

モールの応力円について

土質基礎研究室

はじめに

構造物や基礎地盤などに荷重が作用すると、その物体の中には応力が生じます。その応力の状態は、一般には物体内の各場所で異なるので、それぞれ作用する応力はその応力が働く方向(面)によって異なります。

Q 1 : 何で応力状態を円で表すことができるの ?

A 1 : 力が働いているある物体の中の極めて小さい部分の応力状態を数学的に表現すると、円の方程式と同じ形になるからです。

図-1 (a)に示すような安定地盤中のある土の小さい四角形の部分について考えます。地盤中のある面では、応力(σ 、 τ)が働いていることが知られています¹⁾。そこで、この四角形内の角 θ をなす面に働く応力(σ 、 τ)を求めるために、この面を斜面とする三角形を考えます。この三角形の境界面に働く応力を図-1 (b)のように垂直応力(σ_x 、 σ_y)とせん断応力(τ_{xy} 、 τ_{yx})がそれぞれ働いていると仮定します。

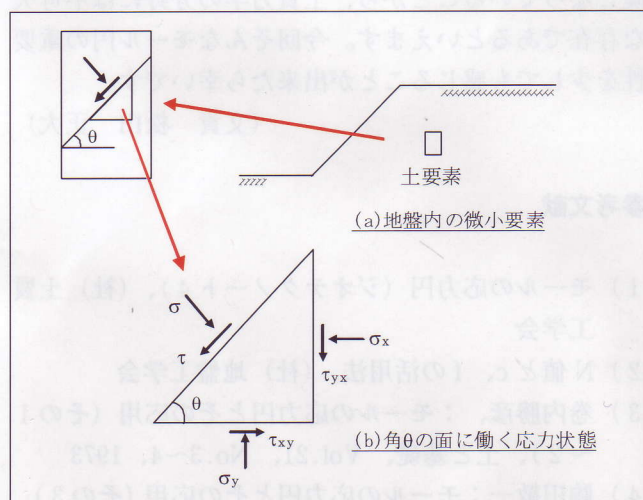


図-1 土中の任意深さで考えた土の微小部分の応力

この面に働く(σ 、 τ)は、力の釣り合い式を考えて、解いていくと、以下の式が得られます。この式は地盤内のある点において、角 θ の面に働く応力の状態を表

このような応力の状態を合理的に図で表したのがモールの応力円です¹⁾。私達は地盤工学に関わる際に、『モールの応力円』という言葉は一度は耳にしたことがあると思います。今回の当研究室の『Q & A』はこのモールの応力円について簡単に触れてみたいと思います。

した一般式として知られています。

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}$$

次にこの σ と τ の式を変形して1つの式にまとめると、

$$\left[\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2$$

のようになり、この方程式は中心(a、b)、半径rの円の方程式($(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$)に当てはめることができます。つまり、この応力で表した方程式は、ある地盤内の無数の面に働く応力の軌跡を幾何学的に表現すれば円になることを意味しています。

また、角 θ をなす面に働く応力(σ 、 τ)のうち、垂直応力 σ が最大、最小になり、せん断応力 τ が0となる面が存在します。この時の応力をそれぞれ最大主応力 σ_1 と最小主応力 σ_3 と呼んでいます。これら主応力が働いている土要素をモールの応力円の方程式で表すと、

$$\left[\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right]^2$$

となり、一般的にはモールの応力円はこちらの形で表現されています。

Q 2 : モールの応力円はどこで使われているの ?

A 2 : モールの応力円は実に様々な土質力学の分野で利用されています。直接利用されているものもあれば、直接的ではないけれど私達が普段用いている土の力学的な問題を考える際の理論や公式または、解析法においてモールの応力円が間接的に関わっている場合が多くあります。

モールの応力円を直接用いるものとして、モール・クーロンの破壊線を用いて土のせん断強度パラメータ(c , ϕ)を求める方法が挙げられます。例えば、図-2のように現場から不攪乱試料を採取して三軸圧縮試験機を用いて拘束圧(最小主応力 σ_3)を変えてせん断試験を行い、供試体が破壊した時の各軸圧(最大主応力 σ_1)から破壊時のモールの応力円を求めて、破壊包絡線を引いて(c , ϕ)を求めます。これは、よく用いられることもあり、最も知られているモールの応力円の利用方法だと思います。

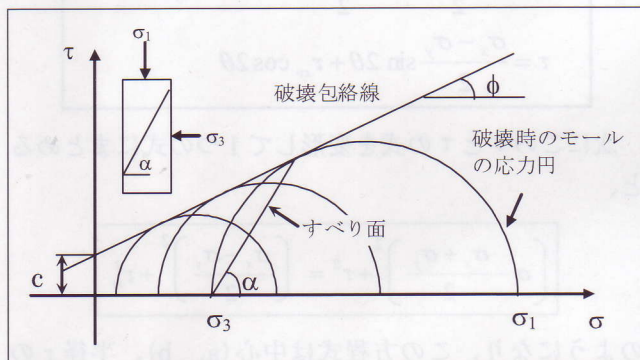


図-2 モール・クーロンの破壊規準²⁾

間接的にモールの応力円が関わっているものとして、地盤の変形解析を行う際に、カムクレイモデルをはじめとする様々な基本的な土のモデル(構成式)が使われていますが、これらの基本的な土のモデルは元をたどれば、モールの応力円が基礎となっていることが多いのです。また、モールの応力円上には『極(ポール)』と呼ばれる点が存在します(図-3)。これはモールの応力円上の応力が作用する全ての面が必ず通る点であって、この極とモールの応力円上の破壊時の応力を結ぶことによりすべり線が求まる方法(用極法)を利用すれば、設計で用いられている土圧を求める際のランキン土圧の理論や、支持力公式の基礎となっているテルツァーギの支持力理論がモールの応力円で説明することができます。更にこの用極法は、すべり面解析

などにも有効な利用方法だと言われています¹⁾³⁾⁴⁾。

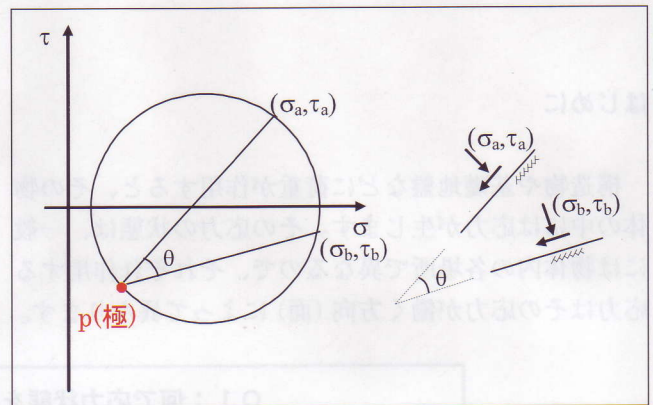


図-3 ポールの説明図

おわりに

今回は現場的な疑問というよりは机上の上での疑問としてモールの応力円について少し触れてみました。パソコンの普及で様々な優れた解析ソフト等が開発されている中、古典的とも言えるモールの応力円に意味があるのかと疑問を持つかも知れません。しかしモールの応力円は物体の応力状態を幾何学的に円で表現でき、その応力状況や変化を理解することができます。また、土質力学の様々な理論、解析、せん断試験の基礎となっていることから、土質力学の分野には不可欠な存在であるといえます。今回そんなモール円の重要性を少しでも感じる事が出来たら幸いです。

(文責 松田 正大)

参考文献

- 1) モールの応力円(ジオテクノート4)、(社)土質工学会
- 2) N値と c , f の活用法、(社)地盤工学会
- 3) 巻内勝彦: モールの応力円とその応用(その1~2)、土と基礎、Vol.21, No.3~4, 1973
- 4) 駒田敬一: モールの応力円とその応用(その3)、土と基礎、Vol.21, No.5, 1973