記号力学系入門

水谷正大*

力学系の研究において強力な手段の一つである記号力学系の方法を与える。力学系の相空間を分割し記号を割当てることにより、力学系の記述が力学系の発展を定めるダイナミックスに応じた記号列のシフトとして与えられる。例として，数論的変換を力学系とみなし，その自然拡大を実現することで自己同型写像を構成する。力学系の考え方は汎用的であり、この記号力学系の方法は連続なアナログ量を離散的なデジタル量に変換するための一般的指針を与えており、様々な分野の解析に用いることができる。

1 はじめに

本論文では、与えれれた力学系に対する記号力学系の概念を詳しく述べ、自然拡大や双対力学系の定義を与える。さらに代表的な力学系に対し具体的にこれらの力学系を構成する。

物事の在り様を**状態**（*state*）という。状態は一般に時刻と共に変化し続けている。この状態変化は、刻一刻と連続的に変化していると考えてもよいし、1日目、2日目というふうに離散的に変化していると考えてもよい。可能な全ての状態の集まりを状態空間、または**相空間**（*phase space*）という。考えている対象の在り様はこの相空間のなかの一つ点として指定されるのである。

状態が連続的に変化するときには連続時間を、状態の離散的変化のときには離散時間をそれぞれもちいて状態変化を記述する。いま、時刻 t_0 における状態 x_0 が与えられたとき、それから時刻 t だけ経過した状態 x_1 を $T(x_0;t)$ と表そう。例えば、状態変化が微分方程式で指定されているときには、状態変化はその方程式の解によって定められるべきものである。状態 x_0 から時刻 t だけ経過した状態 x_1 への遷移を相空間XからXへの変換 $T_t:X\rightarrow X$と見なすと、$x_1=T_tx_0$ の関係になっている。このように相空間Xとその上の変換 T_t が定められているとき、これを**力学系**（*dynamical system*）という。離散時間で考えているときには、単位時間での遷移をTとすると、$T_t=\underbrace{T\circ\cdots\circ T}_{t\text{回}}$（このように離散的なときには、これを T^t と記す）、であるので、離散力学系として、相空間Xと変換Tを考えればよい。

状態遷移を定める T_t の性質を考えてみよう。状態xから時刻0だけ経過した状態 $T_{t=0}x$ はxに等しく、時刻 $t>0$ 経過した状態 T_tx から、さらに時刻 $s>0$ 経過した状態 $T_s(T_tx)$ は、状態xから時刻 $t+s$ 経過した状態 $T_{t+s}x$ に等しい。つまり、T_0＝恒等写像、$T_t\circ T_s=T_{t+s}$ が成立しているので、変換の族$\{T_t\}$は半群（*semi-group*）をなし、さらに T_t が過去 $t<0$

＊ 東京情報大学　講師
1991年1月17日受理

にも定義されていれば、族 $\{T_t\}$ は群をなすことが分かる。

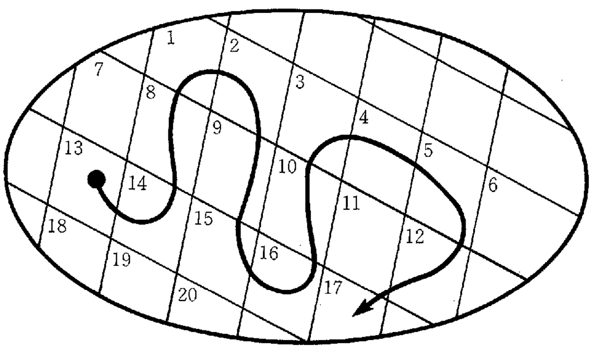
このように力学系の概念は状態の変化を考える上で極めて普遍的なものである。いまある力学系が与えられたとき、この力学系を調べることを考えよう。相空間の中の1つの状態 x が与えられると、その状態は時間と共に変化し相空間の中を次々と移動し、$\{T_t x\}_{t=0}^{\infty}$ は連続時間のときには曲線を、離散時間のときには点列をなす。これを状態 x から出発する**軌道**（*orbit*）という。相空間の様々な状態から出発する軌道の性質を研究することが、この力学系の性質を調べる大きな手がかりとなる。

連続時間、離散時間を問わず一般の力学系の軌道を特徴付ける方法を考えてみよう。軌道は相空間の様々な場所を次々に移動していくのであるから、軌道が相空間のどの位置を通過しているかを次々と記録にとどめておけば1つの軌道を特徴付けることができるであろう。そのために相空間 X を n 個の領域に適当に分割する。

$$X = \bigcup_{a_i \in A} X_{a_i}$$

ここで A は適当な添字集合である。初期状態 $x \in X_{a_1}$ から出発する軌道 $\{T_t x\}_{t=0}^{\infty}$ は、分割された領域を次々と訪れることになり、その履歴は分割領域を表す記号の無限列 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ で与えられる。すなわち $\{T_t x\}_{t=0}^{\infty} \sim \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ の対応関係が得られる。この記号列は添字集合 A の無限直積空間 $\prod_{i=1}^{\infty} A$ に属している。仮に軌道が連続曲線であっても、通過領域を表す離散的な記号列が得られることになり、相空間の分割による軌道の特徴付けの方法は、アナログ情報をデジタル化するための一般的手段を提供しているのである。

この考え方をさらに押し進めると、力学系の状態遷移を定める T_t 自体の性質をも調べる有力な方法を提供することができる。相空間の各点に対してそこから出発する軌道が考えられるのであるから、相空間の各点 x には、上で得たような記号列 $\{a(x)_i\}_{i=1}^{\infty}$ が対応していると考えることができる。いま初期状態 x から出発した軌道について考えてみよう。時刻 $t=0$ における状態 $x = T_0 x$ が領域 X_{a1} にあり、それから単位時間 $t=1$ 経過した状態 $T_1 x$ が X_{a_2} にあり、単位時間 $t=2$ 経過した状態 $T_2 x$ が X_{a_3} にあり……、とする。このようにして状態 x には記号列 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\}$ が対応していたのであった。状態 x から T_1 で変換された状態 $T_1 x$ に対応し



連続軌道を記号列で表す

$T_t x \Rightarrow 13, 14, 8, 1, 2, 9, 15, 16, 10, 3, 4, 5, 12, 17, \cdots$

図1．相空間の分割による軌道の特徴づけ

ている記号列を考えると、同様の考察から、記号列$\{a_2,a_3,a_4,a_5,\cdots\}$が対応していることになる。この2つの記号列を見てみると、状態T_1xに対応する記号列は単に状態xに対応する記号列をズラせただけで得られることは明かである。従って、初期状態xから遷移$\{T_t\}$によって次々と状態が変化していく様子は、初期状態に対応する記号列を次々とずらせることで把握できることになる。

すなわち変換T_tの性質は、相空間を分割したときに定まるそれぞれの点xに関する記号列$\{a(x)_i\}_{i=1}^{\infty}$の性質、例えば、どのような記号から成っていてそれぞれの記号がどのような規則で並んでいるかなど、にすべて埋め込まれていると考えることができる。このように力学系の相空間を記号列の空間に対応させて、相空間の上での変換を記号列に関するずらしとして考えるものを**記号力学系**（*symbolic dynamics*）という。記号力学系の考え方はきわめて一般的なものであり、アナログ-デジタルの対応関係を調べる上でもきわめて強力な手段を提供するのである。力学系の位相的な性質ばかりでなく、さらに測度論的性質を調べるために$\{T_t\}$に関して不変な確率測度を導入し、様々な情報を得ることができる。

以下の節では、記号力学系の実際を見るために、与えられた数論的変換を力学系（*dynamical system*）とみなし、その自然拡大（*natural extension*）を実現することで自己同型（*automorphic*）な力学系を構成することを考えよう。力学系の自然拡大は、以下に示すように、もとの力学系の双対系に結びついている。自己準同型写像（*endomorphism*）の自然拡大（や双対系）は常に存在することが知られているが、しかしながら、その具体的な構成を実現することは一般には困難である。その困難さは、本論文で見るように、形式的に定義された変換の自然拡大の定義域が、整合的に定義されなかったり、また数学的記述が困難な複雑な領域となるためである[1]。

[1]「力学系とフラクタル」に述べられる予定である。

2　力学系と記号力学系

力学系(X,T_t,μ)とは、不変測度μを付与された測度空間Xと、測度μを保存するような変換$T_t:X\to X$のつくる1パラメタ群との3つの組み合わせである[(1)]。ここで力学系の**不変測度**（*invariant measure*）とは、この力学系が定義されている空間Xの可測部分集合のなすσ-集合体$\mathfrak{F}$に属する全ての$B\in\mathfrak{F}$に対して

$$\mu(T^{-1}B)=\mu(B)$$

である測度μをいう。以下で考えるように、T_tがTで生成された離散的な群の場合には、この力学系を単に(X,T,μ)で表し、**離散力学系**という。点$x\in X$に関して$\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$または$\{T^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$を$x$の軌道という。以下、簡単のために離散力学系を考えよう。

また記号力学系$(\Omega_\sigma,\sigma,\nu_\sigma)$を次のように定義する[(2)]。有限（また可算無限）の記号をもつ集合をAとし、Aの要素からなる片側無限列$(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots)$の属する空間$A^{\mathrm{N}}=\prod_{n=1}^{\infty}A$、または両側無限列$(\cdots,\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\cdots)$の属する空間$A^{\mathrm{Z}}=\prod_{n=-\infty}^{\infty}A$を$\Omega$とする。これらの空間を$A$上の離散位相から得られるコンパクト距離空間として考える。実際、記号列$\omega\in\Omega$のn番目の記号を$\omega_n=(\omega)_n$と書くとき、$x,y\in A^{\mathrm{Z}}$に対して距離$p(x,y)$は

$$p(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{d(x_n,y_n)}{2^{|n|}}$$

で定義される。ここで$d(x_1,x_2)$は$x_1\neq x_2$のとき1、$x_1=x_2$のとき0である。Ω上の（**全**）**シフト**（*fullshift*）$\sigma:\Omega\to\Omega$を

$$(\sigma(\omega))_n=(\omega)_{n+1}$$

で定義する[(8)]。また、Ωの*shift*-不変な部分集合Ω_σに対するシフトを**部分シフト**（*subshift*）という。いまν_σをσによって不変な任意の測度とする。σがν_σを保つとはEをAのk個の直積の部分集合として$\nu_\sigma\{\omega:(\omega_n,\cdots,\omega_{n+k-1})\in E\}$が$n$に関係しないことと同値であ

る。この定義は記号列 ω のそれぞれの要素を確率変数値とする定常確率過程の定義に一致することに注意する[9]。こうして記号力学系 $(\Omega_{\sigma 1,\sigma},\nu_\sigma)$ が定義された。

いま自己準同型力学系、すなわち自己準同型写像（*endomorphism*）T による力学系 (X,T,μ) が与えられているとする。ここで X は $\mathbf{R}^n$ の部分集合であり、添字集合 A に応じた X の有限（または可算）分割 $\xi=\{X_a : X=\bigcup_{a\in A}X_a, X_{a_i}\cap X_{a_j}=\emptyset \text{ for } a_i\neq a_j\}$ に関して、

1. 不変測度 μ は、$\mathbf{R}^n$ 上の Lebesgue 測度 m に関して絶対連続である
2. 分割 ξ は生成的（*generator*）[10]

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\xi = \in \ (\mathrm{mod}\ m),$$

3.

$$m\Bigl(\bigcup_{a\in A}\partial X_a\Bigr)=0,$$

とする。このとき、集合 $X_{a_1,\cdots,a_n}=\{x\in X_{a1,\cdots,an} : T^{k-1}x\in X_{a_k} \text{ for } 1\leq k\leq n\}$ が空でない

$$\mu(X_{a1,\cdots,an})\neq\emptyset$$

ような添字集合 A の n 個の直積 A^n の要素である記号列 $(a_1,\cdots,a_n)$ が存在する。このような記号列を **T-許容的**という。無限列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ についても、任意の n に関して $(a_1,\cdots,a_n)$ が T-許容的であるときに無限列は T-許容的と定義される。

いま、A の片側無限直積空間 $A^{\mathrm{N}}=\prod_{n=1}^{\infty}A$ とその要素 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ に関するシフト σ、

$$(\sigma\omega)_i=\omega_{i+1}, \qquad i\geq 1$$

すなわち

$$\sigma(\omega_1,\omega_2,\cdots)=(\omega_2,\omega_3,\cdots)$$

を考える。全ての T-許容的記号列 V は σ-不変集合であるので、V 上のシフト σ は A^{N} 上の部分シフトである。さらに V 上の誘導測度 ν を

$$\nu[a_1,\cdots,a_n]=\mu(X_{a_1,\cdots,a_n})$$

で定義する。このとき記号力学系 (V,σ,ν) は自己準同型力学系 (X,T,μ) に**同型**（*isomorphic*）といい、これを (X,T,μ) の**記号表現**（*symbolic representation*）という。一方、力学系 (X,T,μ) を (V,σ,ν) の**実表現**（*real representation*）という。ここで，２つの力学系が同型であるとは、同型写像（*isomorphism*）$\Psi_V : V\to X$ が存在して、T と σ が可換

$$T\circ\Psi_V=\Psi_V\circ\sigma$$

すなわち次のダイヤグラム

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] & X \\ V \arrow[u, "\Psi_V"] \arrow[r, "\sigma"'] & V \arrow[u, "\Psi_V"'] \end{tikzcd}$$

が成立していることである。

従って、力学系に関して基本的な問題の１つは、適切な記号表現を得ることが出来るような分割 ξ の選択と同型写像 Ψ_V の決定である。

3 自然拡大と双対力学系

与えられた自己準同型力学系 (X,T,μ) に関してさらに２つの問題が考えられる。１つは与えられた力学系の自然拡大の実現の問題であり、もう１つは元の力学系に双対な力学系の実現の問題である[3][4]。

いま、(V,σ,ν) を自己準同型力学系 (X,T,μ) に同型な力学系（*shift endomorphism*）としよう。すなわち

$$\sigma(\omega_1,\omega_2,\cdots)=(\omega_2,\omega_3,\cdots)$$

であって、添字集合 A の任意の部分集合 $A_1,\cdots A_r\in A$ と $j_1,\cdots,j_r\geq 1$ に対して

$$\nu\{\omega\in V : \omega_{j_1+n}\in A_1,\cdots,\omega_{j_r+n}\in A_r\}$$

が n に依存しないものとする。

多くの問題では、片側無限列の空間 V を拡張して両側無限列の空間で考えた方が自然な場合が多い。次のようにして自己準同型力学系 (X,T,μ) に同型な記号力学系 (V,σ,ν) から自己同

型力学系、つまり自己同型写像（*automorphism*）力学系 $(\overline{V},\overline{\sigma},\overline{\nu})$ を定義しよう。

1. 記号空間 $\overline{V}$ として
$\overline{V}=\{(\cdots,a_{-1},a_0,a_1,\cdots)\in A^{\mathbf{Z}}:$
$(a_k,a_{k+1},\cdots)\in V$ for all $k\in\mathbf{Z}\}$
2. $\overline{V}$ 上のシフト（*shift automorphism*）$\overline{\sigma}$ として

$$(\overline{\sigma}\,\omega)_k=\omega_{k+1} \text{ for } \omega\in V,\ k\in\mathbf{Z}$$

3. ν から導かれる $\overline{V}$ 上の測度 $\overline{\nu}$ を
$\overline{\nu}[a_k,\cdots,a_{k+m-1}]=\nu\{\omega:\omega_1=a_k,\cdots,\omega_m=a_{k+m-1}$ for all $k\in\mathbf{Z}\}$；
測度 $\overline{\nu}$ は明らかに $\overline{\sigma}$-不変である。

こうして定義された自己同型力学系 $(\overline{V},\overline{\sigma},\overline{\nu})$ を *endomorphism* (V,σ,ν) の**自然拡大**（*natural extension*）と呼び、自己準同型力学系 (X,T,μ) の記号的自然拡大になっている。この記号的自然拡大の力学系を実表現した力学系、つまり元の自己準同型力学系 (X,T,μ) の自然拡大による力学系 $(\overline{X},\overline{T},\overline{\mu})$ は、

$$\overline{T}:(x,y)=(T(x),\ \Psi_x(y)) \quad \text{for } (x,y)\in\overline{X}$$

の形をとる。ここで、Ψ_x は各 $x\in X$ によって定まる写像である。

このように、与えられた自己準同型力学系の自然拡大によって得られる自己同型力学系 $(\overline{X},\overline{T},\overline{\mu})$ を具体的に構成することが問題となる。力学系の自然拡大は、自己準同型力学系からは一意に定まらないことに注意しよう。また自然拡大して得られた力学系と元の力学系との間のエルゴード的性質は変わらないことが知られている[6]。

さて、与えられた自己準同型力学系 (X,T,μ) から次のような性質を持つ力学系 (X^*,T^*,μ^*) を構成することを考えよう。

1. 空間 X^* は $\mathbf{R}^n$ の部分集合であり
2. 分割 $\xi^*=\{X_a^*:X^*=\bigcup_{a\in A}X_a^*\}$ は生成的
3.

$$m\Big(\bigcup_{a\in A}\partial X_a^*\Big)=0,$$

4. もし記号列 $(a_1,\cdots,a_n)$ が T-許容的であれば、$(a_n,\cdots,a_1)$ は T^*-許容的であり、逆に $(b_1,\cdots,b_n)$ が T^*-許容的であれば、$(b_n,\cdots,b_1)$ は T-許容的
5. 任意の T-許容的記号列 $(a_1,\cdots,a_n)$ について

$$\mu[a_1,\cdots,a_n]=\mu^*[a_n,\cdots,a_1]$$

この力学系 (X^*,T^*,μ^*) を自己準同型力学系 (X,T,μ) の**双対力学系**（*dual dynamical system*）という。

力学系 (X,T,μ) の $x\in X$ に関する軌道 $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ が時間に関して未来方向 $(n\geq 0)$ に記号列 $(a_1,a_2,\cdots)$ を生成していくとすれば、その双対系 (X^*,T^*,μ^*) は、元の力学系の生成した記号を逆に過去に遡って見ていくような記号列を生成するのである。つまり、双対力学系の時間発展は、元の力学系の発展を逆回しにしたものに相当している。このように、与えられた力学系から双対力学系を定めることが次の問題となる。

実は力学系の自然拡大と双対系との間には密接な関係があり、自己同型力学系 $(\overline{X},\overline{T},\overline{\mu})$ の逆変換より定まる力学系 $(\overline{X},\overline{T}^{-1},\overline{\mu})$ が

$$\overline{T}^{-1}:(x,y)=(\varphi_y(x),\ T^*(y)) \quad \text{for } (x,y)\in\overline{X}$$

の形で書けることがある。

以下の節では、簡単な力学系の例として、単位区間 $[0,1)$ 上の自己準同型写像であって数論的変換にとして知られている2つの変換、2進変換 f と連分数変換 g を考えてみよう。

4 ベルヌイ型力学系－2進変換

単位区間 $[0,1]$ 上の変換 $f:[0,1)\to[0,1)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{if}\quad 0\le x<\dfrac{1}{2}\\[2mm] 2x-1 & \text{if}\quad \dfrac{1}{2}\le x<1\end{cases}$$
$$=2x-[2x]$$

ここで，記号$[y]$は実数yの**ガウス部分**(Gauss part) であり、yを越えない最大の整数を表す。変換$([0,1),f)$の不変測度μは、単位区間上のBorel部分集合からなるσ-集合体$\mathfrak{F}$上のLebesgue測度mであることは容易にわかる。一般的に区間上の変換fに関する不変測度μがLebesgue測度に関して絶対連続であるとき、$\mu(x)$が変換fに関して不変であるため密度関数$\rho(x)$を持ち、1次元では$dm=dx$と書くとすれば、$d\mu(x)=\rho(x)dx$で表される。このとき密度関数$\rho(x)$は

$$\rho(x)=\sum_{y=f^{-1}(x)}\frac{\rho(y)}{\dfrac{d\rho(y)}{dy}}$$

を満足しなければならない。従ってこの単位区間上の変換fは、力学系$([0,1),f,dx)$を定める。

この変換fは単位区間上の点xの2進展開に密接に関係していることが次のようにして分かる。変換fに関して、$f^{n-1}(x)<\frac{1}{2}$に対して記号$a_n=0$を、$\frac{1}{2}\le f^{n-1}(x)$に対して記号$a_n=1$を割り当てるような次の対応

$$a_n(x)=\begin{cases}0 & \text{if}\quad f^{n-1}(x)\in[0,\dfrac{1}{2})\\[2mm] 1 & \text{if}\quad f^{n-1}(x)\in[\dfrac{1}{2},1)\end{cases}$$
$$=[2^n x]$$

を考える。要するに、変換fによって点xが次々と移されていくとき、その軌道を特徴づけるために、単位区間を2つに分割して、軌道の各点が$\left[0,\frac{1}{2}\right)$に属していれば記号0を、$\left[\frac{1}{2},1\right)$に属していれば記号1を割り当てていくのである。$n\ge 0$に対して変換$f$は

$$f^n(x)=2\cdot f^{n-1}(x)-a_n(x)$$

と書け、これを繰り返し適用すると

$$\begin{aligned}x&=\frac{a_1(x)}{2}+\frac{f(x)}{2}\\&=\frac{a_1(x)}{2}+\frac{a_2(x)}{2^2}+\frac{f^2(x)}{2^3}\\&=\frac{a_1(x)}{2}+\frac{a_2(x)}{2^2}+\frac{a_3(x)}{2^3}+\cdots\end{aligned}$$

となり、xの2進展開

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(x)}{2^n}$$

が得られ、$a_n(x)=f^{n-1}(x)$はxの2進展開のn番目の数字を与えている（もしxが2進有理数であれば、展開は有限で終わる方とする）。従ってxの2進小数点表示として$x=(a_1,a_2,a_3,\cdots)_2$と書けば、$f(x)$の2進表示は$f(x)=(a_2,a_3,a_4,\cdots)_2$であり、もとの記号列の1番目の記号$a_1$を取り去り、以下の桁の記号をそれぞれ左に1つずらせたもの、つまり0,1数列上のシフトになっていることに注意する。

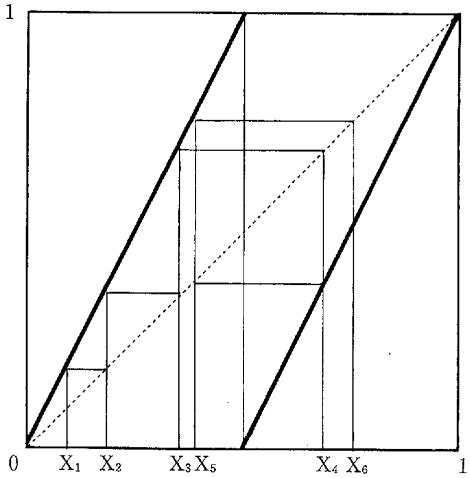


図2．2進変換による軌道

さらに $x \in [0,1)$ の2進展開で1桁目の数が0または1であるような集合はLebesgue測度で測るとそれぞれ $m\left(\left\{x : 0 \leq x < \frac{1}{2}\right\}\right) = \frac{1}{2}$ と $m\left(\left\{x : \frac{1}{2} \leq x < 1\right\}\right) = \frac{1}{2}$ である。同様に考えて、2進展開の任意の n 桁目が0または1であるような確率は全て $\frac{1}{2}$ である。

一方、2つの記号0と1のそれぞれに付与する確率 p_0 と p_1 として $\frac{1}{2}$ を選び、片側無限列の測度空間 $\Omega_{0,1} = \prod_{n=1}^{\infty} \binom{0}{1}$ を考えよう。このとき、σ-不変な測度 $\nu_{0,1}$ は積測度

$$\nu_{0,1}(\{x : a_n(x) = p_{a_n}, \cdots, a_{n+k-1}(x) = p_{a_{n+k-1}}\})$$
$$= \prod_{i=n}^{n+k-1} p_{a_i}$$

で与えられる。つまり、記号列 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ は、0か1の値をとる独立な確率変数の列と同一視出来る。

従って、$\Omega_{0,1}$ 上のシフト $\sigma_{0,1}$ をもつ力学系 $(\Omega_{0,1}, \sigma_{0,1}, \nu_{0,1})$ を考えると、同型対応 $\Psi_{0,1} : \Omega_{0,1} \to [0,1)$

$$\Psi_{0,1}(a_1, a_2, \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

によって2つの力学系 $([0,1), f, dx)$ と $(\Omega_{0,1}, \sigma_{0,1}, \nu_{0,1})$ が同型であることが示された。

この力学系の自然拡大を考えよう。記号力学系で考えるとその自然拡大は簡単に得られる。すなわち空間を両側無限列 $\overline{\Omega_{0,1}} = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \binom{0}{1}$、$\overline{\Omega_{0,1}}$ 上のシフトを $\overline{\sigma_{0,1}}$、不変測度を両側直積測度 $\overline{\nu_{0,1}}$ とした力学系 $(\overline{\Omega_{0,1}}, \overline{\sigma_{0,1}}, \overline{\nu_{0,1}})$ である。$\overline{\Omega_{0,1}}$ に属する両側無限列 $\omega = (\cdots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \cdots)$ に対するシフト $\overline{\sigma_{0,1}}$ は、シフトの起点を表すために記号•を使うと、

$$\omega = (\cdots, \omega_{-1}, \omega_0, \dot{\omega}_1, \omega_2, \cdots)$$

は、$\overline{\sigma_{0,1}}$ によりシフトされて

$$\overline{\sigma_{0,1}}\,\omega = (\cdots, \omega_0, \dot{\omega}_1, \omega_2, \omega_3, \cdots)$$

となり、•は右に移動する。

空間 $\overline{\Omega_{0,1}}$ に属する両側無限列の各記号0と1のそれぞれに付与する確率 p_0 と p_1 を $\frac{1}{2}$ としたとき、これを独立な確率変数の列とみなせることは前にも指摘した通りである。一般に両側無限列を独立確率変数列と見なしたときのシフトを**ベルヌイ型シフト**（*Bernoulli shift*）といい、この力学系を**Bernoulli力学系**という。この例では各記号に付与した確率をそれぞれ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ としているため、この *Bernoulli* 系を $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ と記す。つまり $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ は、表と裏のでる確率が $\frac{1}{2}$ であるコインを無限回投げる試行に対応しているのである。

力学系 $([0,1), f, dx)$ の自然拡大の実現を $(\overline{\Omega_{0,1}}, \overline{\sigma_{0,1}}, \overline{\nu_{0,1}})$ に同型な力学系として構成してみよう。任意の両側無限列 $\omega \in \overline{\Omega_{0,1}}$ を2つの2進数に対応させるような $\overline{\Omega_{0,1}}$ から単位正方形 $[0,1)^2$ への同型写像 $\overline{\Psi_{0,1}} : \overline{\Omega_{0,1}} \to [0,1)^2$ を

$$\overline{\Psi_{0,1}}(\omega) = \left(x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^n},\ \ y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_{-n}}{2^{n+1}}\right)$$

と定義する。さらに $\overline{\Psi_{0,1}}$ は $\overline{\Omega_{0,1}}$ 上の積測度 $\overline{\mu_{0,1}}$ を単位正方形上のLebesgue測度 $(dm = dxdy)$ にうつす。$([0,1), f, dx)$ を自然拡大した力学系 $([0,1)^2, \overline{f}, dxdy)$ は次の可換ダイヤグラムを満たしていなければならない：

$$\begin{tikzcd}
{[0,1)^2} \arrow[r, "\overline{f}"] & {[0,1)^2} \\
\overline{\Omega_{0,1}} \arrow[u, "\overline{\Psi_{0,1}}"] \arrow[r, "\overline{\sigma_{0,1}}"'] & \overline{\Omega_{0,1}} \arrow[u, "\overline{\Psi_{0,1}}"']
\end{tikzcd}$$

従って、求める単位正方形上の保測変換 $\overline{f} : [0,1)^2 \to [0,1)^2$ は、$\overline{f} = \overline{\Psi_{0,1}} \circ \overline{\sigma_{0,1}} \circ \overline{\Psi_{0,1}}^{-1}$ から求められ、$(x, y) \in [0,1)^2$ に対して

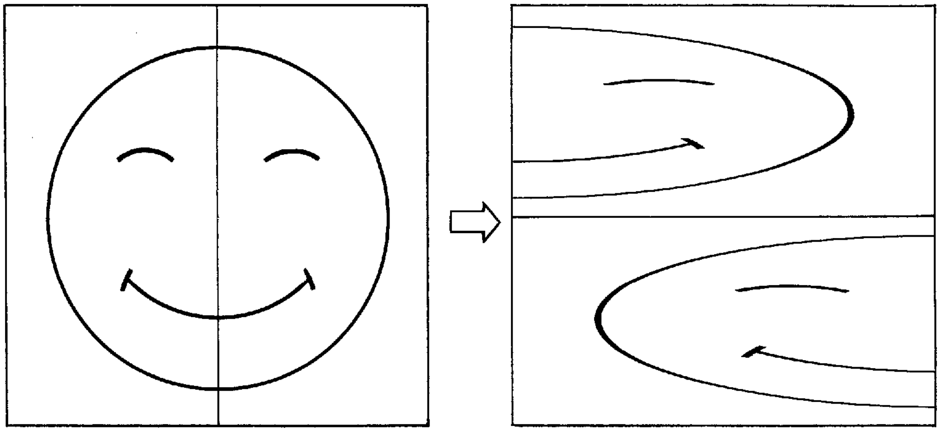


図３．パイこね変換

$$\overline{f}(x,y)=\left(2x-a_1(x),\ \frac{y+a_1(x)}{2}\right)$$
$$=\left(2x-[2x],\ \frac{y+[2x]}{2}\right)$$

で与えられる。記号列でみれば、$x=[a_1,a_2,\cdots]$, $y=[b_1,b_2,\cdots]$ と表すとき、

$$(\cdots,b_3,b_2,b_1,\dot{a}_1,a_2,a_3,\cdots)$$

は、$\overline{\sigma_{0,1}}$ によりシフトされ

$$(\cdots,b_2,b_1,a_1,\dot{a}_2,a_3,a_4,\cdots)$$

となる。

この変換を**パイこね変換**（*baker's transformation*）といい(7)、*Bernoulli* 力学系の典型であり、エルゴード理論やカオス理論では基本的変換である。実際、２つの部分 $V_1=\left\{(x,y):0\leq x<\frac{1}{2}\right\}$, $V_2=\left\{(x,y):\frac{1}{2}\leq x<1\right\}$ は $\overline{f}$ によってそれぞれ $U_1=\left\{(x,y):0\leq y<\frac{1}{2}\right\}$, $U_2=\left\{(x,y):\frac{1}{2}\leq y<1\right\}$ にうつされる。これは正方形を水平に２倍に薄く引き延ばし、半分に切って上に積み重ねるという変換で，V_1 は U_1 に V_2 は U_2 に移る。正方形 $[0,1)^2$ の分割 $\xi_{a_j}=\{\omega:\omega_j=a_j\}$ を考えると、$\xi_{-\infty}=\{\emptyset,[0,1)^2\}$, $\xi_{\infty}=\mathfrak{F}([0,1)^2)$ である。さらに $\overline{f}\,\xi_j=\xi_{j+1}$ より、Bernoulli 力学系のパイこね変換は K-系であることが分かる(1)。

一方、パイこね変換 $\overline{f}(x,y)=(x_1,y_1)$ を逆に解くと、$(x_1,y_1)\in[0,1)^2$ に対して

$$\overline{f}^{-1}(x_1,y_1)=\left(\frac{x_1+[2y_1]}{2},\ 2y_1-[2y_1]\right)$$

となる。従って、２進変換 f の双対系 f^* は、$y^*\in[0,1)$ に対して

$$f^*(y^*)=2y^*-[2y^*]$$

で与えられる。２進変換の双対系は、変換形やその定義域はもとの変換に関して同じ形になっている。

区間 $[0,1)$ に含まれる数のN進展開に関係した数論的変換 $f_N:[0,1)\to[0,1)$ を

$$f_N(x)=Nx-[Nx]$$

と定義して同様な議論を行うことができる。このときの自然拡大は、N個の記号 $\{0,1,\cdots,N$

$-1\}$ に関する *Beroulli* 力学系

$$\underbrace{B\left(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}\right)}_{N\text{個}} \text{に同型になる。}$$

5 連分数変換

実数区間 $[0,1)$ の数 x に関する変換 $g:[0,1) \to [0,1)$

$$g(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$$

を考えよう。$a_n(x)$ を

$$a_n(x)=\left[\frac{1}{g^{n-1}(x)}\right]$$

で定義する。この変換を（単純）**連分数変換**（*simple continued fraction*）といい、次のように実数 $x \in [0,1)$ の連分数展開に密接に関係している：

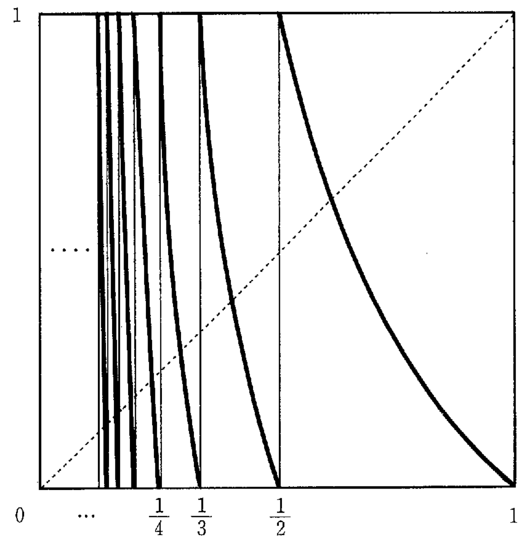


図4．連分数変換

$$\begin{aligned} x &= \cfrac{1}{a_1(x)+g(x)} \\ &= \cfrac{1}{a_1(x)+\cfrac{1}{a_2(x)+g^2(x)}} \\ &\ \vdots \\ &= \cfrac{1}{a_1(x)+\cfrac{1}{a_2(x)+\cfrac{1}{a_3(x)+\cfrac{1}{a_4(x)+\cfrac{1}{\ddots \, +\cfrac{1}{a_{n-1}(x)+\cfrac{1}{a_n(x)+g^n(x)}}}}}}} \end{aligned}$$

この変換 g に不変な区間 $[0,1)$ 上の測度 μ_g は

$$d\mu_g=\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{dx}{1+x}$$

であることが確かめられる。

連分数変換で定まる力学系 $([0,1), g, \mu_g)$ に同型な記号力学系 $(\Omega_\infty, \sigma_\infty, \mu_\infty)$ を考えよう。$x \in [0,$

1) について $a_1(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ は自然数全体の集合 $\mathbf{N}$、つまり全ての正整数を取りうることに注意すると、可算個の記号をもつ集合の片側無限の直積からなる空間 $\Omega_\infty=\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ 上のシフト σ_∞ が定義される。これは、単位区間を可算無限個の区間に分割し、x から出発した軌道の各点が区間 $\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}\right)$, $k\geq 2$ に属したときに記号 k を割り当てていって軌道を特徴づけるように記号力学系が構成されているのである。

実際、$\omega=(a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots)\in\Omega_\infty$ について同型対応 $\Psi_\infty:\Omega_\infty\to[0,1)$ を

$$\Psi_\infty(\omega)=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots}}}}$$

$$\equiv(a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots)$$

で定義すると、$(a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots)$ に対して変換 g を作用させると $g(a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots)=(a_2,a_3,a_4,a_5,\cdots)$ となる。つまり $\omega\in\Omega_\infty$ に対して

$$(\sigma_\infty\omega)_n=(\omega)_{n+1}$$

が導かれる。しかし、このシフトは *Bernoulli* シフトでない。何故なら同型対応 Ψ_∞ から導かれた不変測度 $\nu_\infty=\mu_g\circ\Psi_\infty$ は2進変換のときのように直積測度にはならないからである(5)。

力学系 $([0,1),g,\mu_g)$ の自然拡大 $([0,1)^2,\overline{g},\overline{\mu_g})$ を考えよう。2進変換の時と同様な議論によって、$\overline{\omega}\in\overline{\Omega_\infty}$ に対して

$$\overline{\omega}=(\cdots,a_{-1},a_0,\dot{a}_1,a_2,\cdots)$$

は、$\overline{\sigma_\infty}$ でシフトされて

$$\overline{\sigma_\infty\omega}=(\cdots,a_{-1},a_0,a_1,\dot{a}_2,\cdots)$$

となることから、単位正方形 $[0,1)^2$ 上の変換 $\overline{g}:[0,1)^2\to[0,1)^2$ は

$$\overline{g}(x,y)=\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right],\ \frac{1}{y+\left[\frac{1}{x}\right]}\right)$$

で定義される。実際、$\overline{\Omega_\infty}$ から $[0,1)^2$ への同型対応 $\overline{\Psi_\infty}$ を $\overline{\omega}=(\cdots,a_{-1},a_0,a_1,\cdots)\in\overline{\Omega}$ に対して、

$$\overline{\Psi_\infty}(\overline{\omega})=(x,y),$$

$$x=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots}}}},$$

$$y=\cfrac{1}{a_0+\cfrac{1}{a_{-1}+\cfrac{1}{a_{-2}+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

で定義すると、変換前の点 (x,y) は変換後に点 (x_1,y_1)

$$x_1=\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots}}},$$

$$y_1=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_0+\cfrac{1}{a_{-1}+\ddots}}}$$

に移る。

この単位正方形 $[0,1)^2$ 上の変換 $\overline{g}$ に関する不変測度 $\overline{\mu_g}$ は

$$d\overline{\mu_g}=\frac{1}{\log 2}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}$$

で与えられる。ここで

$$\int_0^1 d\overline{\mu_g}=d\mu_g$$

に注意しよう。つまり、もとの変換の不変測度は自然拡大に関する不変測度を拡大次元方向から射影して得られる。このようにして力学系

$([0,1), g, \mu_g)$ の自然拡大 $([0,1)^2, \overline{g}, \overline{\mu_g})$ が定義された。

一方、$([0,1)^2, \overline{g}, \overline{\mu_g})$ の逆変換を考えると、$(x_1, y_1) \in [0,1)^2$ に対して

$$\overline{g}^{-1}(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{x_1 + \left[\frac{1}{y_1}\right]},\ \frac{1}{y_1} - \left[\frac{1}{y_1}\right] \right)$$

となる。従って、その双対系は、その定義域が $[0,1)$ であるような

$$g^*(y^*) = \frac{1}{y^*} - \left[\frac{1}{y^*}\right]$$

で定義される変換で定まる力学系 $([0,1), g^*, d\mu_{g^*})$ となる $(\mu_g = \mu_{g^*})$。

このように2進変換や単純連分数変換に対する双対力学系は、定義域、変換形や不変測度がもとの力学系に同等なものになっている。しかし一般的には力学系の自然拡大は一意的に定まらず、その具体的な構成は困難であり、双対系も自明でない。

参考文献

(1) V. I. Arnold and A. Aves, PROBLÈMS ERGODIQUES DE LA MÉCANIQUE CLASSIQUE, Gauthier-Villars, Paris (1967) 吉田耕作訳「古典力学のエルゴード問題」, 吉岡書店 (1972)

(2) P. Billingsley, ERGODIC THEORY AND INFORMATION, Wiley and Sons (1965) 渡辺毅，十時東生訳「確率論とエントロピー」吉岡書店

(3) M. Mizutani and S. Ito, DYNAMICAL SYSTEMS ON DRAGON DOMAINS, Japan J. Appl. Math. 4 (1987) 23-46.

(4) M. Mizutani and S. Ito, A NEW CHARACTERIZATION OF DRAGON AND DYNAMICAL SYSTEM, Tokyo J. Math. 9 (1986) 487-504.

(5) J. Moser, STABLE AND RANDOM MOTIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS, Princeton Univ. (1973)

(6) V. A. Rohlin, EXACT ENDOMORPHISMS OF LEBESGUE SPACES, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 39 (1964) 1-36.

(7) N. Saito, BAKER'S TRANSFORMATION AND INVARIANT MEASURE, J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 374-378

(8) S. Smale, DIFFERENTIABLE DYNAMICAL SYSTEMS, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 747-817.

(9) I. P. Cornfeld, Ya. G. Sinai and S. V. Fomin, ERGODIC THEORY, Springer, New York (1982)

(10) 十時東生，エルゴード理論入門，共立出版 (1971)