいは要素とみなし、それらの間の関係を規定する公理系から演繹的に導かれる形式的命題の集まりだけをその数学の体系とみなそうという考えである。先に引用したヒルベルトの言葉も、この考えを比喩的に述べたものであった。

この考えのもとに、ヒルベルトは、集合論の逆理以来の数学の基礎をめぐる議論に答えていく方向として、まず論理から始め、自然数論、集合論、実数論等について、順次、無矛盾な公理系を構成し、それらをできるかぎり完全なものに仕上げていくことを提唱した（「ヒルベルトのプログラム」）。そもそも『幾何学の基礎』において、ヒルベルトが示したユークリッド幾何の公理系が無矛盾かつ完全であることの証明には、実数論の無矛盾が前提されてもいたのである。

さて、命題論理については、その古典的な公

理系が無矛盾であり、完全である（命題論理の真なる式のすべてが公理から導ける）ことは比較的簡単に証明できる。これはラッセル、ホワイトヘッドの『プリンキピア・マテマティカ』(Principia mathematica, 1910-1913）で示されたところである。次いで、一階の述語論理の無矛盾性を、ヒルベルト自身が、これもアッカーマンとの共著である『数理論理学の基礎』(1928）で示し、またゲーデルによってそれが完全であることが明らかにされた（ゲーデルの完全性定理、1930）[15]。そこで次は、具体的な数学の体系について、それが無矛盾であり、完全であることが示される番になるはずであった。

ところが、ゲーデルが引き続いて自然数論について示してみせたことは、案に相違して「自然数の公理系が無矛盾ならばそれは完全でない」ということであり、のみならず「自然数の公理系が無矛盾ならば、その無矛盾性をその公理系から導くことができない」ということであった（ゲーデルの不完全性定理、1931）[16]。

「自然数は神が創りたもうた。他の数は人間が作ったものである」というクロネッカー（L. Kronecker, 1823-1891）の有名な言葉があるが、それくらい単純素朴で、その名のとおり我々にとって「自然な」存在について、どのような公理系を作っても「完全」ではありえない、つまりその公理系のもとでは真とも偽とも決定できない命題が存在することが示されたことは、少なからぬ驚きをもって迎えられた。ゲーデルが示したこの結果はまた、自然数にとどまるものではなかった。自然数をはじめ、とにかく無限概念を含むような数学（例えば集合論）では、「無矛盾であって、同時にそれ自身の無矛盾性を定理として導けるような公理系を作ることはできない」ということである。

だが、ここで注目したいのは、言うまでもなく、ゲーデルが決定不可能な命題の存在を証明する際に用いた方法である。彼はそれを数論的関数、すなわち自然数のうえで定義され自然数の値をとる関数を用いて証明した。具体的には、対象や関数などを表わす形式的記号、それらから作られる項や論理式などの記号列、さらに記号列の階層として構成される証明図等を、それぞれ自然数に一意的に対応させること、つまりはそれらに自然数の番号をふることを通じて、形式化されている体系を自然数論のなかで表現することによって証明したのである。

ここで形式的記号や記号列にふられた番号をゲーデル数といい、このように番号づけを行なうことをゲーデル数化（あるいは単に算術化）という。もちろん、番号のふり方、自然数への対応のさせ方は一通りではない。ただ、異なる記号や記号列には異なる自然数が対応するようになっていて、一方あるゲーデル数が与えられたときそれが何に対応しているかを知る手順が存在していなければならない。

ゲーデルにあっては、ラッセル・ホワイトヘッドの『プリンキピア・マテマティカ』における型の理論や、ツェルメロ、フレンケルの集合論で使われている公理系、あるいは自然数論そのもののなかに、決定不可能な命題が存在することを証明するための方法であった、ある形式的体系を自然数論のなかに引き写して論じるというこのやり方は、一方で、任意の領域についてその算術化の可能性を示すものであった。すなわち、ある領域における概念や概念の操作を明確に記述できたならば、それらを有限種類の記号の有限列で表現でき、その種類はたかだか可算個である（自然数の個数をこえない）から、それらを自然数と一意的に対応させることができる。こうして自然数論に埋め込むことによって、その領域における対象を自然数として、またそこにおける関係や手続きを自然数における関係や手続きとして、つまり一種の「計算」として扱うことが可能になる。

ところで、「ある領域における概念や概念の操作を明確に記述する」にはどうすればよいだろうか。もちろん何をもって「明確」であるとするかは議論の分かれるところであろうが、『プリンキピア・マテマティカ』やそれに先立つペアノの自然数論では、論理式や自然数を“帰納的に定義する”ことによって、何が論理式であり、

何が自然数であるかの基準を明確に与えたうえで公理系を構成する方法が示されていた。

すなわち、論理式については、
まず命題変数をａ、ｂ、ｃ、……などの小文字で表わすことにする。さらに無定義の論理記号

⊃、∧、∨、～

を導入する。そのうえで、

Ⅰ　命題変数は論理式である
Ⅱ　Ａ、Ｂが論理式ならば、
　　Ａ⊃Ｂ、Ａ∧Ｂ、Ａ∨Ｂ、～Ａ
　　は論理式である
Ⅲ　Ⅰ、Ⅱを満たすもののみが論理式である

という具合である。ここで大文字のＡ、Ｂは命題変数ａ、ｂ、ｃ、……でもよいから、そこから次々と「論理式」が得られてゆく。つまり、「論理式とは何か」という問に中身（意味）で答えるのではなく、「どういうものを論理式というか」の基準を示すことで答えてしまおうというのである。

また、自然数の集合Ｎを定義するペアノの公理系の場合も同様で、まず、無定義な三つの概念

集合　Ｎ
特定の対象　０
集合Ｎからそれ自身のなかへの写像 ’：
　　Ｎ → Ｎ(17)

を想定し、それらの間に置かれる公理のうち

Ⅰ　０はＮの要素である
Ⅱ　ｎがＮの要素ならばｎ’もＮの要素である
Ⅲ　Ⅰ、Ⅱの過程で得られるものだけがＮの要素である

の三つが「どういうものを自然数というか」の基準を与えている。

そして、自然数論においては、“初めの値ｍと自然数から自然数への写像ｆ：Ｎ→Ｎとから帰納的に定義される関数ｇ：Ｎ→Ｎ”というかたちで、和、積、ベキ等を帰納的に定義していける。また、そこから関数を帰納的に定義しようという試みも登場する。

『プリンキピア・マテマティカ』に触発されるかたちで、関数の帰納的な定義について体系的に研究し、それにもとづいて数論の構成を試みた最初の人物はスコーレム（T. Skolem, 1887-1967）であった（1923）。そして、ゲーデルもまた、不完全性定理の証明を帰納的に定義される数論的関数の考察から始め、帰納法による証明や帰納的定義という概念が許されるような、いかなる公理系においても、それが「無矛盾であれば不完全」であることを示したのである。

ところで、関数が帰納的に定義できるということは、上記のｇの０のときの値 $g(0)$ が定義され、ｎ’のときの値 $g(n')$ を、ｎのときの値 $g(n)$ を用いて定義できることにほかならない。すなわち、

$$g(0)=m$$
$$g(n')=f(g(n))$$

ここで、「後者写像 ’」も自然数から自然数への写像であるから、今これをｆとすると、

$$g(0)=m$$
$$g(n')=(g(n))'$$

を満たすような $g:N\to N$ が得られる。この写像のｎのときの値 $g(n)$ がｍとｎの“和”にほかならない。慣習に従って $g(n)=m+n$ として上記の式を式きなおすと、

$$m+0=m$$
$$m+n'=(m+n)'$$

例えば「加法」は、以上のように帰納的に定義されるのである。

今、試みに上の定義に従って、3＋2をやってみよう。

$$3+2=3+1'=(3+0')'=(3+0)''=3''=5$$

計算手順は長くなるが、定義に従って展開していけば、必ず計算できることは明らかだろう。翻って、この点から、ゲーデルが帰納的に定義される数論的関数を用いて証明したことの意味を考えるなら、それが「計算できない」すなわち関数値を決定できない問題の存在を示すものであることが理解される。

帰納的関数と計算可能関数との関連は、ゲーデルにおいて初めから意識されていたわけではなかった。1931年に不完全性定理の証明を読んだフランスの数学者エルブラン（J. Herbrand, 1908-1932）が、いちはやくゲーデルに手紙を書き、計算可能性の定義の方向性を示唆したと言われる。その示唆を受けて、ゲーデルは1933年にプリンストンで行なった不完全性定理の講義のなかで、計算可能性についても定義を与えた。そして、計算手順（アルゴリズム）の存在だけをもって計算可能関数とするその定義を契機に、計算可能関数の形式的定義の試みが一挙に行なわれるようになったと言われる。

ゲーデルの帰納的関数（今日では「原始帰納的関数」と呼ばれる）を拡張し「一般帰納的関数」を定義（1936）したクリーネ（S. C. Kleene, 1909- ）や、「λ-定義可能な関数」を定義し（1935）、一般帰納的関数をもって計算可能関数としようという提唱（1936）で知られるチャーチ（A. Church, 1903- ）も、ゲーデルのこの時の講義の出席者の一人だった。一方、イギリスの数学者チューリング（A. M. Turing, 1912-1954）が、人間が計算する際の操作を抽象化して、それを実行する機械を想定し、その機械が実行しうるものとして計算可能関数を定義するのも同じ頃（1936）である。そして、ゲーデルの仕事を早くから深く理解していたのが、ほかならぬフォン・ノイマンであり、ゲーデルをプリンストンに招いたのも、ノイマンその人だったのである。

ゲーデルの話がずいぶん長くなってしまったが、数学の基礎をめぐる研究が思わぬところに応用の糸口を見出したと言えるだろう。そして、そうした研究や計算可能性の理論の展開を見渡せる位置にノイマンがいた、ということでもある。また、数学の基礎をめぐる論議が盛んになる契機としては、ここでは詳しくふれなかったが、カントル（G. Cantor, 1845-1918）による集合論の確立と、それがもたらした集合論の逆理の解消を目指す努力があったことも指摘しておかなければならない。その努力のなかに、ブール以来の「論理学を数学的に」という方向から、数学を論理によって基礎づけようという、フレーゲ、ラッセルによる「論理主義」の提唱もあったし、ヒルベルトの「形式主義」、ブラウワーの「直観主義」の提唱もあったのである。

おわりに

かつてパスカルは、父を徴税の煩わしさから解放するために計算機を考案した。また、バベジは、計算法のわかっている計算は機械にまかせ、数表は印刷することによって人手による誤りを防ぐべきだとした。こうした発想を現実のものにした今日の計算機は、所期の目標をこえて、分類や検索をはじめ、これまで「計算」とは考えられていなかった多くの事柄を「計算」として行なっている。そこにおける「計算」は何らかの定められた手順を実行することにほかならず、バベジ流に言えば、「手順のわかっていることは機械にまかせよう」ということである。またそれが、われわれを多くの煩雑な仕事から解放したことも事実である。

ただ、かつて「鉛筆を削れない子供」が論議を呼んだように、便利さと引き換えに失うものがあることも、やはり心得ておかねばならない。例えば、翻訳もまた、この機械にまかせることができるようになりつつある事柄の一つであるが、いわゆる「コトバの障壁」をなくすという

点で、そのメリットは確かにはかり知れない。ところがその一方で、「コトバは文化である」と言われるように、その国のコトバを通じて初めてふれることができる文化が存在することも確かである。機械翻訳によって、すべてが日本語流に置き換えられて与えられるようになれば、後者の側面はほぼ確実にわれわれの眼に映らなくなるだろう。得られるものの大きさは、失うものの大きさを暗示しているようでもある。

また、数論への埋め込みを介さず、自然言語で直接コンピュータと対話ができ、知識ベースを記憶し、それを利用して自分で判断し、さらには、学習、連想、推論の能力をもつことが期待されている次世代コンピュータについても、同様のことが言えるだろう。

述語論理のコトバは確かに自然言語、すなわち日常のコトバに「近い」。けれども、それがわれわれの現実の思考過程と逐一対応するものでないことは、すでに示したとおりである。むしろ、それは現実の思考過程から切り離されることによって成立している。

われわれの言語活動から抽象されたものである論理は、われわれが現実に生きる時間・空間をこえた、いわば永遠の相のもとで定式化された、きわめて目の荒い網であり、それによってわれわれの多様な現実をすくい取ろうとするものである。その目の荒い網で現実のかなりの部分をすくい取れることは驚きでさえあるが、そのような網では、あるいはその網の目をいくら細かくしても、すくい取られることのない現実がやはり存在する。

だが、すくい取ることのできない現実が残るという点では、日常の言葉も同様なのである。当然すぎるほど当然のことだが、コトバはやはりモノそのものではない。「言葉は眼の邪魔になる」というのは小林秀雄の言葉であったと思う。コトバが与えられることによって、モノそのものを見る眼が閉じられてしまうことへの警告である。さらに、「百聞は一見にしかず」とか、“Seeing is believing”というように、「見る」ことが支配的な文化にあっては、眼は、例えば耳の邪魔になると言わねばならない面が指摘されるはずである。

そうであるなら、論理は、とりわけ記号論理は、さしずめ、思考の「邪魔になる」面を必然的に背負っていると言えるだろう。そして、種々の事柄を記号として処理し、操作する術を覚え、その妙味を知った社会では、モノそのものを見る眼も、聞く耳も閉ざされてしまうことさえ懸念されるのである。この点にどう応えていくかは、われわれが絶えず考えていかなければならない問題であろう。

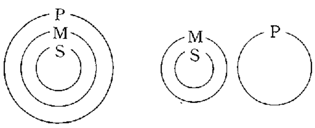
注

(1) BARBARA、CELARENTが「全体および皆無の原理」の表現にほかならないことを確認しておきたい。

BARBARA、CELARENTは、それぞれ次のような型の推理である。

すべてのMはPである	すべてのMはPでない
すべてのSはMである	すべてのSはMである
すべてのSはPである	すべてのSはPでない

これを、いわゆるヴェン－オイラーの図で示せば、

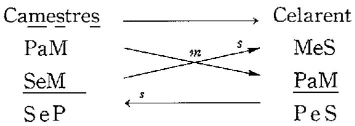


(ただし、図は名辞S、M、Pの外延［指示対象］の集合を表わす)

以上のように、全体（ここではM）について成り立つことは部分（ここではS）についても成り立ち［BARBARA］、全体Mについて成り立たないことは部分Sについても成り立たない［CELARENT］ことを主張しているとみることができる。

(2) 語中の“M”は還元にさいして大前提と小前提を入れ替えるよう指示し、“S”は直前の命題を単純換位するよう指示している。

CAMESTRESのCELARENTへの「還元」を図示しておこう。



(3) 『アルマゲスト』において天動説を数学的理論として集成したプトレマイオスが、地動説の理論的可能性を認めていたことはよく知られている。つまり、天動説も地動説も一貫した説明としてはそれぞれ成り立ちうるが、「地球が動く」という偽なる前提に立つものとして、彼は地動説を退けたのである。

(4) ここで、話をやや先取りすることになるが、「矛盾があれば、どんなことでも言える」ことを、命題論理について示しておこう。

i）論理式Aが成り立つなら、論理式A∨Bは［“∨”の定義より］つねに成り立つ。

ii）論理式Aと論理式(~A)∨Bから、論理式Bがえられる。これは「三段論法」である。

［本文の次項「記号の節約」で述べるように、二番目の論理式は

A⊃Bと同値であるから、上の文は、

「Aであり、AならばBであるなら、Bである」ということに等しい。］

ところで、今、任意の論理式Cについて、

(~A) ∨~(~A) ∨C

は、i）から、つねに正しい。

そこで、

a）もしAが証明できているとすれば、ii）より、

Aと (~A) ∨~(~A) ∨Cから

~(~A)∨C

がえられる。

ここでさらに、

b）~Aも証明できたならば、同様にしてii）より、

~Aと~(~A)∨Cから

C

もえられる。

つまり、Aも~Aも証明できるような、矛盾を含む体系では、任意のどんな論理式も証明できてしまうのである。公理系の無矛盾が強く求められる理由である。

ところで、これも後述することだが、ゲーデルは「公理系が無矛盾であれば、それが無矛盾であることをその公理から導くことはできない」というショッキングな結果を示した。皮肉なことに、また奇妙なことでもあるが、今、確認したように、公理系に矛盾があれば、どんなことでも、つまりはその公理系が無矛盾であることも証明できてしまうのである。

(5) 各命題を電気回路のスイッチと考えると、連言、選言は、それらを直列、並列につなぐものと考えられることは、よく知られた事実である。さらに、否定をonとoffを入れかえる回路に対応させることによって、すべての論理式を電気回路として表わすことができる。そして電流が流れる、流れない、あるいは電圧が高い、低いなどの電気的信号を論理の真・偽と対応させれば、この回路に電流を流すことによって、与えられた論理式の値を求める、すなわち論理計算を行なうことができる。また逆に、電気回路を論理式で表わすことができ、電気回路の解析や設計に論理式を役立てることができる。

このような回路を論理回路と呼び、直列をand-回路、並列をor-回路、onとoffを入れかえる回路をnot-回路と呼んでいる。コンピュータ内の演算装置や制御装置、それに記憶装置や入出力装置の電子回路部分は、こうした論理回路素子の組み合わせによって構成されている。

これらは、いずれもよく知られた事柄であるが、一応つけくわえておきたい。

(6) 同じように、$p \downarrow q = \sim p \wedge \sim q$と定義して、「↓」だけですべての論理式を表わすことができる。こちらはjoint denialと呼ばれている。

(7) 数学的帰納法を、最初に意識的に用いたのはパスカルである。このことは原享吉氏によって示された。

Kokiti Hara; “Pascal et l'induction mathématique”, 1962 in l'Œuvre scientifique de Pascal, 1964, pp. 120-135.

(8) ブールが構成した代数の体系では、その基本記号x、y、z、……はすべて集合を表わすものであり、1、0という数字もそれぞれ全集合、空集合を意味するものであった。また、演算として、減法や除法もかなり粗雑に含めようとしたため、結局、彼においては、この

体系と論理演算との間に完全な対応をつけることはできなかった。
(9) "Begriffsschrift", 1879.
(10) とりわけ、1900年、パリの国際数学者会議で行なった招待講演で述べた、23の「数学の問題」は、来たるべき世紀の数学の目標を与えたものとして、また独創的な研究を呼びかけたものとして有名である。
(11) Lewis-Langford, "Symbolic Logic", 1932.
(12) S.A.Kripke, "Semantical Analysis of Modal Logic", 1963.
(13) R.Montague, "Proper Treatment of Quantification in Ordinary English", 1973.
(14) ただし、プログラム内蔵型ではないため、厳密には今日の型の電子計算機第一号とすることはできない。内部指令方式を採用したディジタル型計算機の一号機は、1949年、ケンブリッジ大学のウィルクス (M.V. Wilkes) らによって設計、製作されたEDSACである。ノイマンが自らの提案を実現し、EDVACを完成させたのは1950年のことであった。
(15) 「完全性定理」は、1929年秋、学位論文としてまとめられ、翌1930年2月6日『論理学における述語計算の公理の完全性』として、学位論文をやや短くして発表された ("Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls")。
(16) 「不完全性定理」については、1930年、9月、『プリンキピア・マテマティカ』の型の理論や集合論の公理系の不完全性が、ケーニヒスベルクで開かれた数学の会議で発表され、次いで自然数論の不完全性が、10月23日、『完全性と無矛盾性に関するいくつかの数学的結果』として、ウィーン科学アカデミーで発表された ("Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit")。
そして、その一部をまとめたものが、ウィーン大学「数学物理学紀要」(Monatshefte für Mathematik und Physik) に1931年はじめに掲載された。この論文はゲーデルのウィーン大学への就職論文でもあった。
(17) 具体的には、N の各元 n に対して、その「後者(successor)」n'を指定する対応。ただし、「後者」の定義はないから、この対応 ' はさしあたり N の内部での無定義な写像として扱われる。

参考文献

* 坂本百大・坂井秀寿：新版現代論理学，東海大学出版会 (1971)
* 山下太郎ほか：新しい認識への論理，公論社 (1984)
* Philotheus Boehner : *Medieval Logic*, Manchester Univ. Press, 1952.
* G.E.Hughes, M.J.Cresswell : *An Introduction to Modal Logic*, Methuen & Co. Ltd., 1968.
* 廣瀬健・横田一正：ゲーデルの世界，海鳴社(1985)

(本稿は1988年度、東京情報大学総合講座「情報化の諸局面」の一端として行なった講義のノートをもとに加筆・修正してまとめたものである。)