高次形式の不変式について

小豆畑 隆*

$F(X)=F(x_1,\cdots,x_n)$ を体K上の n 変数の同次形式とし、$GL_n(K)$ をK上の n 次一般線形群とする。$T\in GL_n(K)$ による $F(X)$ への作用を $TF(X)=F(TX)$ と定義する $(X=(x_i)={}^t(x_1, \cdots, x_n))$。$F(X)$ の係数の多項式 $\triangle(F)$ が重さ d の不変式であるとは $\triangle(TF)=(\det T)^d\triangle(F)$ が成り立つときをいう。よく知られているように標数が 2 でない体上の 2 次形式の係数行列の行列式は重さ 2 の不変式である。特に判別式Dの二次体のイデアル $J=\mathbf{Z}\alpha+\mathbf{Z}\beta$ ($\mathbf{Z}$ は有理整数環) に対応する二元二次形式 $F(x, y)=N(\alpha x+\beta y)/N(J)=ax^2+2bxy+cy^2$ $(a, 2b, c\in\mathbf{Z})$ のとき $\triangle(F)=ac-b^2=-D/4$ が成り立つ ($N(J)$ は J のノルムを表す)。これは二次体と二元二次形式の対応に関する基本的な結果である。ここではこの結果を一般の代数体に拡張することを考える。そのために行列，行列式の概念を拡張して超行列，超行列式なるものを定義する。二次形式の係数行列と同じように d 次同次形式の係数超行列を定義すればその超行列式がこの同次形式の不変式となることを示す。

§1 超行列と超行列式

$V_1, V_2, \cdots, V_d$ を体K上の n 次元線形空間とし、$\mathrm{Hom}(\otimes_{i=1}^{d}V_i, K)=\mathrm{Hom}(V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_d, K)$ の元、すなわち V_i のテンソル積上の線形形式を考えよう。V_i の基底を $\{\mathbf{e}_j^{(i)}\}_{1\leq j\leq n}$ とすれば $\otimes_{i=1}^{d}V_i$ の基底は $\{\otimes_{i=1}^{d}\mathbf{e}_j^{(i)}\}$ である。$f\in\mathrm{Hom}(\otimes_{i=1}^{d}V_i, K)$ は n^d 個の値 $a_{i_1i_2\cdots i_d}=f(\mathbf{e}_{i_1}^{(1)}\otimes\mathbf{e}_{i_2}^{(2)}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_d}^{(d)})$ により決まる。n^d 個のKの元の順序付けられた組 $\tilde{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_d})$ を d 次元超行列と呼び，K成分の d 次元超行列全体の集合を $HM_n^{(d)}(K)$ で表そう。$\mathrm{Hom}(\otimes_{i=1}^{d}V_i, K)$ と $HM_n^{(d)}(K)$ には上に述べたように 1 対 1 の対応がつく。$\mathrm{Hom}(\otimes_{i=1}^{d}V_i, K)$ は

$$(f+g)(v)=f(v)+g(v),\quad (cf)(v)=c(f(v))\ (c\in K)$$

によりK上の線形空間になるから上の対応により $HM_n^{(d)}(K)$ も線形空間になる。以下 $V_i=K^n$, $\mathbf{e}_j^{(i)}=\mathbf{e}_j=(\delta_{jk})$ とする (δ_{jk} は Kronecker の δ)。$\mathbf{b}_k=(b_{i_k})\in K^n(1\leqq k\leqq d)$, $f\in\mathrm{Hom}(\otimes_{i=1}^{d}V_i, K)$, $\Phi(f)=(a_{i_1\cdots i_d})\in HM_n^{(d)}(K)$ に対して

$$f(\mathbf{b}_1\otimes\cdots\otimes\mathbf{b}_d)=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_d=1}^{n}a_{i_1\cdots i_d}b_{i_1}b_{i_2}\cdots b_{i_d}$$

となる。$\tilde{A}=(a_{i_1\cdots i_d})\in HM_n^{(d)}(K)$ と $\mathbf{b}\in K^n$ に対して $\tilde{A}\times_{(u)}\mathbf{b}$ を次で定義する。

$$\tilde{A}\times_{(u)}\mathbf{b}=(b_{i_1\cdots i_{d-1}})\in HM_n^{(d-1)}(K),\quad b_{i_1\cdots i_{d-1}}=\sum_{k=1}^{n}b_ka_{i_1\cdots i_{u-1}ki_u\cdots i_{d-1}}.$$

---

* 東京情報大学講師
1992年 9 月 1 日受理

これは $\Phi(f)=\tilde{A}=(a_{i_1\cdots i_d})\in HM_n^{(d)}(K)$ となる $f\in Hom(\otimes_{i=1}^{n}V_i,\ K)$ を $\mathbf{b}\in K^n$ に対して

$$g(\otimes_{i=1}^{d-1}\mathbf{b}_i)=f(\mathbf{b}_1\otimes\cdots\otimes\mathbf{b}_{u-1}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}_u\otimes\cdots\mathbf{b}_{d-1})$$

となる $g\in Hom(\otimes_{i=1}^{d-1}V_i,\ K)$ に写す演算に対応する。同様にして $(\tilde{A}\times_{(u)}\mathbf{b})\times_{(v)}\mathbf{c}$ を次で定義する。

$$(\tilde{A}\times_{(u)}\mathbf{b})\times_{(v)}\mathbf{c}=(c_{i_1\cdots i_{d-2}})\in HM_n^{(d-2)}(K),\quad c_{i_1\cdots i_{d-2}}=\textstyle\sum_{j=1}^{n}c_j(\sum_{k=1}^{n}b_k a_{i_1\cdots \underset{(u)}{k}\cdots \underset{(v)}{j}\cdots i_d}).$$

特に $HM_n^{(1)}(K)=K$ とみなす。

次にK上n次の行列環 $M_n(K)=HK_n^{(2)}(K)$ の作用を考える。$\tilde{A}\in HM_n^{(d)}(K)$, $T\in M_n(K)$ に対して $\tilde{A}\times_{(u)}T\in HM_n^{(d)}(K)$ を任意の $\mathbf{b}\in K^n$ に対して

$$(\tilde{A}\times_{(u)}T)\times_{(u)}\mathbf{b}=\tilde{A}\times_{(u)}(T\mathbf{b})$$

が成り立つように定義する。$\tilde{A}=(a_{i_1\cdots i_d})$, $T=(t_{jk})$, $\tilde{A}\times_{(u)}T=(c_{i_1\cdots i_d})$, $\mathbf{b}=(b_i)$ とおけば

$$\textstyle\sum_{h=1}^{n}b_h c_{i_1\cdots i_{u-1}hi_{u+1}\cdots i_d}=\sum_{h=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}t_{hk}b_k)a_{i_1\cdots i_{u-1}ki_{u+1}\cdots i_d}=\sum_{h=1}^{n}b_k(\sum_{k=1}^{n}t_{hk}a_{i_1\cdots i_{u-1}ki_{u+1}\cdots i_d})$$

より $c_{i_1\cdots i_{u-1}hi_{u+1}\cdots i_d}=\sum_{k=1}^{n}t_{hk}a_{i_1\cdots i_{u-1}ki_{u+1}\cdots i_d}$ を得る。

$d=2$ のとき $\tilde{A}=A\in M_n(K)$ とすれば $u=1$ のとき $c_{i_1i_2}=\sum t_{ki_1}a_{ki_2}$, $u=2$ のとき $c_{i_1i_2}=\sum t_{i_1k}a_{i_2k}$ より $\tilde{A}\times_{(1)}T={}^tTA$, $T\times_{(2)}\tilde{A}=AT$ を得る。つぎに $1\leqq u<v\leqq d$ となる組 $(u,\ v)$ に対して $\tilde{A}^{t(u,v)}=(c_{i_1\cdots i_d})$ を $c_{i_1\cdots i_u\cdots i_v\cdots i_d}=a_{i_1\cdots i_v\cdots i_u\cdots i_d}$ で定義する。次の命題は簡単に確かめることができる。

命題　$\tilde{A}\in HM_n^{(d)}(K)$, S, $T\in M_n(K)$, **b**, $\mathbf{c}\in K^n$ とするとき

(1)　$(\tilde{A}\times_{(u)}S)\times_{(u)}T=\tilde{A}\times_{(u)}ST$　　(2)　$(\tilde{A}\times_{(u)}S)\times_{(v)}T=(\tilde{A}\times_{(v)}T)\times_{(u)}S$

(3)　$(\tilde{A}\times_{(u)}\mathbf{b})\times_{(v)}\mathbf{c}=(\tilde{A}\times_{(v)}\mathbf{c})\times_{(u)}\mathbf{b}$　(4)　$(\tilde{A}\times_{(u)}S)^{t(uv)}=A^{t(uv)}\times_{(v)}S$

(5)　$(\tilde{A}\times_{(v)}S)^{t(uv)}=A^{t(uv)}\times_{(u)}S.$

この命題より $\tilde{A}\times_{(1)}T\times_{(2)}T\times_{(3)}\cdots\times_{(d)}T$ が well-defind である。これにより $M_n(K)\times\cdots\times M_n(K)$ (d 個の直積) が $HM_n^{(d)}(K)$ に作用していると考えることができる。$\tilde{A}=\Phi(f)\in HM^{(d)}(K)$ に対してこの記法を用いればつぎのようにかける。

$$f(\otimes_{i=1}^{d}\mathbf{b}_i)=\tilde{A}\times_{(1)}\mathbf{b}_1\times_{(2)}\mathbf{b}_2\times_{(3)}\cdots\times_{(d)}\mathbf{b}_d.$$

特に $T\in M_n(K)$, $\mathbf{b}\in K^n$ に対して

$$\tilde{A}\times_{(1)}T\times_{(2)}T\times_{(3)}\cdots\times_{(d)}T=\tilde{A}\cdot T,\quad \tilde{A}\times_{(1)}\mathbf{b}\times_{(2)}\mathbf{b}\times_{(3)}\cdots\times_{(d)}\mathbf{b}=\tilde{A}\cdot\mathbf{b}$$

と定義すれば $\tilde{A}\cdot(T\mathbf{b})=(\tilde{A}\cdot T)\cdot\mathbf{b}$ が成り立つ。

次に $\tilde{A}\in HM_n^{(d)}(K)$ に対して超行列式 $\|\tilde{A}\|=\mathrm{hydet}\tilde{A}$ を d が偶数のときに次の式で定義する。

$$\|\tilde{A}\|=\textstyle\sum_{\sigma_h\in S_n}sgn(\sigma_2\cdots\sigma_d)\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma_2(i)\cdots\sigma_d(i)}.$$

ここで $\sigma_2,\cdots,\sigma_d$ は n 次対称群 S_n をわたる。上式は次のようにもかける。

$$\|\tilde{A}\|=\textstyle\sum_{\tau_h\in S_n,\tau_u=1}sgn(\tau_1\cdots\tau_d)\prod_{i=1}^{n}a_{\tau_1(i)\cdots\tau_d(i)}.$$

実際 $\rho_h=\tau_h\tau_1^{-1}(2\leqq h\leqq d)$ とおけば $sgn(\rho_2\cdots\rho_d)=sgn(\tau_1)^{d-1}sgn(\tau_2\cdots\tau_d)=sgn(\tau_1\cdots\tau_d)$ である。このことから $\tilde{A}$ を転置しても超行列式の値は変わらない（d が奇数のときは成り立たない)。また $u_{ij}=a_{i\sigma_2(i)\cdots\sigma_{d-1}(i)j}$ とおけば次のようにもかける

$$\|\tilde{A}\|=\sum_{\sigma_h\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma_2\cdots\sigma_{d-1})\det(u_{ij}).$$

特に $d=2$ の場合は $\tilde{A}=A\in M_n(K)$ で $\|\tilde{A}\|$ はAの行列式に一致する。

定理 1　$\tilde{A}\in HM_n^{(d)}(K)$ で d は偶数とする。$T\in M_n(K)$ に対して
(1)　$\|\tilde{A}\times_{(u)}T\|=(\det T)\|\tilde{A}\|$　(2)　$\|\tilde{A}\cdot T\|=(\det T)^d\|\tilde{A}\|$　(3)　$\|c\tilde{A}\|=c^n\|\tilde{A}\|$.

証明　(3)は定義より直ちに，また(2)は(1)より導かれるから(1)を示せばよい。単位行列 $E=E_n$ と $E_{hk}=(e_{ij})=(\delta_{ih}\delta_{jk})$ に対して

$$E_{hk}(c)=E+cE_{hk}\ (h\neq k),\ \ E_k(c)=E+(c-1)E_{kk},\ \ E^{hk}=E-E_{hh}-E_{kk}+E_{hk}+E_{kh}\ (h\neq k)$$

とおく。$M_n(K)$ の任意の行列はこれら $E_{hk}(c)$, $E_k(c)$, E^{hk} の積でかけるから上の主張は次の補題から得られる。

補題
(1)　$\|\tilde{A}\times_{(u)}E^{hk}\|=-\|\tilde{A}\|$　(2)　$\|\tilde{A}\times_{(u)}E_k(c)\|=c\|\tilde{A}\|$　(3)　$\|\tilde{A}\times_{(u)}E_{hk}(c)\|=\|\tilde{A}\|$.

証明　転置しても同じであるから $u=d$ としてよい。

$$\tilde{A}_k^{(d)}=\tilde{A}\times_{(d)}e_k=(a_{i_1\cdots i_{d-1}k})\in HM_n^{(d-1)}(K)$$

とおけば記号的に $\tilde{A}=(\tilde{A}_1^{(d)},\ \cdots,\ \tilde{A}_n^{(d)})$, $\tilde{B}=(\tilde{B}_1^{(d)},\ \cdots,\ \tilde{B}_n^{(d)})$ とかける。$\tilde{B}_k^{(d)}=\tilde{A}_{\sigma(k)}^{(d)}(\sigma\in S_n,\ 1\leqq k\leqq n)$ ならば $\|\tilde{B}\|=\mathrm{sgn}(\sigma)\|\tilde{A}\|$, よって(1)を得る。$\tilde{B}_k^{(d)}=c\tilde{A}_k^{(d)}$, $\tilde{B}_i^{(d)}=\tilde{A}_i^{(d)}(1\leqq i\leqq n,\ i\neq k)$ ならば定義から $\|\tilde{B}\|=c\|\tilde{A}\|$, よって(2)を得る。$\tilde{A}_k^{(d)}=\tilde{B}_1^{(d)}+\tilde{B}_2^{(d)}$ のとき

$$\tilde{B}_1=(\tilde{A}_1^{(d)},\ \cdots,\ \tilde{A}_{k-1}^{(d)},\ \tilde{B}_1^{(d)},\ \tilde{A}_{k+1}^{(d)},\ \cdots,\ \tilde{A}_n^{(d)}),\ \tilde{B}_2=(\tilde{A}_1^{(d)},\ \cdots,\ \tilde{A}_{k-1}^{(d)},\ \tilde{B}_2^{(d)},\ \tilde{A}_{k+1}^{(d)},\ \cdots,\ \tilde{A}_n^{(d)})$$

とおけば $\tilde{B}_1+\tilde{B}_2=\tilde{A}$ となり定義より直ちに $\|\tilde{A}\|=\|\tilde{B}_1\|+\|\tilde{B}_2\|$ を得る。　$\tilde{A}_i^{(d)}=\tilde{A}_j^{(d)}(i\neq j)$ のとき $\|\tilde{A}\|=0$ であることに注意すれば $\tilde{B}_k^{(d)}=\tilde{A}_k^{(d)}+c\tilde{A}_j^{(d)}$, $\tilde{B}_i^{(d)}=\tilde{A}_i^{(d)}(1\leqq i\leqq n,\ i\neq k)$ のとき
$\|\tilde{A}\|=\|\tilde{B}\|$ となる。ゆえに(3)が成り立つ。

§2　対称超行列と高次形式

超行列 $\tilde{A}\in HM_n^{(d)}(K)$ が対称であるとは任意の置換 $\rho\in S_d$ に対して $a_{i_{\rho(1)}\cdots i_{\rho(d)}}=a_{i_1\cdots i_d}$ が成り立つときをいう。これは任意の組 $(u,\ v)$ に対して $\tilde{A}^{t(uv)}=\tilde{A}\ (1\leqq u<v\leqq d)$ が成り立つことと同値である。n変数で体Kに係数をもつ次数が d の同次形式を考えよう。

$$F(X)=\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=d\\ k_1,\cdots,k_n\geqq 0}}\frac{d\,!}{k_1\,!\cdots k_n\,!}c_{k_1\cdots k_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}=\sum_{1\leqq i_1,\cdots,i_d\leqq n}a_{i_1\cdots i_d}\,x_{i_1}\cdots x_{i_d}$$

とおき $x_{i_1}\cdots x_{i_d}=x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ ならば $a_{i_1\cdots i_d}=c_{k_1\cdots k_n}$ とすれば $\tilde{A}(F)=(a_{i_1\cdots i_d})\in HM_n^{(d)}(K)$ は対称超行列になる。$\tilde{A}(F)$ を$F(X)$ の係数超行列という。このとき，$X=(x_i)$ とおけば $F(X)=\tilde{A}(F)\cdot X$ とかける。K上n次の一般線形群，特殊線形群をそれぞれ $GL_n(K)$, $SL_n(K)$ とすれば冒頭でも述べたように $T\in GL_n(K)$ の$F(X)$ への作用を $TF(X)=F(TX)$ と定義できる。

$$\tilde{A}(TF)\cdot X=\tilde{A}(F(TX))=(\tilde{A}(F)\cdot T)\cdot X$$

より $\tilde{A}(TF)=\tilde{A}(F)\cdot T$ もまた対称超行列である。d が偶数のとき $\triangle(F)=\|\tilde{A}(F)\|$, d が奇数のとき F^2 の係数超行列を $\tilde{A}(F^2)$ とし $\triangle(F)=\|\tilde{A}(F^2)\|$ と定義する。次の定理 2 は定理 1 より直ちに導かれる。

定理 2　記号は上の通りとする。

(1)　$\triangle(TF)=(\det T)^d\triangle(F)$, $\triangle(cF)=c^n\triangle(F)$ (d が偶数のとき)

(2)　$\triangle(TF)=(\det T)^{2d}\triangle(F)$, $\triangle(cF)=c^{2n}\triangle(F)$ (d が奇数のとき)

すなわち $\triangle(F)$ は重さが d (d が偶数のとき), 2d（d が奇数のとき）の不変式である。特に $S\in SL_n(K)$ ならば $\triangle(SF)=\triangle(F)$ である。

計算例　2 変数の同次形式を $F(X)=\sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}c_kx_1^{d-k}x_2^k$ とおく。d が偶数ならば

$$\triangle(F)=\sum_{\sigma_i\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma_2\cdots\sigma_{d-1})\det(u_{ij}),\quad u_{ij}=c_{i\sigma_2(i)\cdots\sigma_{d-1}(i)j}\ (1\leqq i,\ j\leqq 2)$$

である。$\sigma_h=1$ または (1, 2) であるから, $\sigma_2,\cdots,\sigma_{d-1}$ のうち k 個が (1, 2) に等しく他は 1 とすれば

$\det(u_{ij})=\begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} \\ c_{d-k-1} & c_{d-k}\end{vmatrix}$　となる。

$$\begin{aligned}\triangle(F)&=\sum_{k=0}^{d-2}(-1)^k\binom{d-2}{k}(c_kc_{d-k}-c_{k+1}c_{d-k-1})=\sum_{k=0}^{d-2}(-1)^k\binom{d-2}{k}c_kc_{d-k}+\sum_{k=1}^{d-1}(-1)^k\binom{d-2}{k}c_kc_{d-k}\\&=\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k\binom{d-2}{k}c_kc_{d-k}=\sum_{k=1}^{d}(-1)^k\binom{d-1}{k-1}c_kc_{d-k}\end{aligned}$$

$$2\triangle(F)=c_0c_d+\sum_{k=1}^{d-1}(-1)^k\left\{\binom{d-1}{k}+\binom{d-1}{k-1}\right\}c_kc_{d-k}+c_dc_0=\sum_{k=0}^{d}(-1)^k\binom{d}{k}c_kc_{d-k}.$$

これは Schur[2] の中で “apolare” とよばれるものに一致する。d が奇数のときは

$$F(X)^2=\sum_{k=0}^{2d}\binom{2d}{k}c'_kx_1^{2d-k}x_2^k,\quad c'_k=\binom{2d}{k}^{-1}\sum_{i+j=k}\binom{d}{i}\binom{d}{j}c_ic_j$$

に対して

$$\begin{aligned}\triangle(F)&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2d}(-1)^k\binom{2d}{k}c'_kc'_{2d-k}=\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k\binom{2d}{k}c'_k\,c'_{2d-k}-\frac{1}{2}\binom{2d}{k}c'^2_d\\&=\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k\binom{2d}{k}^{-1}\left\{\sum_{i+j=k}\binom{d}{i}\binom{d}{j}c_ic_j\right\}\left\{\sum_{u+v=2d-k}\binom{d}{u}\binom{d}{v}c_uc_v\right\}-\frac{1}{2}\binom{2d}{d}^{-1}\left\{\sum_{i+j=d}\binom{d}{i}\binom{d}{j}c_ic_j\right\}.\end{aligned}$$

特に d=3 のとき上式より

$$\frac{10}{9}\triangle(F)=c_0^2c_3^2-6c_0c_1c_2c_3+4c_0c_2^3+4c_1^3c_3-3c_1^2c_2^2$$

となり, これは F(X) の判別式である。

§3　代数体のイデアルに付随する同次形式

n 次の代数体をとり $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ をその整数基, 有理数体 **Q** へのノルムを N とする。さらに $J=\mathbf{Z}\omega_1+\mathbf{Z}\omega_2+\cdots+\mathbf{Z}\omega_n$ をこの代数体のイデアルとする。このとき n 元 n 次同次形式 $F_1(X)$, $F_1^*(X)$ を次のようにおく。

$$F_1(X)=N(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)=\tilde{A}(F_1)\cdot X,\quad F_1^*(X)=N(\omega_1x_1+\cdots+\omega_nx_n)=\tilde{A}(F_1^*)\cdot X.$$

Z 上の n 次正方行列 U が存在して

$$(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)U$$

とかけるから $F_J^*(X)=F_1(UX)=UF_1(X)$ より $\tilde{A}(F_J^*)=\tilde{A}(F_1)\cdot U$ となる。$N(J)=|\det U|$ と定理 2 から

$$\triangle(F_J^*)=\begin{cases}N(J)^n\triangle(F_1) & (\text{n が偶数のとき})\\ N(J)^{2n}\triangle(F_1) & (\text{n が奇数のとき})\end{cases}$$

さらに $F_J(X)=F_J^*(X)/N(J)$ とおくと定理 2 より $\triangle(F_J)=\triangle(F_1)$ となる。容易にわかるように $\triangle(F_1)$ は整数基の取り方に依らない。$F_J(X)$ をイデアル J に付随する形式という。

定理 3 $F_J(X)$ を判別式が D で n 次の代数体のイデアル J に付随する形式とすれば次が成り立つ。

$$\triangle(F_J)=\begin{cases}\phi_0(n)D^{n/2} & (\text{n が偶数のとき})\\ \phi_1(n)D^n & (\text{n が奇数のとき})\end{cases}$$

ただし $\phi_0(n)$, $\phi_1(n)$ は n だけに関係する有理数である。

証明 $\triangle(F_1)$ の値を計算すれば十分である。$f_n(X)=x_1\cdots x_n$, $W=(\alpha_j^{(i)})$ とすれば，$F_1(X)=f_n(WX)=Wf(X)$, $(\det W)^2=D$ であるから

$$\triangle(F_1)=\begin{cases}D^{n/2}\triangle(f_n) & (\text{n が偶数のとき})\\ D^n\triangle(f_n) & (\text{n が奇数のとき})\end{cases}$$

ここに $\phi_0(n)=\triangle(f_n)=\|\tilde{A}(f_n)\|$, $\phi_1(_n)=\triangle(f_n)=\|\tilde{A}(f_n^2)\|$ である。

$\phi_0(n)$ (n が偶数), $\phi_1(n)$ (n が奇数) の値をいくつか計算してみよう。まず n が偶数の場合 $\tilde{A}(f)=(a_{i_1\cdots i_n})$ の成分は次で与えられる。

$$a_{i_1\cdots i_n}=\begin{cases}1/n! & \{i_1,\ \cdots,\ i_n\}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}\text{ のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

よって $\prod_{i=1}^n a_{i\sigma_2(i)\cdots\sigma_n(i)}\neq 0$ となるのは集合として

$$\{i,\ \sigma_2(i),\ \cdots,\ \sigma_n(i)\}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

が成り立つことである。これは次の行列 L がラテン方陣になることと同値である。

$$L=L(\sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n)=\begin{bmatrix}1 & \sigma_2(1) & \sigma_3(1) & \cdots & \sigma_n(1)\\ 2 & \sigma_2(2) & \sigma_3(2) & \cdots & \sigma_n(2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & \sigma_2(n) & \sigma_3(n) & \cdots & \sigma_n(n)\end{bmatrix}$$

L の符号を $\mathrm{sgn}(L)=\mathrm{sgn}(\sigma_2\cdots\sigma_n)$ で定義し，また $\sigma_j(1)=j$ となるラテン方陣 $L'=L(\sigma_2',\ \cdots,\ \sigma_n')$ を既約ラテン方陣と呼ぶことにすると

$$\phi_0(n)=(n!)^{-n}\sum\mathrm{sgn}(L)=(n-1)!(n!)^{-n}\sum\mathrm{sgn}(L')$$

ここで L, L' は上述のラテン方陣，既約ラテン方陣をわたる。

$n=2$ のとき $L=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ がただ 1 つの既約ラテン方陣で $\mathrm{sgn}(L)=-1$, よって $\phi_0(2)=-1/4$ となり，冒頭で述べた結果に一致する。$n=4$ のとき既約ラテン方陣は次の 4 つがある。

$$\begin{bmatrix} 1&2&3&4\\ 2&3&4&1\\ 3&4&1&2\\ 4&1&2&3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&2&3&4\\ 2&4&1&3\\ 3&1&4&2\\ 4&3&2&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&2&3&4\\ 2&1&4&3\\ 3&4&2&1\\ 4&3&1&2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&2&3&4\\ 2&1&4&3\\ 3&4&1&2\\ 4&3&2&1 \end{bmatrix}$$

これらの符号はすべて1であるから $\phi_0(4)=4\cdot 3!/(4!)^4=1/24^3$.
nが奇数の場合 $\tilde{A}(f_n^2)=(a_{i_1\cdots i_{2n}})$ の成分は次で与えられる。

$$a_{i_1\cdots i_{2n}}=\begin{cases} 2^n/(2n)! & \{i_1,\ \cdots,\ i_{2n}\}=\{1,1,2,2,\cdots,n,n\} \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

よって $\prod_{i=1}^{2n} a_{i\sigma_2(i)\cdots\sigma_{2n}(i)}\neq 0$ となるのは次の行列Lの各行が同じ数字をちょうど2個ずつ含む場合である。

$$L=L(\sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_{2n})=\begin{bmatrix} 1 & \sigma_2(1) & \sigma_3(1) & \cdots & \sigma_{2n}(1)\\ 2 & \sigma_2(2) & \sigma_3(2) & \cdots & \sigma_{2n}(2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & \sigma_2(n) & \sigma_3(n) & \cdots & \sigma_{2n}(n) \end{bmatrix}$$

このとき $\mathrm{sgn}(L)=\mathrm{sgn}(\sigma_2,\cdots,\sigma_{2n})$ と定義すれば $\phi_1(n)=\left(\dfrac{2^n}{(2n)!}\right)^n\sum\mathrm{sgn}(L)$ となる。明らかに $\phi_1(1)=1$ である。$n=3$ のとき上のような行列Lは次の2つである。

$$L_1=\begin{bmatrix} 1&1&2&2&3&3\\ 2&2&3&3&1&1\\ 3&3&1&1&2&2 \end{bmatrix} \quad L_2=\begin{bmatrix} 1&1&2&3&2&3\\ 2&3&1&2&3&1\\ 3&2&3&1&1&2 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{sgn}(L_1)=1,\ \mathrm{sgn}(L_2)=-1$ より

$$\phi_1(3)=\left(\frac{8}{6!}\right)^3\left(\frac{5!}{2!2!}-5!\right)=-1/90^2.$$

大きなnについて $\phi_0(n)$, $\phi_1(n)$ を計算するのは困難でこれらが0にならないかどうかもよく解らない。

§4　超固有値と超トレース

$O_n(K)$ をK上のn次直交群，$g_n(X)=x_1^2+\cdots+x_n^2$, $\tilde{E}=\tilde{E}_n^{(2d)}=\Phi(g_n^d)\in HM_n^{(2d)}(K)$, $\tilde{A}\in HM_n^{(2d)}(K)$ に対して $f_A(\lambda)=\|\tilde{A}-\lambda\tilde{E}\|$ を $\tilde{A}$ の超固有多項式と呼ぶ。$T\in O_n(K)$ に対して $Tg_n=g_n$ であるから $\tilde{E}\cdot T=\tilde{E}$ である。よって $\|(\tilde{A}-\lambda\tilde{E})\cdot T\|=\|\tilde{A}-\lambda\tilde{E}\|$ より $\tilde{B}=\tilde{A}\cdot T$ ならば $f_B(\lambda)=f_A(\lambda)$ である。$\delta_n(d)=\|\tilde{E}_n^{(2d)}\|\neq 0$ と仮定すれば

$$f_A(\lambda)=(-1)^n\delta_n(d)\lambda^n+(-1)^{n-1}t_1\lambda^{n-1}+\cdots-t_{n-1}\lambda+\|\tilde{A}\|=0$$

はn個の解 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ を持ち次が成り立つ。

$$\delta_n(d)\lambda_1\cdots\lambda_n=\|\tilde{A}\|,\quad \delta_n(d)(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)=t_1.$$

$\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ を超固有値，t_1 を超トレースという。

定理 4 $\delta_n(d)\neq 0$ ならば超固有値，超トレースは $O_n(K)$ の作用に関する不変式である。すなわち $T\in O_n(K)$ で $F(X)$ が n 変数の同次形式ならば $F(X)$ と $F(TX)$ は同じ超固有値，超トレースを持つ。

2 変数の 2d 次同次多項式の超トレースを計算してみよう。

$$F(X)=\sum_{k=0}^{2d}\binom{2d}{k}c_k x_1^{2d-k}x_2^k,\quad e_k=\binom{2d}{2k}^{-1}\binom{d}{k}$$

とおけば

$$g_2(x)^d=\sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}x_1^{2d-2k}x_2^{2k}=\sum_{k=0}^{d}\binom{2d}{2k}e_k x_1^{2d-2k}x_2^{2k}$$

$$\delta_2(d)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d}\binom{2d}{2k}e_k e_{d-k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d}\binom{2d}{2k}e_k^2\neq 0.$$

よって $F(X)$ の超固有多項式は

$$f(\lambda)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d}\binom{2d}{2k}(c_{2k}-\lambda e_k)(c_{2d-2k}-\lambda e_k)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d-1}\binom{2d}{2k+1}c_{2k+1}c_{2d-2k-1}$$

$$=\delta_2(d)\lambda^2-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{d}\binom{2d}{2k}(c_{2k}+c_{2d-2k})\right)\lambda+\triangle(F)=\delta_2(d)\lambda^2-\left(\sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}c_{2k}\right)\lambda+\triangle(F)$$

となるから $F(X)$ の超トレースは $\sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}c_{2k}$ である。

参考文献

[1] H. Cohn, Advanced numder theory, Dover Publ. Inc., 1980.
[2] I. Schur, Vorlesungen uber Invariententheorie, Springer Verlag, 1968.
[3] 森川寿　不変式論　紀伊国屋書店　1977.