

分合流する河川における不定流解析

郡 義 和*

まえがき

流れの状態が時間とともに変化していく現象、すなわち不定流を解析するには、その現象を表わす微分方程式（連統方程式、運動方程式）を解けばよい。連統方程式と運動方程式とは連立1階偏微分方程式を形づくるが、これらを1つにまとめると非線形な2階の双曲形方程式となるために、直接解くことは非常な困難をともなう。そこで近似的な方法として、時間的にも空間的にも連続な現象を離散量として差分化し、数値的に解く方法が考えられる。差分形式としていろいろな方法が提案されているが、大きく分けると陽な方法と陰な方法とがあり、前者は未知の変数が既知の変数でなり立っている式を用いる方法で、後者は未知の変数を求める式中に未知の変数があり、繰返し計算によって値を求める方法である。しかし、それぞれの方法は計算の安定性、近似精度、計

算の収束性、演算速度などの面で長所、短所があり、いまだ確たる方法はないようである。したがって、どんな差分法を用いるかはそれぞれの目的の精度に見合った取扱いの容易なものを選ぶということによいと思われる。

ここで用いるのは、Leap Frog Method（蛙飛び法）¹⁾といわれる差分法である。この方法は、1次中央差分を用いた手法であり、微分項をTaylor級数展開の3次以上の項を省略して差分化したものである。式を取扱い、境界条件の設定、分合流の取扱いなどは容易であり、河川のような大規模の水路に適用する場合、実用的には十分な精度が得られるといわれている。²⁾著者は、蛙飛び法により支川から洪水が遊水池に流入し、運河を通して本川へ流出する場合および分流している河川において、一方の派川が水門操作を行う場合について解析し、その有用性を検討した。

1. 基礎方程式

河川の不定流の方程式は次のように表わせる。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{gA} q - i + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{n^2 |v| v}{R^{4/3}} = 0 \quad (\text{運動の式}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (\text{連統の式}) \quad (2)$$

ここに、

v : 平均流速 = Q/A (m/sec)

h : 水路底に直角に測った水深 (m)

g : 重力加速度 (m/sec²)

A : 流水断面積 (m²)

q : 横流入量 (単位長さ当たり) (m³/sec/m)

i : 河床勾配

n : マニングの粗度係数

R : 径深 (m)

Q : 流量 (m³/sec)

t : 時間 (sec)

x : 距離 (下流方向に正) (m)

(1)式を Q について表わすと次式となる。

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{gA^2} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{Q}{gA^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{Q}{gA^2} q - i + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{n^2 |Q| Q}{A^2 R^{4/3}} = 0 \quad (1')$$

また、(1')式は

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = B \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = B \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{\partial A}{\partial x} = B \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = B \left(i + \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ -i + \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = q - \frac{\partial A}{\partial t} \end{cases} \quad (H: \text{水位(m)}, B: \text{河幅(m)})$$

*河川研究室主任研究員

により次のようになる。

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2QB}{gA^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{2Qq}{gA^2} - \frac{Q^2B}{gA^3} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{n^2|Q|Q}{A^2R^{4/3}} = 0 \quad (3)$$

2. 蛙 飛 び 法

2-1 単一水路の場合

n を時間方向格子点, j を距離方向格子点, Δt , Δx をそれぞれ時間, 距離方向格子幅として, (3)式を (n, j) 点について差分化すると左辺第1項から順次次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_j &= \left(\frac{1}{gA} \right)_{j-1}^{j+1} \cdot \frac{n+1Q_j - n-1Q_j}{2 \cdot \Delta t} \quad \text{..... (中央差分)} \\ \left(\frac{2 \cdot Q \cdot B}{g \cdot A^2} \right)_j &= \left(\frac{B}{g \cdot A^2} \right)_{j-1}^{j+1} \cdot (n+1Q_j + n-1Q_j) \\ \left(-\frac{\partial H}{\partial t} \right)_j &= \frac{1}{4 \cdot \Delta t} \{ (nH_{j-1} - n-2H_{j-1}) + (nH_{j+1} - n-2H_{j+1}) \} \quad \text{..... (後方差分)} \\ \left(\frac{2 \cdot Q \cdot q}{g \cdot A^2} \right)_j &= \left(\frac{q}{g \cdot A^2} \right)_{j-1}^{j+1} \cdot (n-1Q_j + n+1Q_j) \\ \left(\frac{Q^2B}{g \cdot A^3} \frac{\partial h}{\partial x} \right)_j &= n-1Q_j^2 \cdot \left(\frac{B}{g \cdot A^3} \right)_{j-1}^{j+1} \cdot \left(\frac{n h_{j+1} - n h_{j-1}}{2 \cdot \Delta x} \right) \quad \text{..... (中央差分)} \\ \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_j &= \frac{nH_{j+1} - nH_{j-1}}{2 \cdot \Delta x} \quad \text{..... (中央差分)} \\ \left(\frac{n^2 \cdot |Q|Q}{A^2 \cdot R^{4/3}} \right)_j &= \left(\frac{n^2}{A^2 \cdot R^{4/3}} \right)_{j-1}^{j+1} \cdot n+1Q_j \cdot |n-1Q_j| \end{aligned}$$

ここに, 添字記号の $\left(\right)_{j-1}^{j+1}$ は, 断面 $j+1$ と $j-1$ における水理量の平均値を表わす。

したがって, 各項を(3)式に代入し $n+1Q_j$ を求める式に整理すると次式を得る。

$$n+1Q_j = \frac{nH_{j-1} - nH_{j+1} + n-1Q_j \cdot \left\{ \left(\frac{1}{gA} \right)_{j-1}^{j+1} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + T + P \right\} + Z \cdot 2 \cdot \Delta x}{\left(\frac{1}{gA} \right)_{j-1}^{j+1} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} - T - 2 \cdot \Delta x \cdot P + \left(\frac{2}{K^2} \right)_{j-1}^{j+1} \cdot \Delta x |n-1Q_j|} \quad (4)$$

ここに,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Delta x}{4 \cdot \Delta t} \cdot \left(\frac{2 \cdot B}{g \cdot A^2} \right)_{j-1}^{j+1} \cdot \{ (nH_{j-1} - nH_{j-1}) + (nH_{j+1} - n-2H_{j+1}) \} \\ P &= - \left(\frac{q}{gA} \right)_{j-1}^{j+1} \cdot 2 \cdot \Delta x \\ Z &= n-1Q_j^2 \cdot \left(\frac{B}{g \cdot A^3} \right)_{j-1}^{j+1} \cdot \left(\frac{n h_{j+1} - n h_{j-1}}{2 \cdot \Delta x} \right) \\ K^2 &= \frac{A^2 \cdot R^{4/3}}{n^2} \end{aligned}$$

蛙飛び法は, 水位を求める地点と流量を求める地点を交互に設定するため, 水位を求める際には(2)式を (n, j) 点を1つずつずらした $(n+1, j-1)$ 点で差分化を行う。(2)式の各項は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{j-1} &= \left(B \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{j-1} = n+1B_{j-1} \cdot \frac{n+2H_{j-1} - nH_{j-1}}{2 \cdot \Delta t} \quad \text{..... (中央差分)} \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{j-1} &= \frac{n+1Q_j - n+1Q_{j-2}}{2 \cdot \Delta x} \quad \text{..... (中央差分)} \end{aligned}$$

各項を(2)式に代入し, $n+2H_{j-1}$ を求める式に整理すると次式を得る。

$$n+2H_{j-1} = \frac{\Delta t}{n+1B_{j-1} \cdot \Delta x} \left(n+1Q_{j-2} - n+1Q_j + 2 \cdot \Delta x \cdot n+1Q_{j-1} \right) + nH_{j-1} \quad (5)$$

(4), (5)の両式は図-1のようにして演算が進む。

2-2 合流点での差分法

合流の模式図を図-2に示す。運動方程式は(3)式を簡略した形にして用いる。

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{|Q|Q}{K^2} = 0 \quad (6)$$

各々の水路において(6)式を差分化すると,

本川上流..... (n, jU) 点で $\frac{\partial H}{\partial x}$ を後方差分, $\frac{\partial Q}{\partial t}$ を中央差分

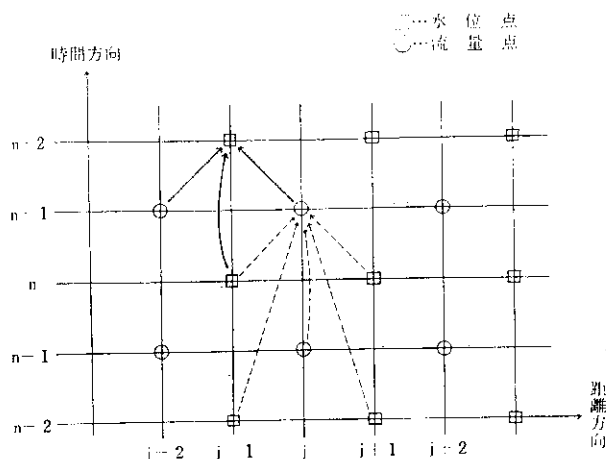


図-1 蛙飛び法の差分スキーム

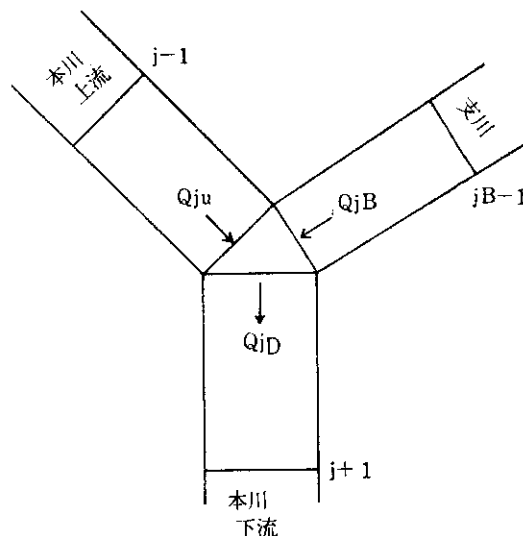


図-2 合流の模式図

$$\frac{nH_{jU} - nH_{j-1}}{\Delta x} + \left(\frac{1}{gA}\right)_{j-1} \cdot \frac{n+1Q_{jU} - n-1Q_{jU}}{2 \cdot \Delta t} + \frac{|n-1Q_{jU}|n+1Q_{jU}}{n(K^2)_{j-1}} = 0 \quad (7)$$

本川下流………(n, jD)点で $\frac{\partial H}{\partial x}$ を前方差分, $\frac{\partial Q}{\partial t}$ を中央差分

$$\frac{nH_{j+1} - nH_{jD}}{\Delta x} + \left(\frac{1}{gA}\right)_{j+1} \cdot \frac{n+1Q_{jD} - n-1Q_{jD}}{2 \cdot \Delta t} + \frac{|n-1Q_{jD}|n+1Q_{jD}}{n(K^2)_{j+1}} = 0 \quad (8)$$

支川上流………(n, jB)点で $\frac{\partial H}{\partial x}$ を後方差分, $\frac{\partial Q}{\partial t}$ を中央差分

$$\frac{nH_{jB} - nH_{jB-1}}{\Delta x} + \left(\frac{1}{gA}\right)_{jB-1} \cdot \frac{n+1Q_{jB} - n-1Q_{jB}}{2 \cdot \Delta t} + \frac{|n-1Q_{jB}|n+1Q_{jB}}{n(K^2)_{jB-1}} = 0 \quad (9)$$

以上の式の中に、未知数は合流点の水位3個と流量3個、合計6個あるので条件式はあと3つ必要である。水位と流量に対する条件式を次に示す。

$$nH_{jU} = nH_{jB} = nH_{jD} \quad (10)$$

$$n+1Q_{jU} + n+1Q_{jB} = n+1Q_{jD} \quad (11)$$

(7), (8), (9), (10), (11)を連立に解き最終的に次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} n+1Q_{jU} &= -\frac{M \cdot ED + L \cdot GB}{ED \cdot EU + GB(EU + ED)} \\ n+1Q_{jB} &= \left(EU \cdot n+1Q_{jU} + M\right) \frac{1}{GB} \\ n+1Q_{jD} &= n+1Q_{jU} + n+1Q_{jB} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} EU &= \left(\frac{1}{2g \cdot \Delta t \cdot A}\right)_{j-1} + \left(\frac{1}{K^2}\right)_{j-1} \cdot |n-1Q_{jU}| \\ ED &= \left(\frac{1}{2g \cdot \Delta t \cdot A}\right)_{j+1} + \left(\frac{1}{K^2}\right)_{j+1} \cdot |n-1Q_{jD}| \\ GB &= \left(\frac{1}{2g \cdot \Delta t \cdot A}\right)_{jB-1} + \left(\frac{1}{K^2}\right)_{jB-1} \cdot |n-1Q_{jB}| \\ L &= \frac{nH_{j+1} - nH_{j-1}}{\Delta x} - \left\{ \left(\frac{1}{2g \cdot \Delta t \cdot A}\right)_{j-1} \cdot n-1Q_{jU} + \left(\frac{1}{2g \cdot \Delta t \cdot A}\right)_{j+1} \cdot n-1Q_{jD} \right\} \\ M &= \frac{nH_{jB-1} - nH_{j-1}}{\Delta x} - \left\{ \left(\frac{1}{2g \cdot \Delta t \cdot A}\right)_{j-1} \cdot n-1Q_{jU} - \left(\frac{1}{2g \cdot \Delta t \cdot A}\right)_{j-1} \cdot n-1Q_{jB} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

2-3 分流点での差分法

xを下流方向に正とするために、分流点の差分法は合流点の式の一部の正負を変えればよいだけである。図-3を参照すると(2), (3)式を以下のように変える。

a) 添字の(jB-1)を(jB+1)にする。

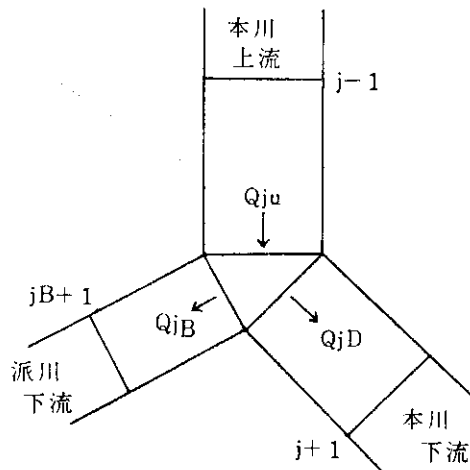


図-3 分流の模式図

b) Q_{jB} を $-Q_{jB}$ にする。

2-4 不定流計算フローチャート

不定流計算のフローチャートを図-4に示す。

3. 計算例

3-1 支川が遊水池に流入し、運河で本川へ通じている場合 (CASE 1)

図-5が計算するモデル図である。

a. 河道条件

- ・ 水位を求める地点にはH, 流量を求める地点にはQの記号をつけてある。
- ・ 遊水池の河道断面は、幅が約200~300mの一般断面としているので、流積、径深は水深の5次式で表わしている。
- ・ 水位点H11の断面は、幅10mの矩形断面として断面急縮部を形づくっている。
- ・ 流入する支川は幅100mの矩形断面、遊水池と本川をつなぐ水路は幅50mの矩形断面とそれぞれ設定した。
- ・ 河床勾配は支川 $\dots 1/2000$, 遊水池と本川をつなぐ水路 $\dots 1/5000$ とした。遊水池の河床縦断面は図-6のとおりである。
- ・ マニングの粗度係数は, $n=0.035$ とした。

b. 計算条件

- ・ $\Delta x, \Delta t$ は、解の安定性の上からVon-Neumanの条件を満たすように決定した。

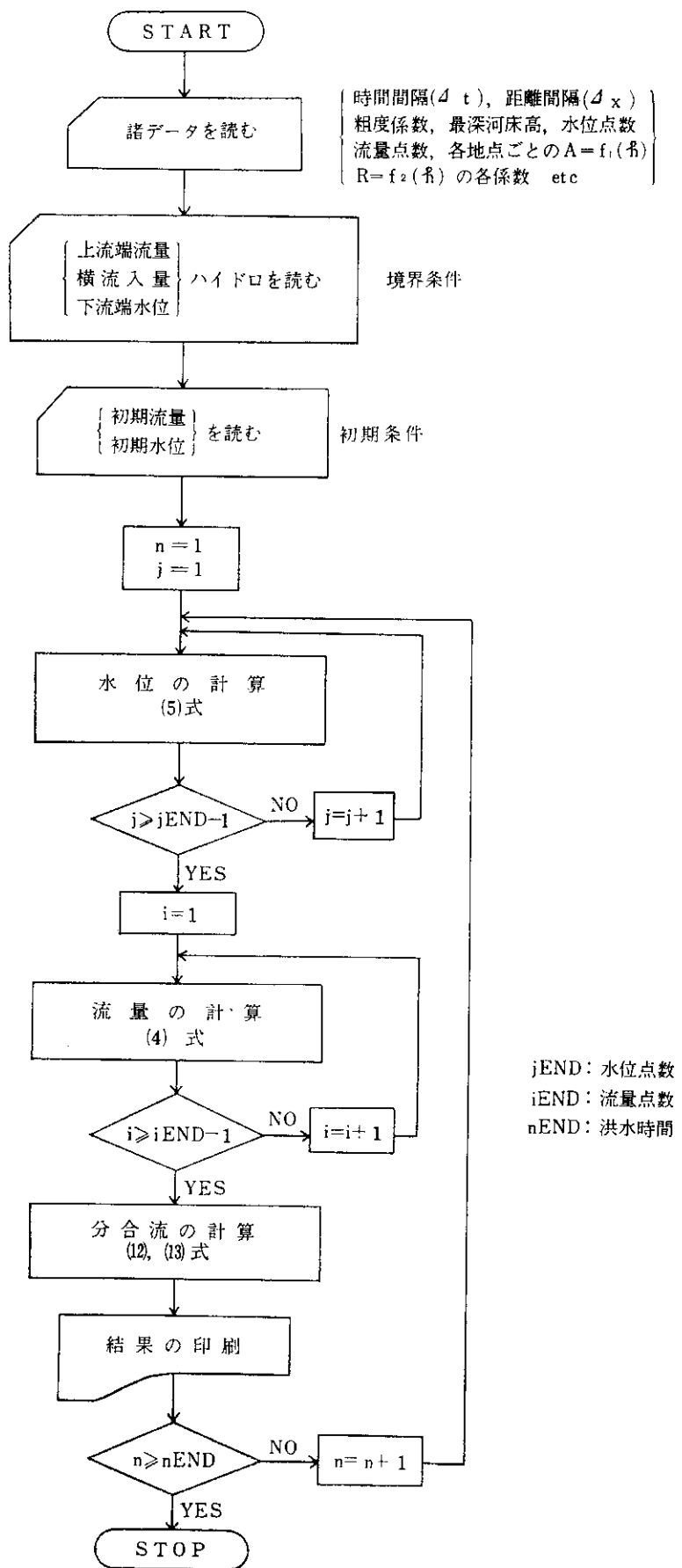


図-4 不定流計算フローチャート

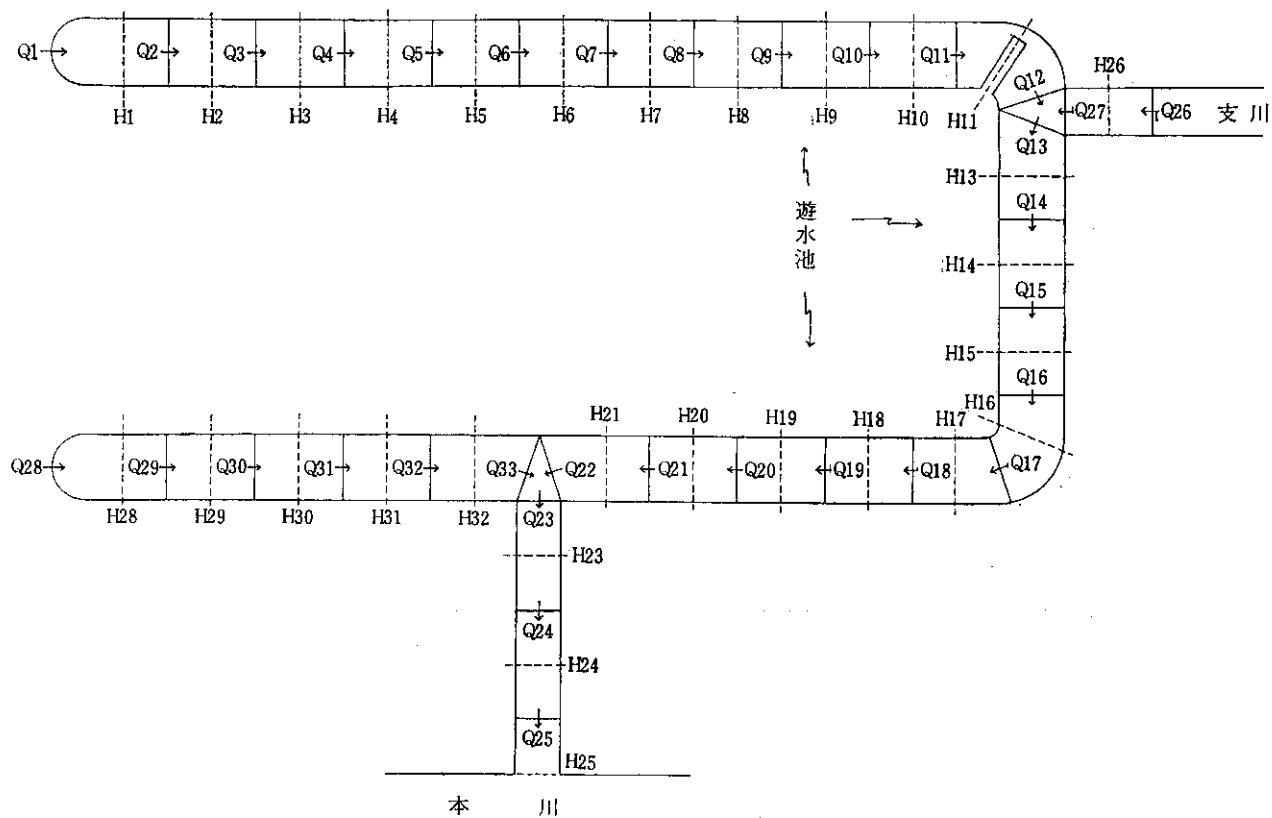


図-5 計算モデル図 (CASE 1)

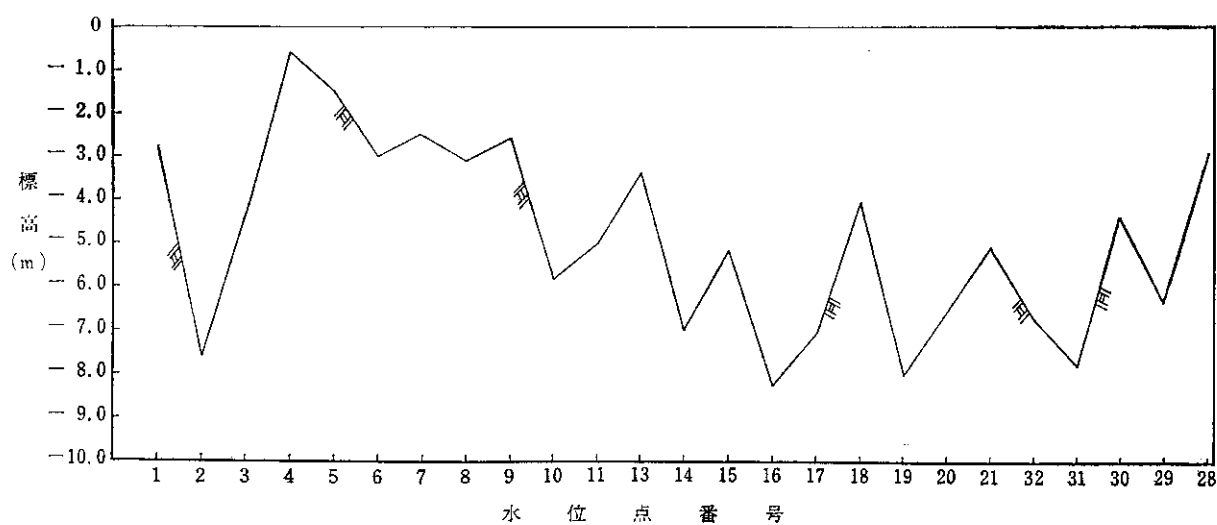


図-6 遊水池河床縦断面図 (CASE 1)

- 。 区間距離 $4x$ (水位点と流量点間の距離) は、遊水池と本川をつなぐ水路では500mとし、他の $4x$ は400mとした。
- 。 計算間隔 $4t$ は30秒とした。

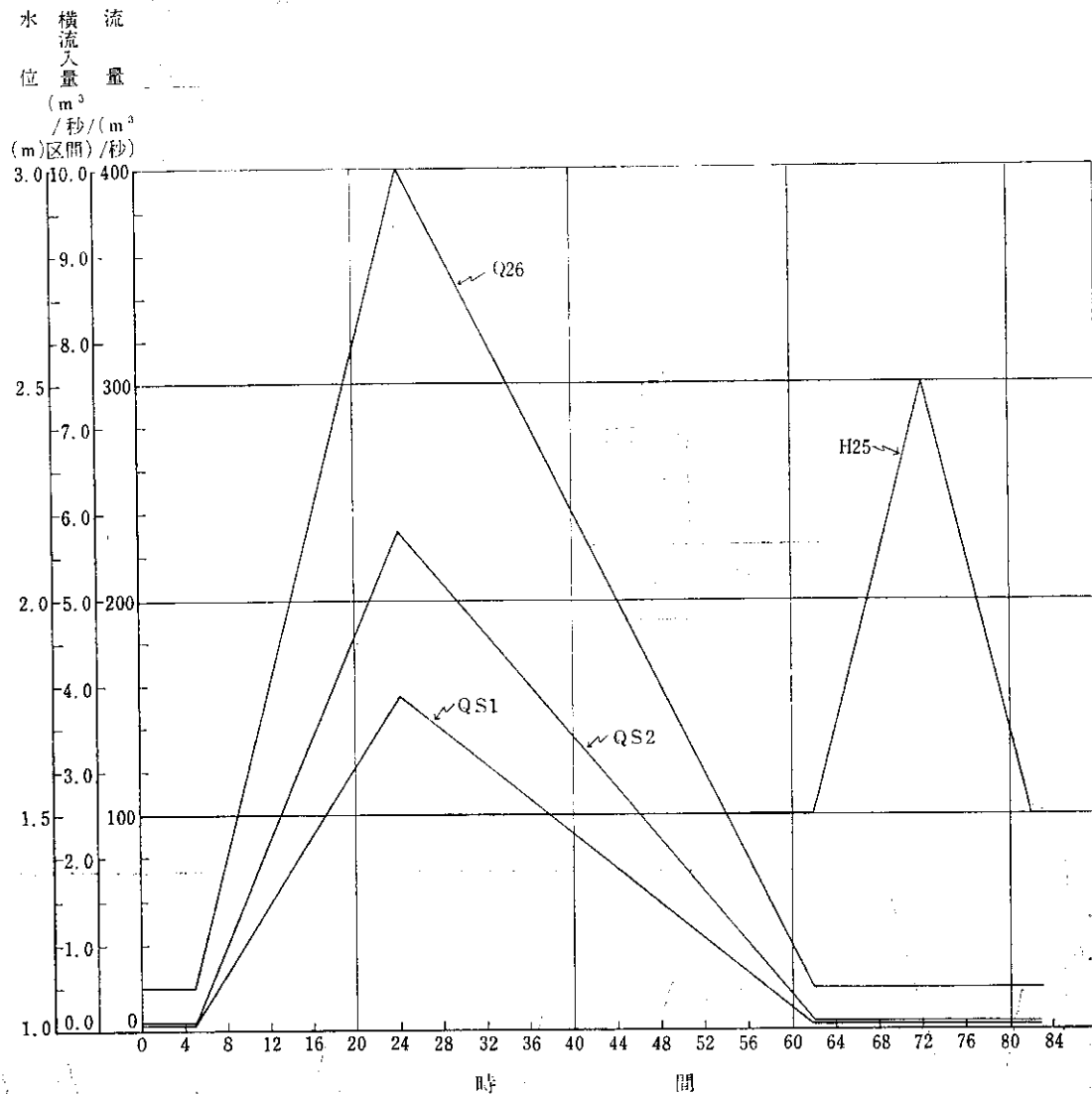
c. 境界条件

- 。 Q_1 , Q_{28} で流量を0 $\text{m}^3/\text{秒}$ とする。
- 。 Q_{26} で支川の流入ハイドロを与える。

- 。 H_{25} で本川水位ハイドロを与える。

- 。 遊水池全域に横流入量を考える。ここでは、横流入量を $2 \times 4x \times q$ として与えている。 $Q_1 \sim Q_{12}$ の区間での横流入量を QS_1 , $Q_{13} \sim Q_{22}$ と $Q_{28} \sim Q_{33}$ の区間での横流入量を QS_2 と表わす。

境界条件は、支川流入ハイドロと本川下流端水位ハイドロとは、ピーク時をずらしそれぞれの効果

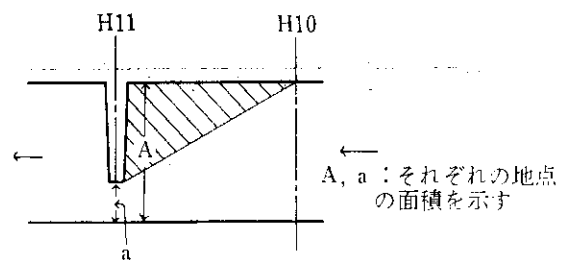


図一七 境界条件 (CASE 1)

が明確となるように設定した。境界条件を図一七に示す。

d. 断面急縮地点(H_{11})の計算処理

断面が急縮したり、急拡したりする地点がある場合に、(4), (5), (12)式をそのまま用いて計算すると解の振動の原因となるので、次のような処理を行う。すなわち、図一八において、斜線の部分を死水域と考え運動方程式(4), (12)を用いる場合には断面積は a を使い、連続方程式(5)を用いる場合には A を使う。



図一八 断面急縮部

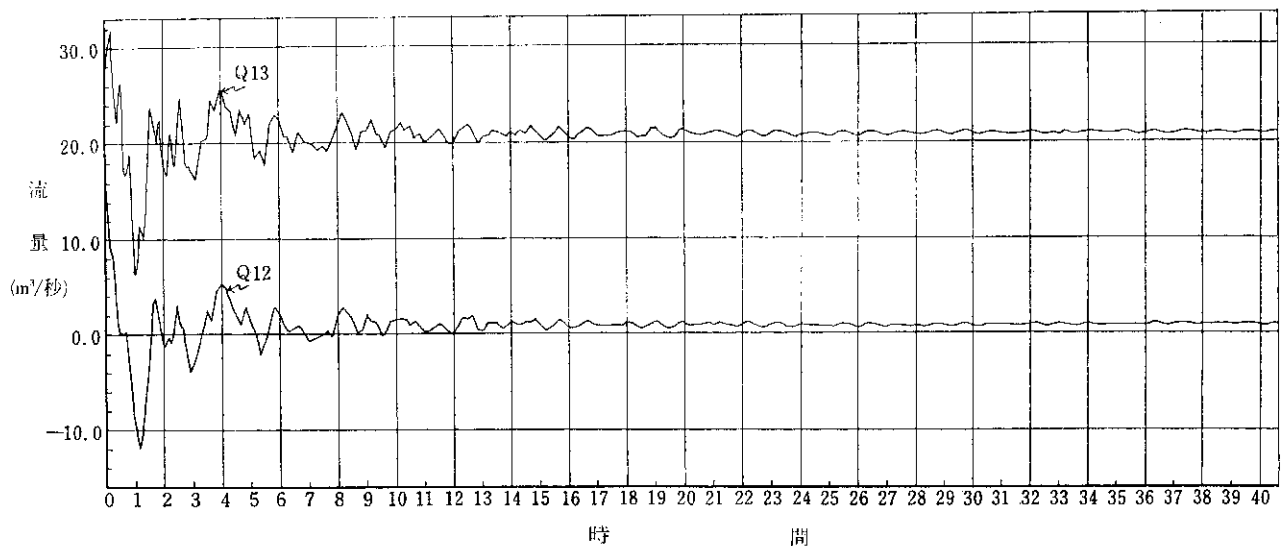
このようにすれば、解の振動を起こさず断面急縮部の処理が行える。ただし本計算では、断面急縮による損失水頭は考慮していない。

e. 初期状態の設定

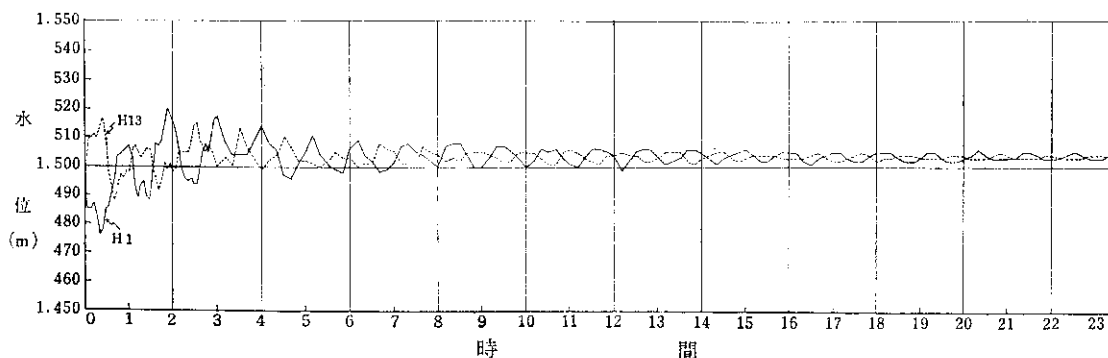
初期状態を正確に設定することは、計算上の解の振動をなくす上で重要なことである。初期状態としては、洪水が現れる前の定常な状態を設定すればよいのだが、実際には、水位、流量が定常な状態は起こりえない。したがって、人工的に擬似的な定流状態を求めなければならない。定流状態を作りだすためには、ある値を仮定し、境界条件を一定にしたまま繰返し計算をしなければならない。仮定する値としては、等流、不等流ごとの2つの状態があるが、いま考えているように横流入がある場合は、各地点ご

との流量が異なるので、不等流状態として計算を行うことになる。つまり、各区间ごとに流量を変えてそれぞれの仮定値を求めた上でさらに不定流としての繰返し計算を行うことになる。この場合、収束時間に差異はあるがある程度、粗な値を仮定しても同一値に収束することが経験的にわかっているので、ここでは、比較的単純な状態を仮定することにした。

すなわち、すべての地点の水位、流量が同値という状態を仮定し、繰返し計算を続けて初期状態を設定した。図一9、10はその計算結果を图示したものであり、流量および水位が、仮定した値から振動を減衰させながら次第に初期状態に収束する状態を示したものである。



図一9 流量の初期値の設定 (CASE 1)



図一10 水位の初期値の設定 (CASE 1)

f. 計算結果

図一11、12は合流点での流量時間曲線を示している。両図を見るとQ27のハイドロの立ち上がりが急なため、ピーク時までQ12は逆流が起きているが、ピーク時が過ぎてQ27が急に低下するので、Q12は

すぐに順流にもどることがわかる。しかし、H11の上流部遊水池に貯留された水は、H11が断面急縮部となっているので、Q12は徐々に低下していくことがわかる。次に、支川の流入洪水(Q26)が終わった後、本川水位(H25)が上昇するため、各地点で逆

流が生じ、逆流が順流に変化する74時頃には、流れの状態が急変するため解の振動が生じている。しかし、この振動もわずかな時間でおさまるので大勢に影響はないようである。図一13～15は、水面形の時間的变化を示している。逆流する時も、順流する時もH11の断面急縮部が流れのネックになっていることがわかる。また、H21から下流の断面は遊水池よりも小さくなっているため、上流部に対してせき上げ効果を与えている。

3-2 河川が分流し、一方の派川が水門操作を行う場合 (CASE 2)

図一16が計算するモデル図である。記号などについては図一5と同様である。

a. 河道条件

- 河道断面は短形断面であり、Q1からQ11までは幅200m、Q12からQ18までは幅50mとした。

- 河床勾配は、図一17に示すとおりである。

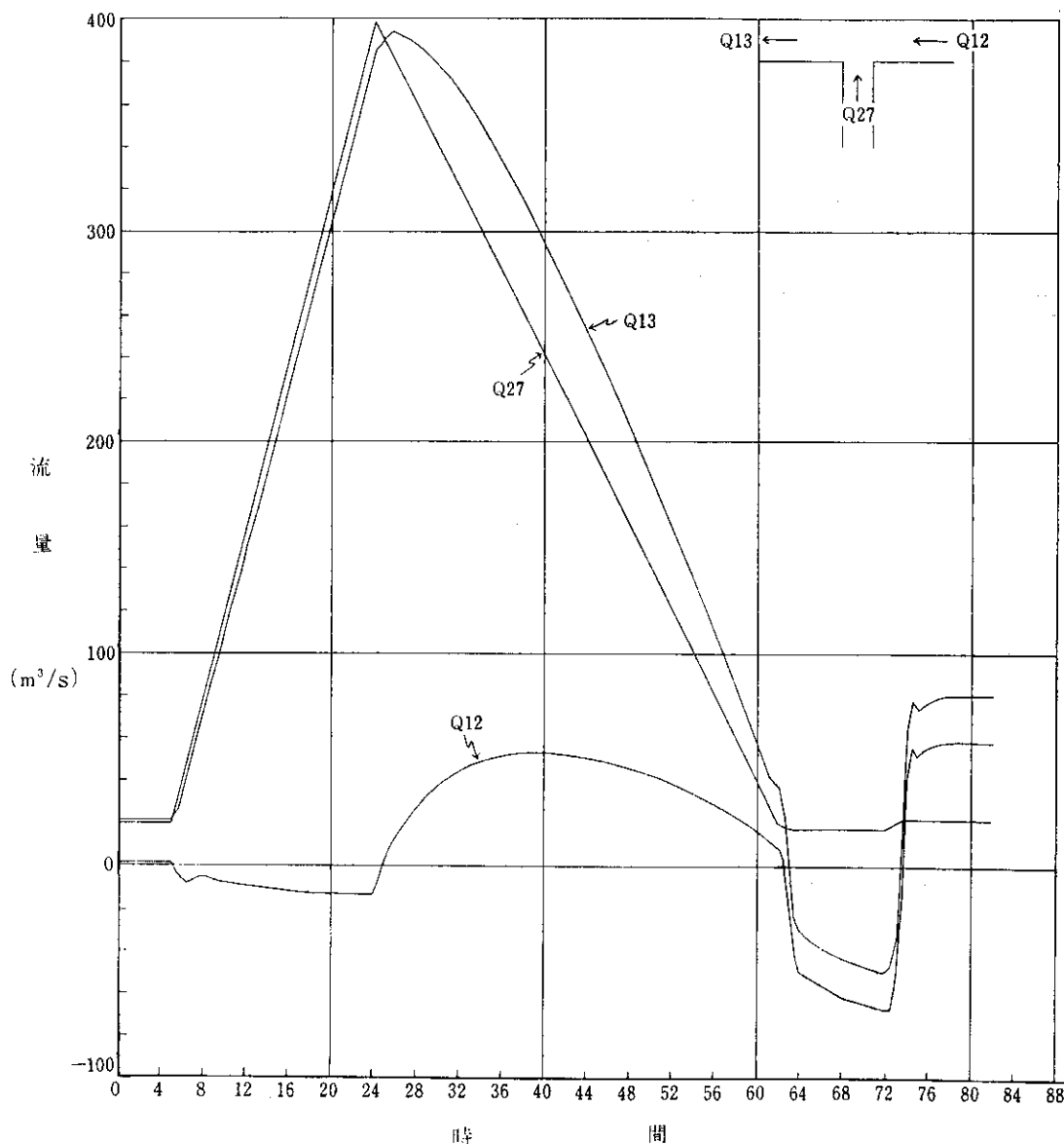
- マンニングの粗度係数は0.035とした。

b. 計算条件

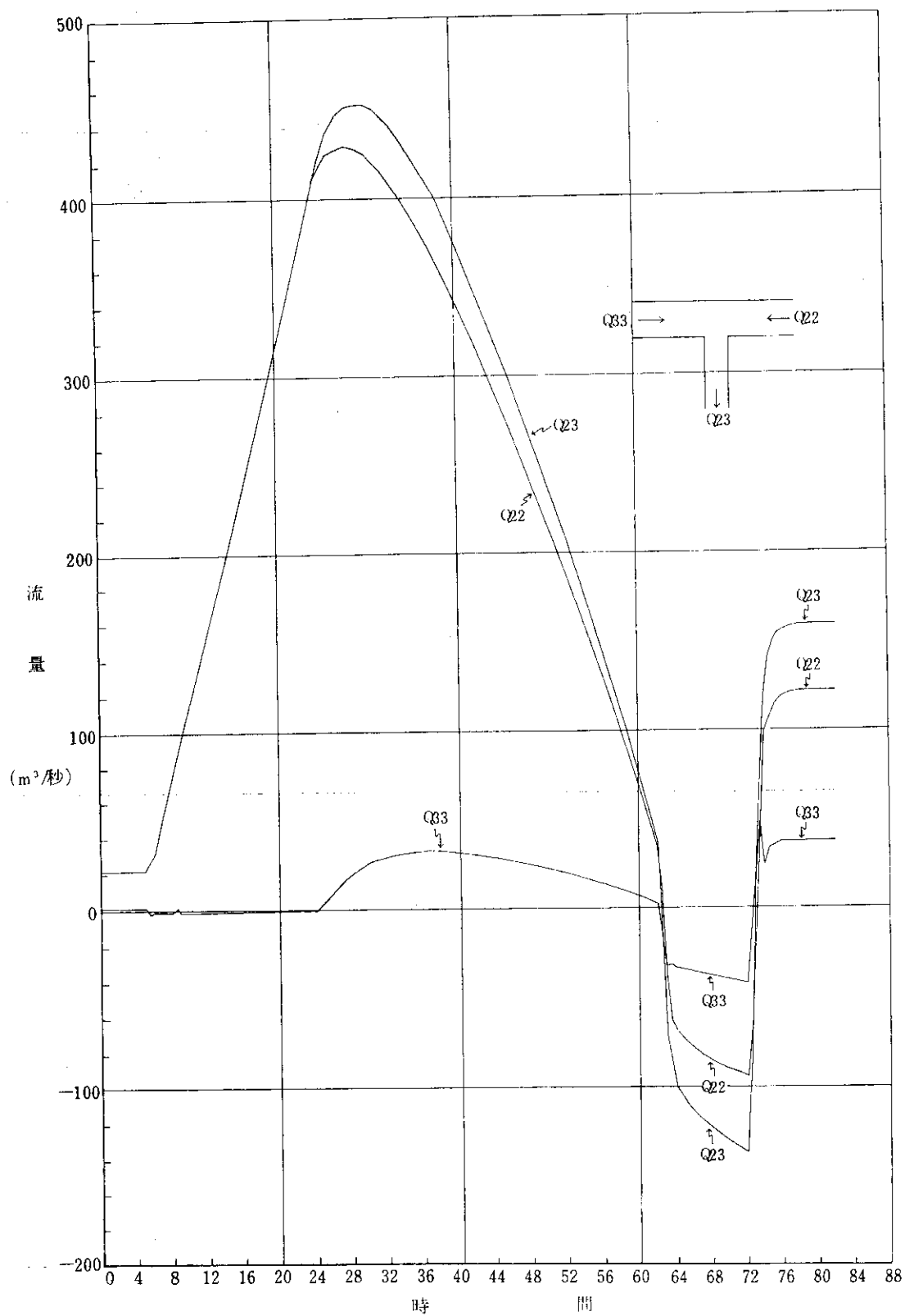
- $\Delta x \cdots \cdots 400\text{m}$, $\Delta t \cdots \cdots 30\text{秒}$ とする。(Von-Neumanの条件より)

c. 境界条件

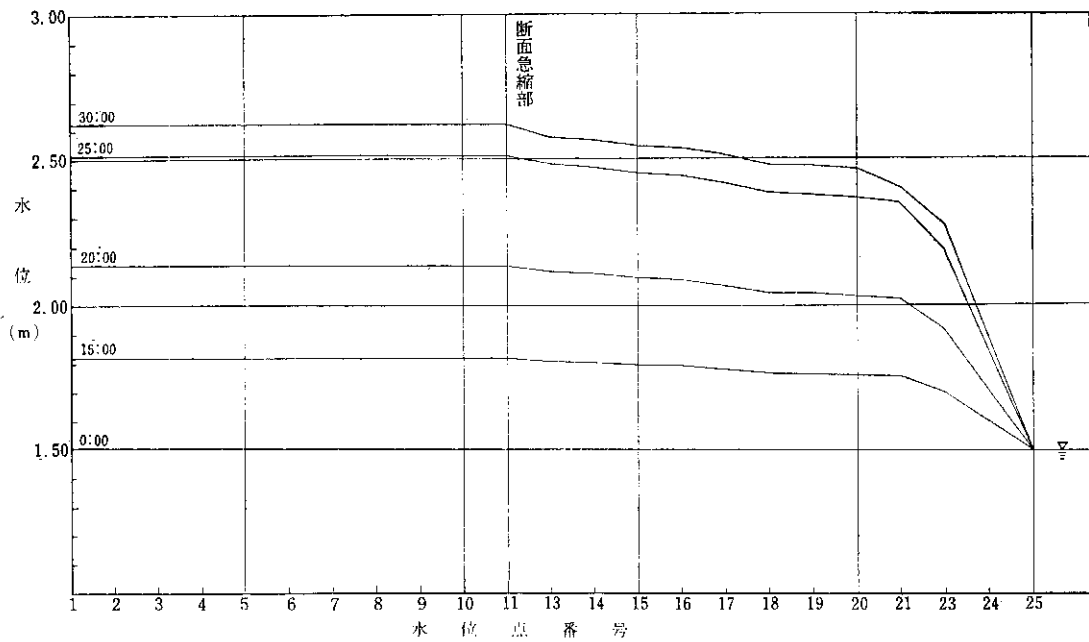
- Q1で流量ハイドロを与え、H14とH17で水位ハイドロを与えることにする。
- 19時になった時点で本川へ通じる派川の水門を閉じる。閉じる操作は12分で行うことにする。その際、下流境界条件の位置は、H17からQ18に移ることになるが、Q18の値は水門閉以前においては値を求めてないので便宜的にQ17の値を代用することにして、12分間でその値を0 $\text{m}^3/\text{秒}$ に持っていった。
- 横流入量は考慮にいないことにする。



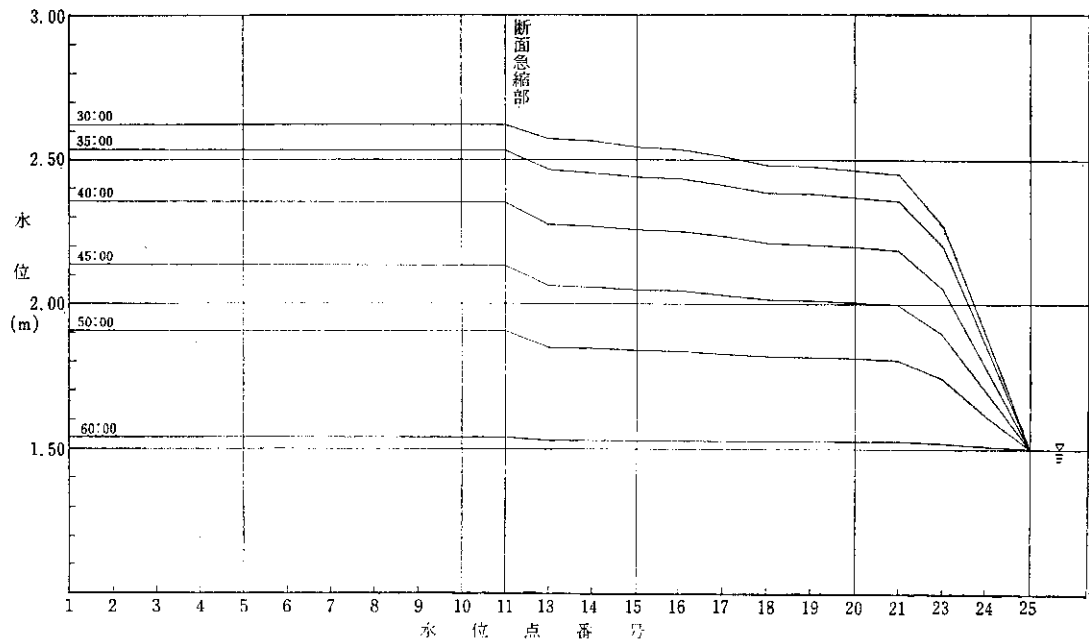
図一11 流量時間曲線 (Q12, Q13, Q27) (CASE 1)



圖—12 流量時間曲線 (Q22, Q23, Q33) (CASE 1)



図一13 水面形の時間的变化 (0:00~30:00) (CASE 1)



図一14 水面形の時間的变化 (30:00~60:00) (CASE 1)

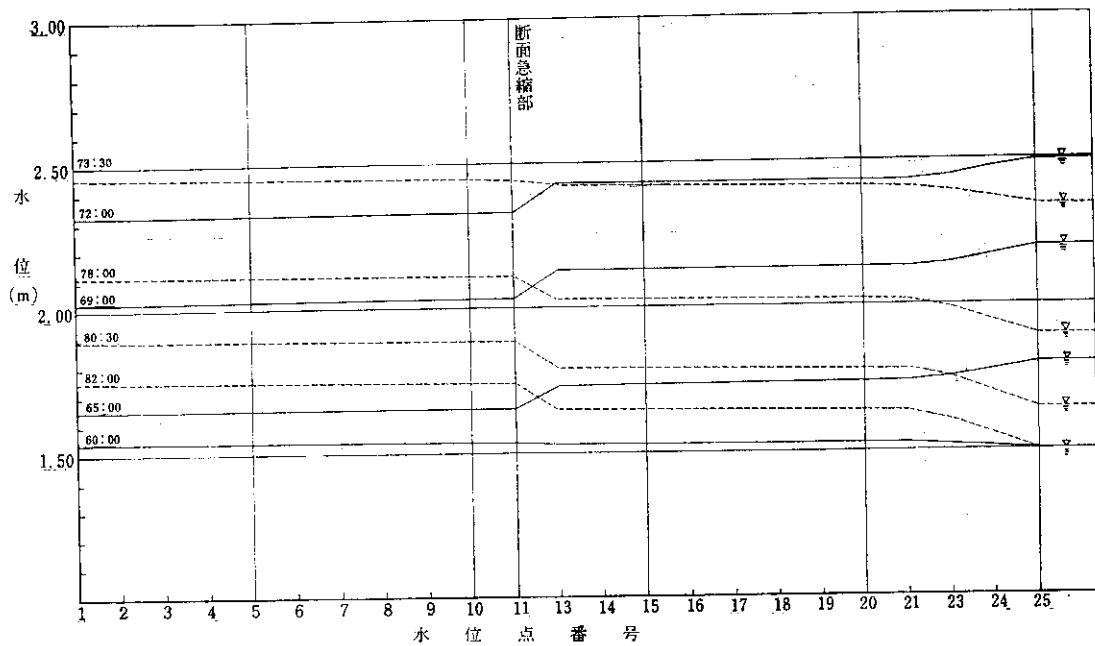


図-15 水面形の時間的变化 (60:00~82:00) (CASE 1)

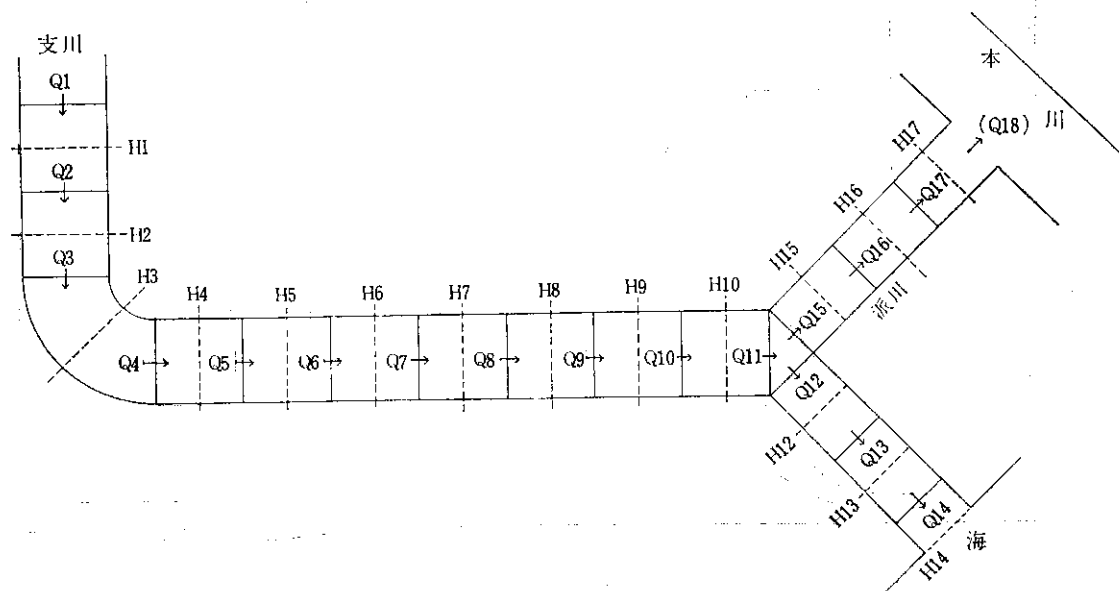


図-16 分流計算モデル図 (CASE 2)

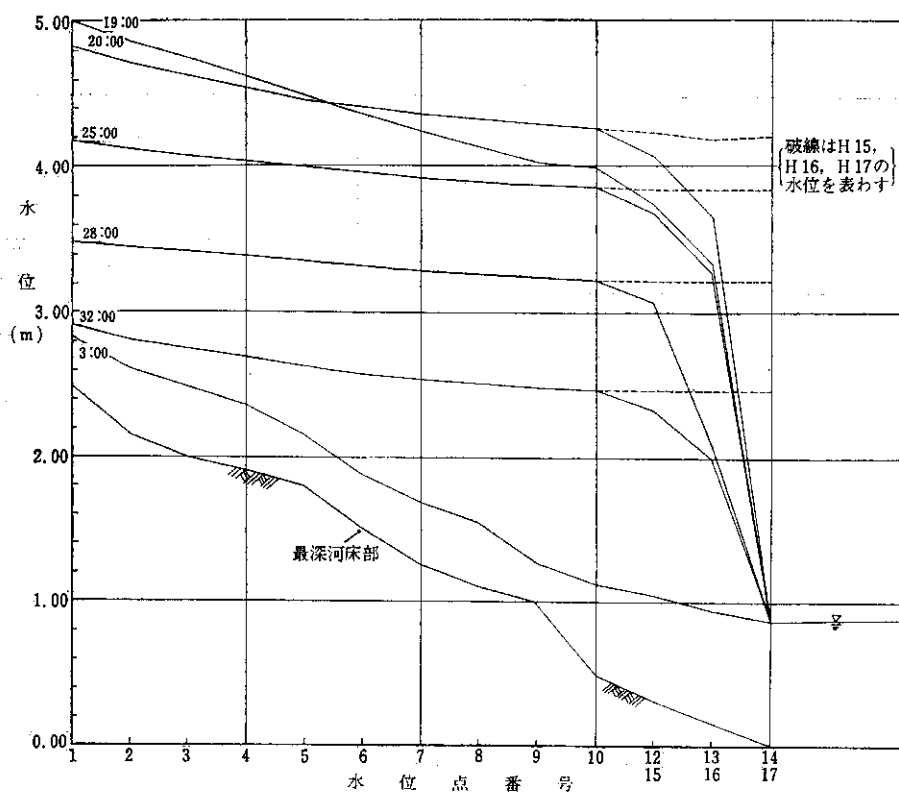


図-17 水面形の時間的变化 (CASE 2)

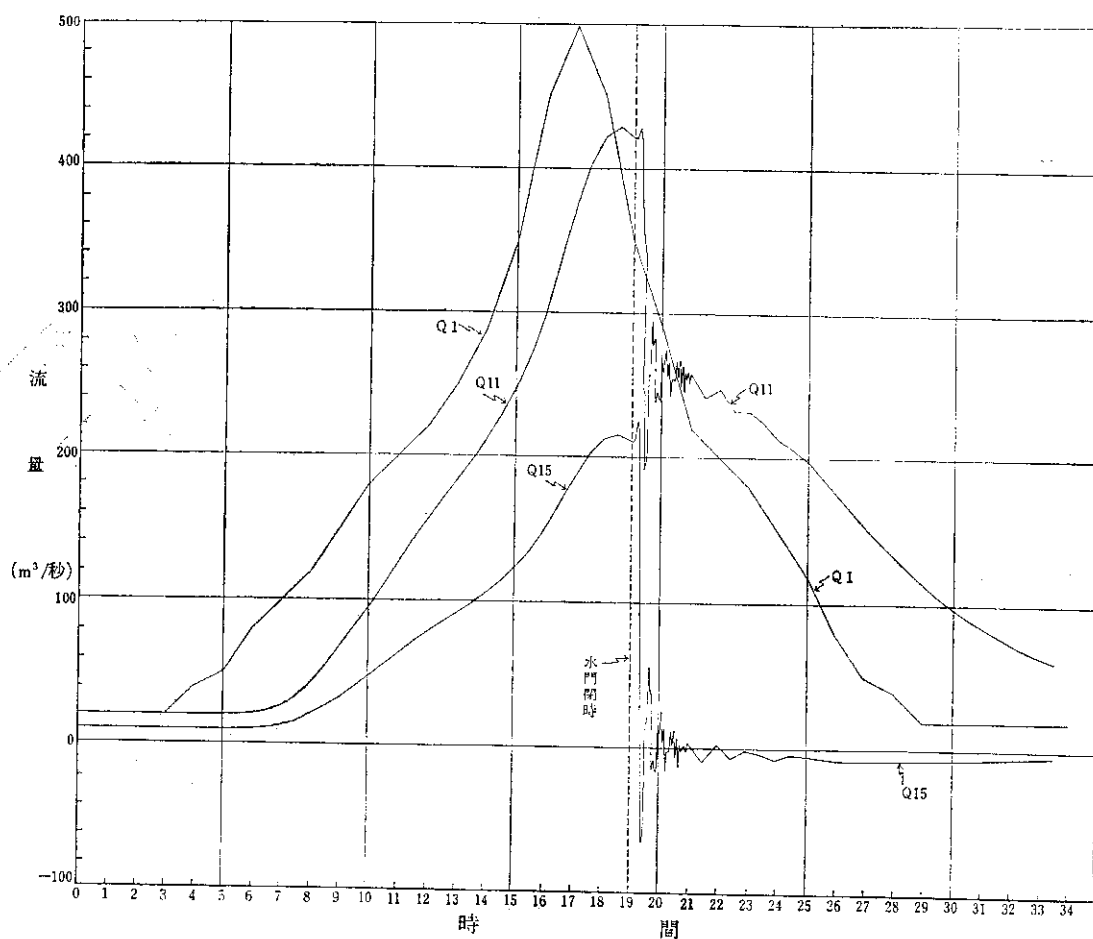
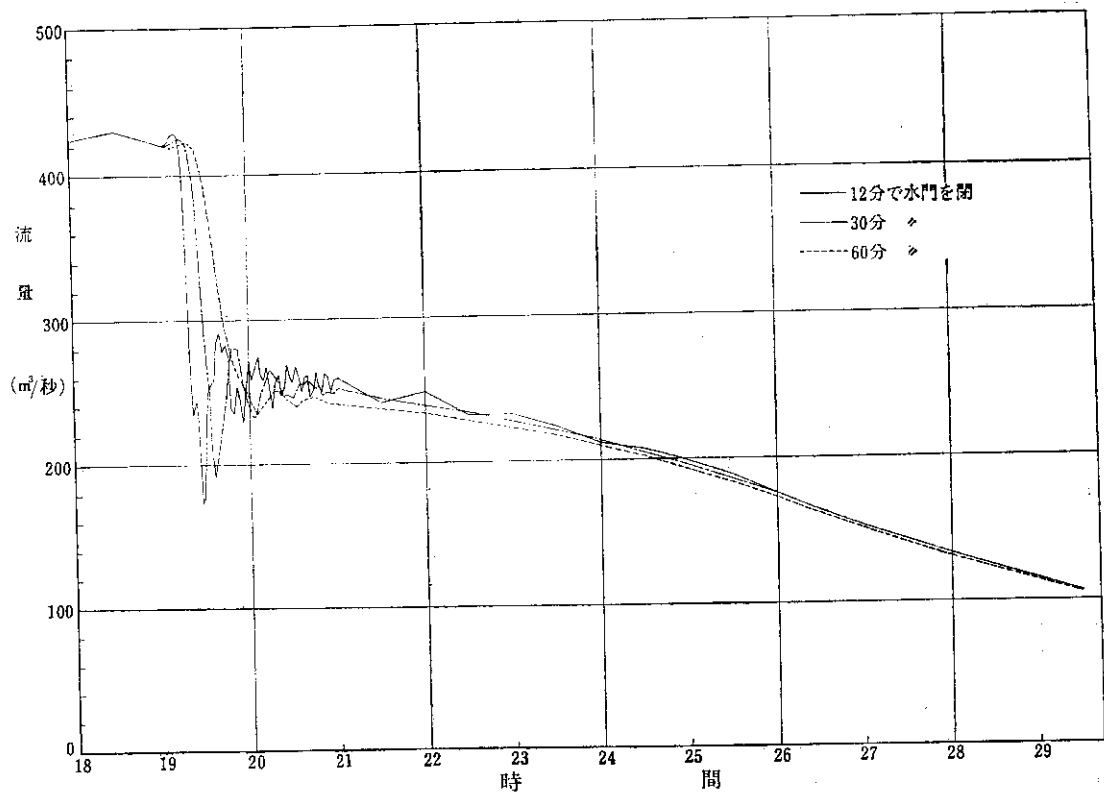
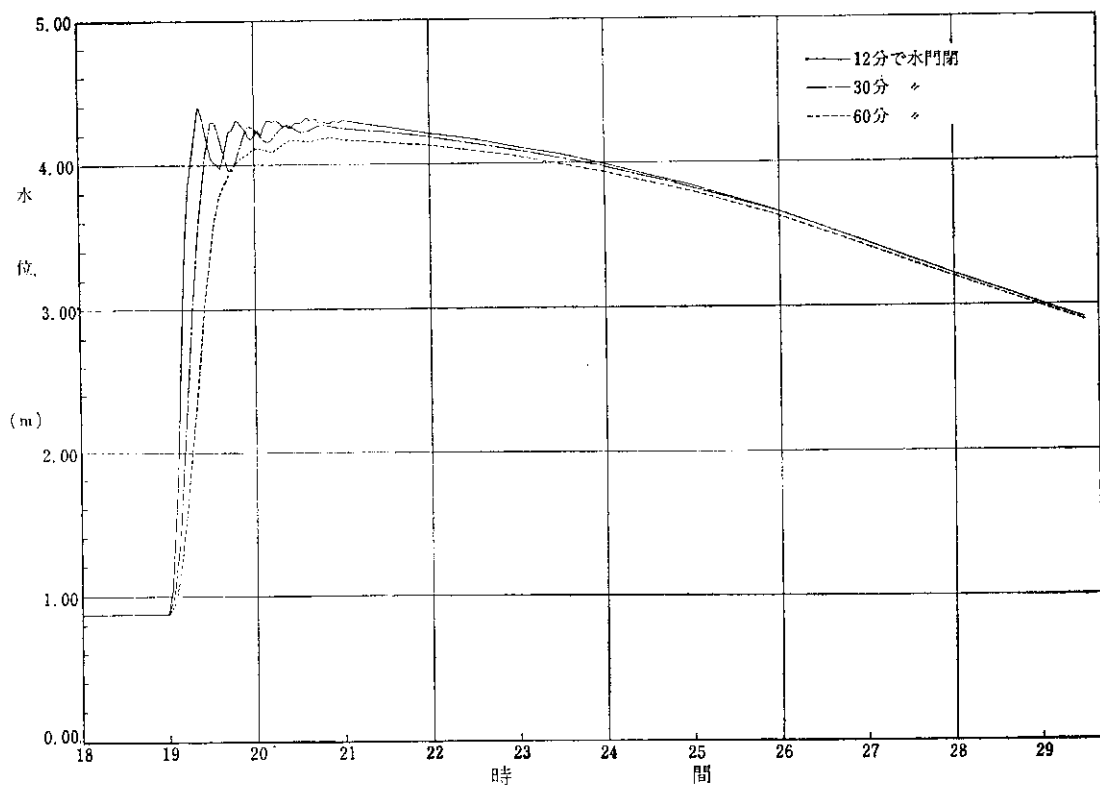


図-18 流量時間曲線 (Q 1, Q11, Q15) (CASE 2)
～ 12 分で水門を閉 ～



図一19 水門の閉じる時間を変えた際の流量時間曲線 (Q11) (CASE 2)



図一20 水門の閉じる時間を変えた際の水位時間曲線 (H17) (CASE 2)

d. 計算結果

図—17は水面形の時間的变化を、図—18はQ 1, Q 11, Q 15の流量時間曲線を示している。水門を閉じると急に解が振動し始めることがわかる。実際には、水門を急に閉じることにより水面形の不連続な段波が発生し、その波が上流に伝わっていくことが予想されるが、それに反し、計算はこの不連続現象についていけず、解を振動させてしまうようである。この振動は蛙飛び法が急激な流れの変化に適用するには、不適當であることを示すものである。本条件では、水門を閉じた後1時間でH17の水位が3 m以上も上昇するという流れの急変が起きている。次に水門を閉じる時間を12分、30分、60分と変化させた場合を比較したものを図—19, 20に示す。時間をかけて水門を閉じると、解の振動が小さくなっていくようであるが、60分で水門を閉じてもまだ振動は続くようである。また流量と水位を比較した場合には、水位のほうが振動は小さくおさまることがわかる。解の振動をおさえて厳密な値を求めるには、なんらかの操作が必要であるが、この差分法でもある程度の傾向はつかめ、かつ、短時間で振動はおさまるので実用的には十分と思われる。

あ と が き

不定流解析において重要なことは、いかにして現地条件をモデル化するか、またその条件のもとに、連続方程式、運動方程式をいかに精度よく解いていくかということである。とりわけ差分法で解く場合には、計算速度とも関係する Δx と Δt の差分のとり方が重要になってく

る。本文において、2ケースの河川の状況を設定し、蛙飛び法による不定流解析を行い、この方法が、急激に変化する流れには解の振動を生じさせるが、河床の凹凸、河幅の急変部、河川の分合流などには解の振動を生じさせない方法であることが確かめられた。しかし、まだまだいくつかの問題を残している。今回、分合流点における支川の流入角度は考慮していないが、流入角度を変化させれば分合流する状況も変化していくことが考えられ、なんらかの条件をつける必要があると思われる。また不定流を差分法で解く際には、精度および解の振動について細心の注意を払わなくてはならない。というのも、いくら使いならされた差分法を用いても、計算の条件によっては解の振動が起こることが考えられるからである。現在までのところ、差分のとり方の決定的な方法は確立されていないのであるから、計算上生じる解の振動を除去するためには試行錯誤を繰返すことになると思われる。しかしその際、差分化によってもとの式の物理的意味が失なわないよう注意すべきである。

今回は、蛙飛び法によって不定流解析を試みたが、将来は Δt を十分に大きくとって解の振動を起こさないといわれる陰な方法についても研究を行い、洪水予報に適用するつもりでいる。

参 考 文 献

- 1) 土木学会編；水理公式集，昭和46年度改訂版，p. 185～187.
- 2) 伊藤 剛編；数値解析の応用と基礎，アテネ社，p. 177.
- 3) 前出 1)；p. 178～188.

*

*

*