交通量均衡配分の基礎について

交通研究室

1．はじめに

交通量配分問題（traffic assignment problem）は、実際の交通網（点（node）の集合とそれらを結ぶ線（link）の集合からなる抽象化されたネットワーク構造）を対象とし、需要OD交通量と配分原則を与件として、ネットワークの各リンクを流れる交通量を予測する問題です。

配分原則の基本となっているのは、元来、経済学の分野で発展してきた「需要」と「供給」との間の均衡であり、いわゆる交通均衡問題の研究は1952年に発表されたWardrop均衡に始まり、理論の精緻化、解法の研究が進められて今や実用段階に達しています。

今日の交通量配分モデルは、大別すると均衡配分（equilibrium assignment）と非均衡配分（non-equilibrium assignment）に分類されるといってよく、実務においては、非均衡配分である分割配分（IA；Incremental Assignment）法が、未だ主流を占めています。

本稿では、均衡配分の理論及び各種均衡配分手法のうち、もっとも代表的かつ基本となる「需要固定型利用者均衡配分」について、その概念及び定式化、そして解法について解説を行います。

2．均衡配分理論の概要

（1） Wardropの2つの配分原則

J.G.Wardropは1952年に以下に示す2つの配分原則を提唱しており、今日の交通均衡理論の基本概念となっている。

【Wardropの第1原則】
利用される経路の旅行時間は皆等しく、利用されない経路の旅行時間よりも小さいか、せいぜい等しい
【Wardropの第2原則】
道路網上の総旅行時間が最小となる

第1原則は、「等時間原則」とも言われ、今日の交通均衡の基本概念をなしているものです。また、この配分原則は利用者が自己の経路選択行動を最適化した結果到達する均衡状態を表すことから利用者均衡配分（UE：User Equilibrium assignment）と呼ばれています。ただし、このような等時間原則が成立するためには、次の前提条件が満たされる必要があります。

【前提条件①】
全ての利用者は常に旅行時間を最小とするように行動する
【前提条件②】
利用者は常に利用可能な経路についての完全な情報を得ている。

すなわち、全ての利用者は常に旅行時間の最小化という同一の評価基準に基づいて行動し、かつその旅行時間情報は完全に正しいということが前提になります。

第2原則は、「システム最適化」とも言われ、これは道路システムを最大限に有効利用しようとする場合に適応出来る配分原則であることからシステム最適化配分（SO：System Optimum assignment）と呼ばれています。この配分原則では、個々のドライバーが選択するであろう最短の経路とは異なる経路を選択させる必要があり、その意味において道路計画者または道路管理者が計画指向的に適用する配分原則といえます。

これは第1原則とは厳密には異なるため、算出される交通量にも差が生じます。第1原則と第2原則は、常に等価なこと（必要十分条件を満たす）のように思えますが､実は両者が等価になるのは交通混雑がなく、常に旅行速度が一定の場合であり、実際には需要配分（AON：All-Or-Nothing assignment）を行った場合に相当します。

実際の行動に当てはめると、利用者は第1原則に基づいて「利用者は自己の最短経路を選択する」に従って走行しますが、利用者は自分が交通流に加わったこ

とによる道路利用者全体に与える影響は意識しません。したがって、道路利用者全体にとって最適な配分になるとは限らないのです。

（２）均衡配分モデルの種類

wardrop 均衡に始まる均衡問題の研究は、その後大きく発展し、その結果、今日では様々なタイプの均衡配分モデルが開発されています（**表ー１**）。

表ー１　交通量均衡配分モデルの種類及び概要

①需要固定型利用者均衡配分〔UE/FD: User Equilibrium assignment with Fixed Demand〕
・OD交通量は既に与えられる（固定される） ・最短経路以外の経路に配分されることがない ※　最も基本的な配分手法である
②需要変動型利用者均衡配分〔UE/VD: User Equilibrium assignment with Variable Demand〕
・OD交通量がネットワークの交通サービス条件によって変動する ・分布交通量や分担交通量との同時予測を行う統合モデル
③確率的利用者均衡〔SUE: Stochastic User Equilibrium assignment〕
・利用者の経路選択の多様性や不確実性に注目 ・「もはやどの利用者も経路を変更することによって自己の旅行時間をそれ以上短縮できないと信じている均衡状態」と定義される
④動的利用者均衡配分〔DUE: Dynamic User Equilibrium assignment〕
・出発した車が到着するまで、常にWardropの第１原則が成立している ・交通管理や交通制御といったソフト分野の計画に活用することができる。
⑤時間帯別均衡配分〔TUE: Time-of-day User Equilibrium assignment〕
・時間帯別に利用者均衡が成立し、前時間帯の残留交通量も加味されている点で半動的と言える。 ・渋滞時の道路網に及ぼす影響をみることができるためTDM施策評価等に有効である。

３．需要固定型利用者均衡配分モデルの定式化及び解法

均衡配分モデルのうち、最も基本的な配分モデルである需要固定型利用者均衡配分（UE/FD）について、その定式化及び解法について説明します。

（１）需要固定型利用者均衡配分の定式化

需要固定型利用者均衡配分は Wardrop の第１原則に従います。まず最初に、 Wardrop の第１原則を再度整理すると、以下のようになります。

（起終点間に存在する経路のうち）
① 利用される経路の所要時間は皆等しく
② 利用されない経路の所要時間よりも小さいかせいぜい等しい

そして、以下のように定式化されます。

●**Wardrop の第１原則の定式化**

①の定式化

$$f_k^{rs} > 0 \text{ のとき } c_k^{rs} = c^{rs} \qquad \forall k = K_{rs},\ \forall rs = \Omega$$

②の定式化

$$f_k^{rs} = 0 \text{ のとき } c_k^{rs} \geq c^{rs} \qquad \forall k = K_{rs},\ \forall rs = \Omega$$

【制約条件】

・OD 交通量は必ず保存される（突然誘発したり消滅したりしない）

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - Q^{rs} = 0 \qquad \forall rs = \Omega$$

・経路交通量は必ず正の数である（交通量にマイナスという概念はない）

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k = K_{rs},\ \forall rs = \Omega$$

ここで、関数：c_k^{rs} をリンクで構成される一般のネットワークに当てはめると

$$c_k^{rs} = \sum_{a \in A} \delta_{ak}^{rs} \cdot t_a(x_a) \qquad \forall k = K_{rs},\ \forall rs = \Omega$$

$$x_a = \sum_{k \in K_{rs}} \sum_{rs \in \Omega} \delta_{ak}^{rs} \cdot f_k^{rs} \qquad \forall a = A$$

f_k^{rs} ：rs 間第 k 経路の経路交通量
c_k^{rs} ：rs 間第 k 経路の経路所要時間（関数）
c^{rs} ：rs 間の最短経路所要時間
Q^{rs} ：rs 間の分布交通量
δ_{ak}^{rs} ：rs 間第 k 経路がリンク a を含む
TRUE＝1　FALSE＝0
x_a ：リンク a のリンク交通量
$t_a(x_a)$ ：リンク a のリンクコスト関数

（２）需要固定型利用者均衡配分の解法　～等価な数理最適化問題への置換

『利用者均衡が保たれる』ということは、『すべての利用交通量の所要時間の合計が最小になる』と言い換えることができます。

ここで、『利用交通量の所要時間の合計』は、『リンク所要時間の交通量による積分の合計』を算出することで得られることから、目的関数は制約条件を持つ以

下のような関数になり、これを最小とする解（最適化）を求めれば良いことになります。

・目的関数の最小値を見つける

$$\min : Z_p = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

【制約条件】

・OD 交通量は保存される

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{\ rs} - Q^{rs} = 0 \qquad \forall rs = \Omega$$

・リンク交通量は利用する経路交通量の合計である

$$x_a = \sum_{k \in K_{rs}} \sum_{rs \in \Omega} \delta_{ak}^{\ rs} \cdot f_k^{\ rs} \qquad \forall a = A$$

・交通量にマイナスという概念はない。

$$f_k^{\ rs} \geq 0, \quad x_a \geq 0$$

上記の問題は、制約条件付き非線形最適化問題となります。目的関数 Z_P をこれと等価な Lagrangian 関数 L を設定しなおし、その問題の最適性条件である Kuhn-Tucker 条件を調べることによって、上記最適化問題の解が利用者均衡を満足することを示します。「Kuhn-Tucker 条件」とは、通常、微分＝0とするような制約条件のない最小化問題の一次の最適性条件を制約条件付きの問題の最適性条件に拡張したものと考えてください。

・目的関数 Z_p と等価な Lagrangian 関数

$$Z_p(f) = Z_p(f) - \sum_{rs \in \Omega} \lambda_{rs} \left\{ \cancelto{=0}{\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{\ rs} - Q_{rs}} \right\} = L(f, \lambda)$$

・Kuhn-Tucker 条件

$$f_k^{\ rs} \frac{\partial L(f^*, \lambda^*)}{\partial f_k^{\ rs}} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial L(f^*, \lambda^*)}{\partial f_k^{\ rs}} \geq 0,$$

$$f_k^{\ rs} \geq 0 \quad \forall k, \ \forall rs \cdots ①$$

$$f_k^{\ rs} \frac{\partial L(f^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_{rs}} = 0 \quad \forall rs \qquad \cdots ②$$

ここで①式は、

$f_k^{\ rs} > 0$ のとき

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{\ rs}} = 0 \qquad \forall k = K_{rs}, \ \forall rs = \Omega$$

$f_k^{\ rs} = 0$ のとき

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{\ rs}} \geq 0 \qquad \forall k = K_{rs}, \ \forall rs = \Omega$$

Kuhn-Tucker 条件式を展開すると以下のようになり、Wardrop の第１原則に相当するとともに、Lagrangian 乗数 λ_{rs} は最短経路所要時間 c_{rs} と等価であることが証明されます。

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{\ rs}} = \frac{\partial \left\{ \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w)dw \right\}}{\partial f_k^{\ rs}} - \frac{\partial \left[\sum_{rs \in \Omega} \lambda_{rs} \left\{ \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{\ rs} - Q_{rs} \right\} \right]}{\partial f_k^{\ rs}}$$

$$= \sum_{a \in A} \frac{d \left\{ \int_0^{x_a} t_a(w)dw \right\}}{dx_a} \cdot \frac{\partial x_a}{\partial f_k^{\ rs}} - \lambda_{rs} \qquad \forall k = K_{rs}, \ \forall rs = \Omega$$

$$t_a(x_a)$$

また、

$$\frac{\partial x_a}{\partial f_k^{\ rs}} = \frac{\partial \left\{ \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} \delta_{a,k}^{\ rs} f_k^{\ rs} \right\}}{\partial f_k^{\ rs}} = \delta_{a,k}^{\ rs}$$

$$\forall k = K_{rs}, \ \forall rs = \Omega, \ \forall a = A$$

よって

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{\ rs}} = \sum_{a \in A} \delta_{ak}^{\ rs} t_a(x_a) - \lambda_{rs} = c_k^{\ rs} - \lambda_{rs}$$

$$\forall k = K_{rs}, \ \forall rs = \Omega$$

これを、先ほどの Kuhn-Tucker 条件式に当てはめると

$$f_k^{\ rs} > 0 \text{のとき} \quad \frac{\partial L}{\partial f_k^{\ rs}} = c_k^{\ rs} - \lambda_{rs} = 0$$

$$\forall k = K_{rs}, \forall rs = \Omega$$

$$f_k^{\ rs} = 0 \text{のとき} \quad \frac{\partial L}{\partial f_k^{\ rs}} = c_k^{\ rs} - \lambda_{rs} \geq 0$$

$$\forall k = K_{rs}, \forall rs = \Omega$$

以上の展開により、Lagrangian 乗数 λ_{rs} が、最短経路所要時間 c_{rs} であるとともに、Wardrop の第１原則である「利用される経路の所要時間は皆等しく、利用されない経路の所要時間よりも小さいかせいぜい等しい。」ことが証明されます。

4．おわりに

実務においては、なお非均衡配分である分割配分が主流を占めていますが、遠からず実務でも均衡配分が用いられる割合が高くなっていくものと考えられます。一つの例として、「費用便益分析マニュアル」[4)]において、交通量の配分手法として、「Q-V 式あるいはリンクパフォーマンス関数を用いた配分」と記載されたところです。「Q-V 式」とは、交通量と旅行速度の関係を記述した式で分割配分において用いられる関数です。「リンクパフォーマンス関数」とは、リンクの交通量と走行費用(一般には走行時間が用いられる)の関係を表す関数で均衡配分において用いられる関数です。

均衡配分の定式化及びその解法は数式の羅列で難解ですが、せめて、 Wardrop の2つの配分原則がその根底にあることを記憶に留めていただけると幸いです。

（文責　高橋　尚人）

参考文献

1）交通ネットワークの均衡分析—最深の理論と解法：(社)土木学会　平成10年３月

2）交通量配分理論の系譜と展望：加藤晃　土木学会論文集　第389号／Ⅳ-8　1998年１月

3）交通量の予測：(社)交通工学研究会編　昭和61年12月

4）費用便益分析マニュアル：国土交通省 道路局 都市・地域整備局　平成15年８月

5）土木用語大辞典：社団法人土木学会編　1999年２月

6）道路交通需要予測の理論と適用　第Ⅰ編　利用者均衡配分の適用に向けて：社団法人土木学会　土木計画学研究委員会　交通需要予測技術検討小委員会編　平成15年８月