

移流拡散方程式の解析解(2)

齋藤 大作* 星 清**

1. はじめに

移流拡散方程式の解析解(1)では、速水の式における拡散係数を一定と仮定して、水位変化についての簡単な例題を用いながら解の導出について述べた。今回は河道内の物質の移流拡散現象について考えることにする。物質濃度を c 、流速を u 、混合係数 D 、時間 t 、流下方向にとると速水の式は以下のようになる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (1)$$

上式は、一次元移流拡散方程式であり、河川内の物質の流下特性を表したものである。この式の右辺の混合係数 D は分散係数と呼ばれ、濃度分布を決定する主要因である。すなわち、これを的確に評価することがピーク濃度や物質の拡がりの程度を議論する上で重要な要素となってくる。しかし、実河川における分散係数 D は空間的な流速分布や河道形状に影響を受け、簡単に推定することは困難である。実際にはトレーサーによる現地観測と理論解析との比較より推定することが望ましい。しかし、環境上の制約により適当なトレーサーがなく観測例も数少ないのが現状である。

ここでは、(1)式の D を理論的に決定する方法を示すが、河道の断面形状が距離に関して一定でないこと、これに伴う流速分布の変化、河岸の凹凸による物質の補足、自浄作用等により濃度分布は変化する。このことから、実河川への適用は観測値との比較により行うことが望ましい。したがって、ここで示す分散係数に関する理論的な考え方は、物質の流下特性の概要を明らかにするために用いるものとする。

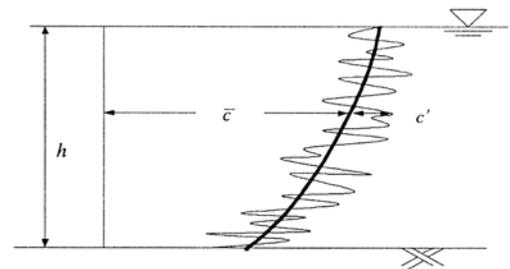
2. 拡散と分散

本題に入る前に拡散と分散(移流拡散とも言う)について述べる。拡散現象と分散現象は(1)式の右辺の形

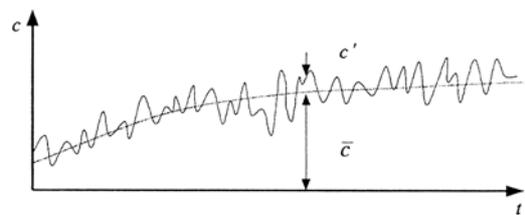
で記述されるが、この中に含まれる混合係数の意味が違ってくる。拡散は層流中における分子拡散と乱流中で生じる乱流拡散とがある。

図-1の(a),(b)はそれぞれ、濃度についてのある瞬間の鉛直分布と断面内の任意点における濃度の時間変化を模式的に示したものである。図-1に示すように濃度分布は空間的にも時間的にも変動している。

ある物質の瞬間的な物理量は時間的な平均量と変動量の和で表され、拡散は変動量によって生じる量を表している。通常乱流拡散を議論する時には物理量(ここで



(a) 瞬間の濃度分布



(b) 濃度の時間変化

図-1 濃度分布特性

は c とする)に記号を付加して、 \bar{c} と c' としてそれぞれ、時間平均量と変動量として表す。

すなわち、流速と濃度の瞬間値は次式で表される。

$$u = \bar{u} + u', \quad c = \bar{c} + c'$$

これに対し、分散は空間的な平均量と平均量からの偏差から求まる。分散について議論するため、空間平均

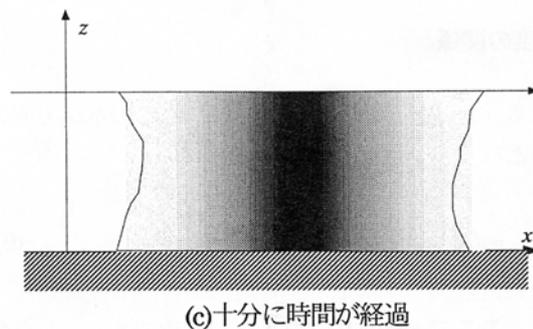
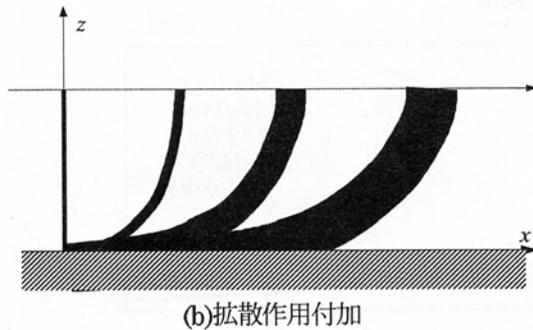
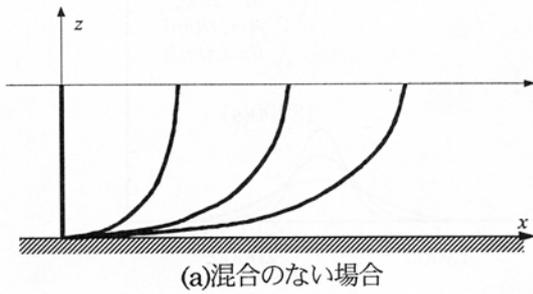


図-2 鉛直二次元濃度分布模式図

量およびそこからの変動について、それぞれ \bar{c} 、 c'' として表現することとする。まず、最も簡単な条件として、混合が無い場合を考える。この場合においても、流速分布により流れ方向に分布を持つことになる(図-2 (a))。次に、拡散を考慮した場合は徐々に流下方向、水深方向に広がっていく(図-2(b))。これがさらに流下すると鉛直方向に一様な分布を示すようになる(図-2(c))。この段階において、濃度分布を記述する微分方程式を分散方程式と呼ぶ。

物質が断面全体に広がった後には

$$\bar{u} = \bar{u} + u'', \quad \bar{c} = \bar{c} + c'' \quad (\bar{c} \gg c'') \quad (2)$$

と表すことができる。(2)式を次の 3 次元方程式(Fick 型の方程式と呼ばれる)で表現する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[(k + K_x) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(k + K_y) \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[(k + K_z) \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 k は分子拡散係数、 K_x 、 K_y 、 K_z は x 、 y 、 z 方向の渦動粘性係数である。

(3)式に(2)式を代入して断面平均すると、次式を得る。

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(k + K_x) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right] - \frac{\partial (\overline{u''c''})}{\partial x} \quad (4)$$

右辺第 3 項は断面内の速度偏差、濃度偏差による輸送量で、これについても Fick 型の方程式で表せると仮定すると、次式が成立する。

$$D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = (k + K_x) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \overline{u''c''} \quad (5)$$

その結果、1 次元の分散方程式として次式を得る。

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad (6)$$

一般に、(5)式の右辺は、第 3 項の影響が大きく

$$D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = -\overline{u''c''}$$

とおいても差し支えない。

開水路内において、物質は水深方向および水路幅方向に拡がりながら流下している。このとき、水深は水路幅に比べて小さいため、濃度が水深方向には速く均一化する。したがって、物質の流下特性を議論するとき、ここでは物質が水深方向に一様に拡がった場合を考える。

濃度分布を決定する主要因は、流れ方向の移流と水路幅方向の拡散であると考えられる。よって、放出した物質が水路幅方向にほぼ一様に広がったのちに、1 次元分散方程式が適用できる。すなわち、混合の初期段階で

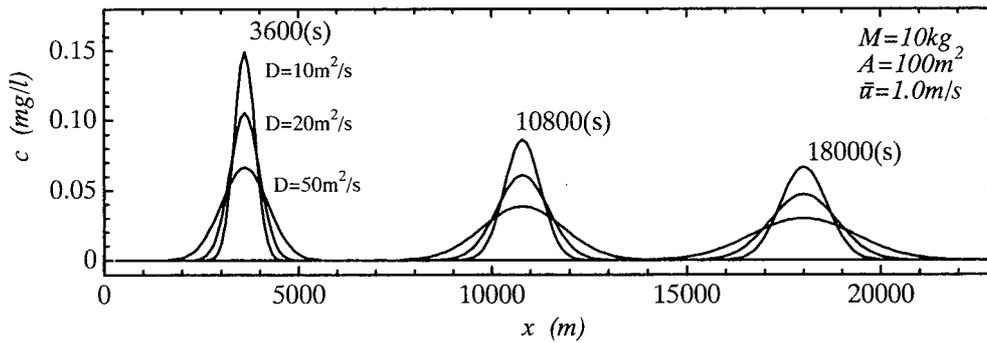


図-3 濃度分布の時間変化

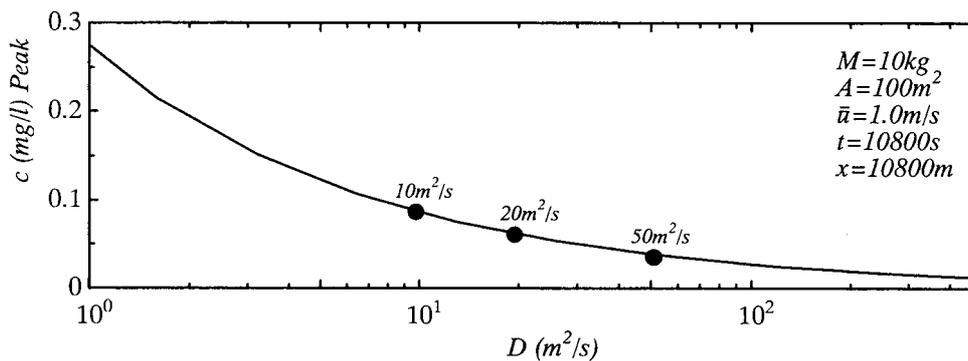


図-4 分散係数とピーク濃度の関係

は、物質の分布は速度場の影響を強く受けるため、2次元および3次元の検討を行う必要がある。

3. 二次元開水路における分散

Elder は二次元的開水路流れにおける分散について研究を行った。ここで述べる二次元は水路幅方向に現象が一樣で、鉛直方向の偏差のみを考えた鉛直二次元である。Elder によれば縦分散係数は次式で表される。[補遺 1]

$$D = -h^2 \int_0^1 u'' \left[\int_0^w K_z^{-1} \left(\int_0^w u'' dw \right) dw \right] dw \quad (7)$$

ここで、流れ方向に x 軸、鉛直下向きに z 軸をとり、 h は水深、 u は断面平均流速からの偏差、 $w=z/h$ 、 K_z は鉛直方向の渦動拡散係数である。

Elder は流速分布を対数則とし、Reynolds の相似則が成立すると仮定して

$$D = 5.86 u_* h \quad (8)$$

を導いている。また乱れの等方性を仮定し、流れ方向への物質拡散の寄与も考慮すると、流れ方向の平均渦動拡

散係数 K_v は、鉛直方向の渦動拡散係数 K_z の水深方向の平均値となり

$$K_v = (\kappa/6) u_* h = 0.068 u_* h \quad (9)$$

となる。ここで $\kappa=0.41$ はカルマン定数である。したがって、拡散の効果を考慮して修正された縦分散係数は次式で表される。

$$D = (5.86 + 0.07) u_* h = 5.93 u_* h \quad (10)$$

さらに、Elder は染料を投入した実験を行い、水深に関して平均された断面内の代表的な横方向の渦動拡散係数として次式を得ている。

$$K_t = 0.228 u_* h \quad (11)$$

4. 河川における物質の流下

4.1 河川での分散

先に述べた二次元開水路では、横断方向に一樣な流

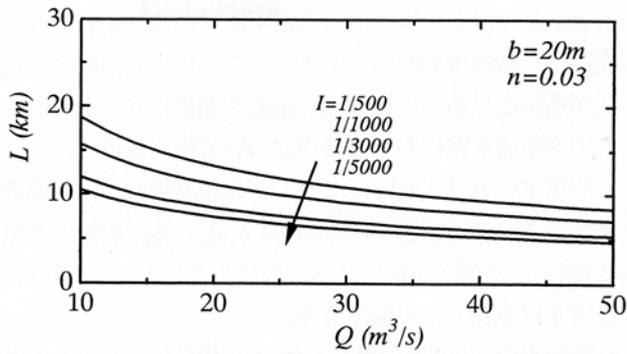


図-5 Q-L

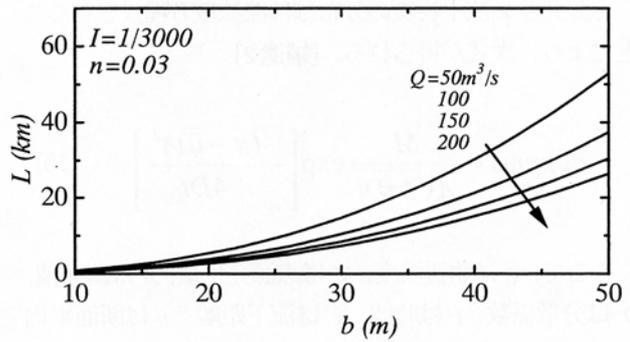


図-8 b-L(Q変化)

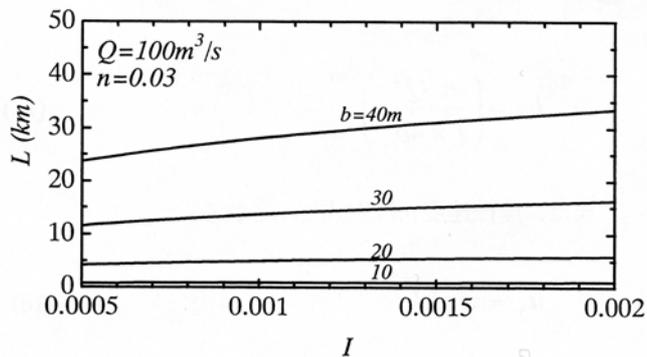


図-6 I-L

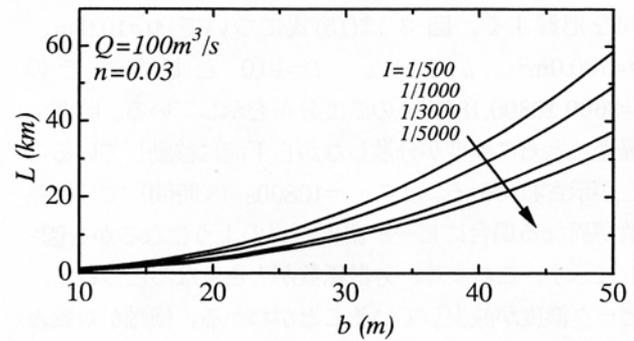


図-9 b-L(I変化)

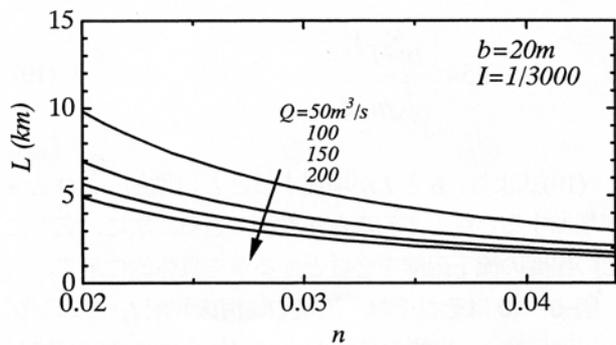


図-7 n-L

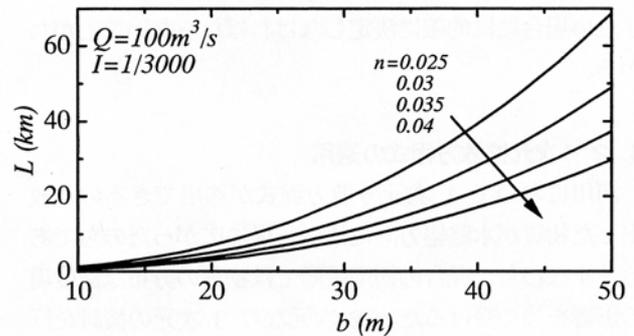


図-10 b-L(n変化)

これを仮定したが、自然河川での物質の分散は横方向の速度偏差が重要な因子となってくる。河川内での縦分散係数は Fischer により、次式のように求められた。

$$D = -\frac{1}{A} \int_0^B q'' \left[\int_0^y \frac{1}{K_i h} dy \int_0^y q'' dy \right] dy \quad (12)$$

ここで、 A は流水断面積、 B は水面幅、 y は河幅方向、 $h=h(y)$ は水深であり、 q は断面平均流速からの偏差に関する量で

$$q'' = \int_0^h u'' dz \quad (13)$$

である。(12)式についても[補遺 1]と同様にして求めることができる。(具体的な D の導出は演習問題を参照)

また、式(12)は近似形として、次式も導かれている。

$$D \approx 0.30 \frac{\overline{u''^2} b^2}{Ru_*} \quad (14)$$

次に、移流拡散方程式の解析解により、具体的に流下特性を考察することにする。

点源発生時の流下物質の分布は移流拡散方程式を解くことにより、次式が得られる。[補遺 2]

$$\bar{c}(ppm) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{4Dt}\right] \quad (15)$$

ここで、 \bar{c} は物質濃度、 M は点源発生量、 A は断面積、 D は分散係数、 t は時間、 x は流下距離、 \bar{u} は断面平均流速である。

(15)式に以下の値を代入することにより、その分布傾向を把握する。図-3は(15)式について $M=10.0$ kg、 $A=100.0\text{m}^2$ 、 $\bar{u} = 1.0\text{m/s}$ 、 $D = 10.0$ としたときの $t=3600, 10800, 18000\text{s}$ の濃度分布を示している。時間の経過とともに濃度が分散しながら下流に移動していることが示されている。次に、 $t=10800\text{s}$ (3時間)で分散係数が異なる場合にピーク濃度がどのようになるかを図-4に示す。これより、分散係数が大きくなるにつれて、ピーク濃度が減少していることがわかる。横軸が対数表示されていることに注意すると、特に D の値が小さいときには急激に減少している。よって、分散係数が特に小さい場合には的確に決定しなければならないことがわかる。

4.2 1次元拡散方程式の適用

河川において1次元分散方程式が適用できるのは放出した物質が水路幅方向にほぼ一様に広がったのちである。すなわち、混合の初期段階では物質の分布は速度場の影響を強く受けるため2次元なり3次元の検討を行う必要がある。

物質が水路幅全体に広がり、1次元方程式により濃度分布が追跡できるようになる距離は、Fischerによる水理実験と数値実験の結果から

$$L > 1.8 \frac{b^2 \bar{u}}{Ru} \quad (16)$$

で表される。ここで、 L は濃度分布が追跡可能となるまでの距離(断面全体に物質が広がるまでの流下距離)、 b は川幅の半幅、 R は径深、 \bar{u} は断面平均流速、 u_s は摩擦速度である。

よって、 L が対象地点までの距離より十分に小さければ1次元分散方程式が適用可能となる。また、(16)式

は B/h が6以上の場合にも適用可能である。それでは、実際にどの程度の距離を流下することにより川幅全体に広がるかを見ることにする。議論を簡単にするために、広矩形断面水路における等流について検討を行う。

流量 Q 、河床勾配 I 、マンニングの粗度係数 n 、川幅の半幅を b とし、水深は等流水深 h_0 とする。広矩形水路において、水深が川幅に比べて十分に小さいと仮定すれば径深 R は水深 h で近似できる。

等流水深 h_0 は上の諸量を用いて表すと以下のようになる。

$$h_0 = \left(\frac{n^2 Q^2}{I \times 4b^2} \right)^{3/10} \quad (17)$$

また、摩擦速度 u_s は次式で示される。

$$u_s = \sqrt{ghI} \quad (18)$$

これらを用いて(16)式を書き直すと以下のようになる。

$$L > 2.545 \frac{b^{5/2} I^{1/4}}{\sqrt{Qn^3 g}} \quad (19)$$

(19)式より、 b と I が増加すると L は増加し、 Q と n が増加すると減少することが推測できる。次に、実際にどの程度の流下距離を必要とするかを具体的に示す。

図-5~10はそれぞれ、流量 Q 、河床勾配 I 、マンニングの粗度係数 n 、川幅の半幅 b と水路幅全体に濃度が広がるまでの距離 L との関係を示したものである。図-5~7は Q, I, n と L の関係を示しており、横軸以外の変数を変えた場合についても示している。また、図-8~10は b と L の関係を示したものであり、横軸以外の変数をそれぞれ変えたものである。各図で変数となるもの以外は $b = 20\text{m}$ 、 $n = 0.03$ 、 $I = 1/3000$ 、 $Q = 100\text{m}^3/\text{s}$ と固定してある。

図-5~10及び式(19)からも明らかのように、川幅の半幅 b の変化が L に最も大きく影響を与えていることがわかる。

演習問題

川幅 40m の河川にある物質（点源発生）が流れている。以下の1)～3)の問いに答えよ。ここで、河川の断面形状は表-1のように与える。また、河床勾配は1/3,000、マンニングの粗度係数は0.03とする。

- 1) 摩擦速度 u_* 、粗度 k を求め、 $y=y_i$ での流速分布として対数則を適用することにより、流量 Q 、断面平均流速 \bar{u} を求めよ。
- 2) 縦分散係数 D を求めよ。
- 3) 表に示す断面の河川に保存物質 10 kg のトレーサーが瞬間的に投入された。投入地点より下流 30 km で観測されるピーク濃度の値(ppm)と生起時刻を推定せよ。

表-1 断面資料

i	$y_i(m)$	$\Delta y_i(m)$	$h_i(m)$
1	0.0	4.0	0.0
2	4.0	4.0	1.0
3	8.0	4.0	1.5
4	12.0	4.0	1.7
5	16.0	4.0	2.0
6	20.0	4.0	2.4
7	24.0	4.0	2.6
8	28.0	4.0	2.0
9	32.0	4.0	1.5
10	36.0	4.0	1.3
11	40.0		0.0

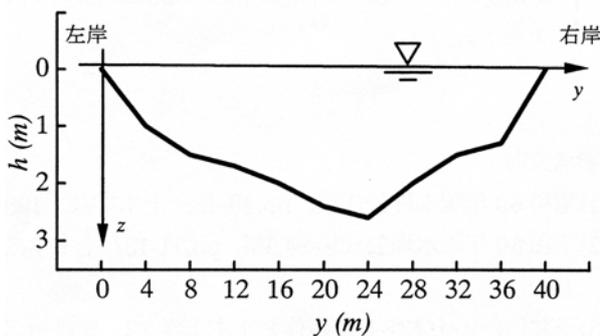


図-11 断面図

解答

- 1) 断面積 A 、径深 R 、摩擦速度 u_* の値は断面資料より、 $A=64.0 \text{ m}^2$ 、 $R=1.58\text{m}$ 、 $u_*=0.072\text{m/s}$ となる。
粗度 は粗面水路に対する流速分布としての次式

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 8.5 + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} \quad (\text{演-1})$$

とマンニングの平均流速公式より求めた関係式

$$n = \frac{R^{1/6}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{[6.0 + 5.75 \log_{10}(R/k)]} \quad (\text{演-2})$$

と $n=0.03$ より求め、 $k=0.175\text{m}$ となる。 $y=y_i(m)$ での流速分布 $\bar{u}(y_i, z)$ に対数則を適用すると q_i は次式で計算できる。

$$q_i = \int \bar{u}(y_i, z) dz \quad (\text{演-3})$$

流量 Q は次式で計算できる。

$$Q = \sum_{i=1}^{10} (q_i + q_{i+1}) \cdot \Delta y_i / 2 \quad (\text{演-4})$$

これより、 $Q=54.84\text{m}^3/\text{s}$ となり、断面平均流速 $\bar{u} = Q/A = 0.86\text{m/s}$ となる。

2) 縦分散係数を次式により算定する。1) で求めた q_i を用いて次式を数値積分する。

$$D = -\frac{1}{A} \int_0^B q'' dy \int_0^y \frac{1}{K_t h} dy \int_0^y q'' dy \quad (\text{演-5})$$

$$q'' = \int_0^y u'' dz \quad (\text{演-6})$$

ここで、 $K_t = 0.23 u_* h$ を用いる。

まず、 q_i'' 、 $q_{1,i}$ 、 $q_{2,i}$ を次のように定義する。

$$q_i'' = q''(y_i) = \int_0^{h_i} \{ \bar{u}(y_i, z) - \bar{u} \} dz = q_i - \bar{u} \cdot h_i$$

$$q_{1,i} = q_1(y_i) = \int_0^{y_i} q''(y) dy$$

$$q_{2,i} = q_2(y_i) = \int_0^{y_i} \frac{1}{K_t(y)h(y)} \int_0^y q''(y') dy' dy$$

(演-7)

$q_{1,i}$ と $q_{2,i}$ を次式で数値積分する。

表-2 計算結果

i	y _i (m)	q _i (m ² /s)	q _i ^{''} (m ² /s)	q _{1,i} (m ² /s)	K _t (m ² /s)	q _{2,i} (m ² /s)
1	0	0.00	0.00	0.00	0.000	0.00
2	4	0.75	-0.11	-0.22	0.017	-25.88
3	8	1.23	-0.06	-0.56	0.025	-81.63
4	12	1.43	-0.03	-0.74	0.028	-142.59
5	16	1.74	0.02	-0.76	0.033	-196.71
6	20	2.17	0.11	-0.50	0.040	-230.16
7	24	2.39	0.15	0.02	0.043	-240.22
8	28	1.74	0.02	0.36	0.033	-228.95
9	32	1.23	-0.06	0.28	0.025	-203.11
10	36	1.03	-0.09	-0.02	0.022	-189.58
11	40	0.00	0.00	-0.20	0.000	-190.98

$$q_{1,i} = \sum_{j=1}^{i-1} (q_j'' + q_{j+1}'') \cdot \Delta y_j / 2$$

$$q_{2,i} = \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{q_{1,j}}{K_t(y_j)h_j} + \frac{q_{1,j+1}}{K_t(y_{j+1})h_{j+1}} \right) \cdot \Delta y_j / 2 \quad (\text{演-8})$$

ただし、 $q_{1,i}/(K_t(y_i) \cdot h_i) = q_{2,i}/(K_t(y_{2i}) \cdot h_{2i}) = 0$ とおく。
最後に、縦分散係数 D は

$$D = -\frac{1}{A} \sum_{i=1}^{10} (q_i'' \cdot q_{2,i} + q_{i+1}'' \cdot q_{2,i+1}) \cdot \Delta y_i / 2 \quad (\text{演-9})$$

と算定される。これより $D=1.8\text{m}^2/\text{s}$ を得る。

3) まず移流域の長さを検討する。移流域の長さ L は

$$L = 1.8 \frac{20^2 \times 0.86}{1.58 \times 0.072} \approx 5443.0(\text{m}) \quad (\text{演-10})$$

となり、 L 30 kmであるから、対象地点では分散方程式が適用可能となる。

分散方程式の瞬間源の解は、 A 、 \bar{u} および D を一定として、投入された物質の総量を $M(\text{g})$ とすれば

$$\bar{c}(\text{ppm}) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{4Dt}\right] \quad (\text{演-11})$$

で与えられる。

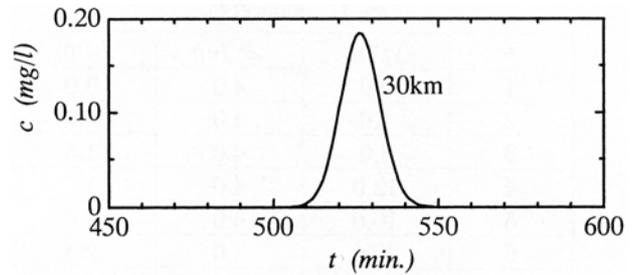


図-12 30km 地点における濃度の時間変化

$x=30000\text{m}$ 、 $M=10000\text{g}$ を代入して濃度-時間曲線を求めると、図-12 のようになる。ピーク濃度は 0.185ppm 、生起時間は投入後約 526 分(8.77 時間)である。

参考文献

- 1)昭和 60 年版水理公式集, pp.43-48, 土木学会,1985
- 2)昭和 60 年版水理公式集例題集, pp.11-13, 土木学会, 1985
- 3)玉井信行:土木学会編新体系土木工学 22, 密度流の水理, 技報堂出版, 1980
- 4)日野幹雄:流体力学, 朝倉書店, 1992
- 5)Fischer, H.B.: The mechanics of dispersion in natural streams, J.Hyd.Div., Proc. ASCE, Vol.93, HY6, pp.187-216, 1967

[補遺 1]

濃度分布を決定する主要因は流下方向の移流と断面方向の拡散である。本文中の(3)式に(2)式を代入し、流下方向の移流項と断面方向の拡散項を残すと、濃度は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{c} + c'') + u'' \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{c} + c'') \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial c''}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial c''}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad \text{[補-1]}$$

ここで、 K_y, K_z 断面方向の渦動拡散係数である。

次に、各物理量の偏差が断面全体に渡って平均値より小さいと仮定し、微小項の積を無視すると上式は以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} c'' + u'' \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial c''}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial c''}{\partial z} \right) \quad \text{[補-4]}$$

また、 $\frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi}$ が一定で、偏差が断面位置の関数と仮定す

ると次式が得られる。

$$c'' = f(y, z) \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \quad \text{[補-5]}$$

さらに、[補-4]式において定常状態を仮定し、 y 方向の変化を無視して、[補-5]を[補-4]代入すると、

$$u''(z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \text{[補-6]}$$

となる。これを f について解くと次式が得られる。

$$f(z) = \int_0^z \frac{1}{K_z} dz \int_0^z u''(z) dz + f(0) \quad \text{[補-7]}$$

次に、断面平均からの質量輸送量は次式で与えられる。

$$\dot{M} = \int_A u'' c'' dA \quad \text{[補-8]}$$

さらに、バルク方程式中の係数としての分散係数の定義により、 \dot{M} は以下のように表される。

$$\dot{M} = -DA \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \quad \text{[補-9]}$$

[補-8]と[補-9]より、[補-5]を用いて D を陽形式で表すと次式となる。

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{A} \int \int_A u'' f dA \\ &= -\frac{1}{A} B \int_0^h u''(z) \left[\int_0^z \frac{1}{K_z} dz \int_0^z u''(z) dz \right] dz \end{aligned} \quad \text{[補-10]}$$

ここで、 $w=z/h$ とおくと D は以下の様に表現できる。

$$D = -h^2 \int_0^1 u'' \left[\int_0^w \frac{1}{K_z} dw \int_0^w u'' dw \right] dw \quad \text{[補-11]}$$

[補遺 2]

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad \text{[補遺-12]}$$

は $\xi = x - \bar{u}t$ の変数変換を行うことにより

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \xi^2} \quad \text{[補-13]}$$

と変換できる。

上式は次に示す変数分離法によって解くことができる。まず、 $\bar{c}(\xi, t) = X(\xi) \cdot T(t)$ の形に仮定し、[補-13]に代入すると、 $TX = DTX$ となる。

すなわち、

$$\frac{T'}{DT} = \frac{X''}{X} = \alpha^2, \text{ または } \frac{T'}{DT} = \frac{X''}{X} = -\alpha^2 \text{ とおくと}$$

$T' = D\alpha^2 T, X'' = \alpha^2 X$ または $T' = -D\alpha^2 T, X'' = -\alpha^2 X$ となり、常微分方程式に変換できる。それぞれの微分方程式を解くと、次式が得られる。

$$T = Ae^{D\alpha^2 t}, X(\xi) = Be^{\alpha\xi} + Ce^{-\alpha\xi} \quad [\text{補-14}]$$

$$T = Ae^{-D\alpha^2 t}, X(\xi) = B\cos\alpha\xi + C\sin\alpha\xi \quad [\text{補-15}]$$

$D > 0$ であるので、[補-14]は時間 t で $|T|$

および $|X| \rightarrow \infty$ で $|X| \rightarrow \infty$ ($B \neq 0, C \neq 0$) となって発散する
すなわち、次式が求める解となる。

$$T = Ae^{-D\alpha^2 t}, X(\xi) = B\cos\alpha\xi + C\sin\alpha\xi \quad [\text{補-16}]$$

よって、[補-13]の解は次式となる。

$$\bar{c}(\xi, t) = e^{-D\alpha^2 t} \{B(\alpha)\cos\alpha\xi + C(\alpha)\sin\alpha\xi\} \quad [\text{補-17}]$$

また、[補-13]は線形同次方程式であり、 α について積分したのもも解である。よって、次式も解である。

$$\bar{c}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-D\alpha^2 t} \{B(\alpha)\cos\alpha\xi + C(\alpha)\sin\alpha\xi\} d\alpha \quad [\text{補-18}]$$

初期の分布を $\varphi(\xi)$ とすると[補-18]は次式となる。

$$\bar{c}(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \{B(\alpha)\cos\alpha\xi + C(\alpha)\sin\alpha\xi\} d\alpha \quad [\text{補-19}]$$

これは関数 $\varphi(\xi)$ に対する積分表示になっている。したがって、フーリエ積分公式(付録)によって

$$B(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(\zeta)\cos\alpha\zeta\} d\zeta \quad [\text{補-20}]$$

$$C(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(\zeta)\sin\alpha\zeta\} d\zeta \quad [\text{補-21}]$$

が得られる。これを[補-18]に代入し、加法定理を用い

て積分の順序を入れ替えると次式が得られる。

$$\bar{c}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-D\alpha^2 t} \cos\alpha(\xi - \zeta) d\alpha d\zeta \quad [\text{補-22}]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-D\alpha^2 t} \cos\alpha(\xi - \zeta) d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-\frac{(\xi - \zeta)^2}{4Dt}} \quad [\text{補-23}]$$

より、[補-22]は次式で表現できる。

$$\bar{c}(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{D\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta) \exp\left\{-\frac{(\xi - \zeta)^2}{4Dt}\right\} d\zeta \quad [\text{補-24}]$$

初期分布 $\varphi(\xi)$ が区間 $[-h, h]$ で一定値 φ_0 をとり ($h > 0$)、その外では 0 であると仮定する。このときの解を $\bar{c}_h(\xi, t)$ とすると

$$\bar{c}_h(\xi, t) = \frac{\varphi_0}{2\sqrt{D\pi t}} \int_{-h}^h \exp\left\{-\frac{(\xi - \zeta)^2}{4Dt}\right\} d\zeta \quad [\text{補-25}]$$

となる。この積分は、平均値の定理(付録)によって、区間 $[-h, h]$ 内にある x 軸上の任意点 x_1 に対し、

$$\int_{-h}^h \exp\left\{-\frac{(\xi - \zeta)^2}{4Dt}\right\} d\zeta = (2h) \exp\left\{-\frac{(x_1 - \xi)^2}{4Dt}\right\} \quad [\text{補-26}]$$

が成り立つ。

ここで初期に与えた物質質量 $M (=2h\varphi_0 A)$ を用いて、[補-25]を書き換え、 M を一定に保ちながら h を 0 に近づけると[デルタ関数(付録)]を想定、物質質量 M を一点 $x = 0$ で与えた解に相当する。ここで、 x_1 が区間 $[-h, h]$ 内にあり、 $h \rightarrow 0$ で $x_1 \rightarrow 0$ を考慮すると、最終解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{c}_0(\xi, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \bar{c}_h(\xi, t) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_0 h}{\sqrt{D\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - \xi)^2}{4Dt}\right\} \\ &= \frac{M}{2A\sqrt{D\pi t}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4Dt}\right\} \end{aligned} \quad \text{[補-27]}$$

・平均値の定理

$f(x)$ が $a < x < b$ で連続であるとき

$$\int_a^b f(x) dx = f(x_1)(b - a)$$

であるような x_1 が $a < x_1 < b$ の中に必ず存在する。

最後に、 $\bar{c}_0(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{4Dt}\right\}$ の変換にもどすと

$$\bar{c}_0(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{4Dt}\right\} \quad \text{[補-28]}$$

・デルタ関数

デルタ関数 $\delta(x)$ は以下の様に定義される。

$$\delta(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & (x < -h) \\ 1/2h & (|x| < h) \\ 0 & (x > h) \end{cases}$$

を得る。

この関数は $x=0$ において、通常の意味の連続性、微分可能性は持っていないが、この関数で定義される幅 $2h$ 、高さ $1/2h$ の棒状の面積は常に 1 となる。(図-付 1 に示すように、 $x=h$ のときも $x=-h/2$ のときも面積は 1 となる。)

付 録

・フーリエ積分

周期を持つ関数を無限個の三角関数に係数を掛けたものの和で表すのがフーリエ級数の考え方である。さらに、これを拡張し、周期を持たないで、しかも無限区間で定義されている関数 $f(x)$ を三角関数の積分で表そうとして考えられたのがフーリエ積分である。

フーリエ積分は以下で定義される。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \{A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x\} d\alpha$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(\xi) \cos \alpha \xi\} d\xi$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(\xi) \sin \alpha \xi\} d\xi$$

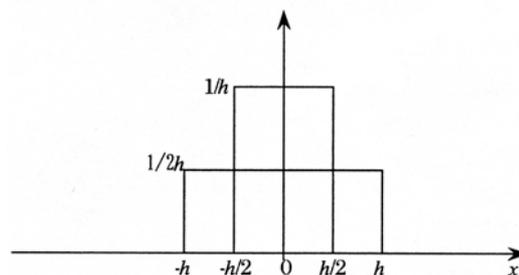


図-付 1



齋藤 大作 *

開発土木研究所
環境水工部
環境研究室
研究員



星 清 **

開発土木研究所
所長
工学博士