

土壌の毛管現象に關する 2, 3 の考察

技 師 宮 川 勇

Studies on the capillary phenomena in soils

By Miyakawa Isamu

要 旨

土壌中の水の、毛管上昇の時間的過程について簡単な假定の下に數學的側面解析を試み、透水係数と毛管上昇高を含む關係を得た。更に同じ考を押進めて毛管移動を考慮にいたした場合の湛水の地中への滲透を解析すると共に、水面降下の時間的過程を追跡することによつて土壌の上記定数を求め得べき事を提言した。なほ土中の毛管上昇水分分布が土の粒度分布並に Packing の状態との間に持つと考へられる密接な關係につき1つの見方を示唆した。

目 次

§ 1. 緒 言	32
§ 2. 毛管上昇の時間的過程	33
§ 3. 一定水位の湛水ある場合の地中への滲透現象	36
§ 4. 一定量の湛水が地中へ滲透する現象	37
§ 5. 水平方向への毛管移動	39
§ 6. 毛管上昇水の分布状態に關する側面的考察	40
§ 7. 結 言	42

§ 1. 緒 言

土中に於ける毛管現象は土質工學上並に農業土壤學上の諸般の問題に關聯し、その重要さは異論のない所である。今回は土中の水分移動に關する基本的考究の一端として、目次に示す様な事項について側面的解析を試みた。

土壌は單に幾何學的に見ても大小、形狀各様な粒體の各様な詰合の集合體であつて、之だけでもその取扱は困難であるのみならず、更に又土の性質の本質的な部分をなすものと考へられる物理化學的諸性質をも併せ考慮する時は本問題の數理的取扱は至難のことに屬する。

即ち、土が水頭を示すべき原因としては毛管現象のみならず滲透壓、吸著、イオン和水、等が考へられるので、之等の諸原因に依る水頭を分離して測定することは目下の所困難であり、又其等の性質の大部はなほ物理化學的に解明せられて居ない現状に於ては、今取扱ひ得る程度の假定を設けて數理的に處理しても、之を以て土の實態を把握するには程遠く、又之を以て直に實驗結果を解析的に檢討することは出来ない。

筆者はこの問題を解く一の道程として以下に記す様な若干の考察を試み、又その應用的事例につき 2, 3 の問題に言及した。固より多くの矛盾と勝手な取扱をしているが豫め諒とされたい。

§ 2. 毛管上昇の時間的過程

毛管現象に関する實驗資料は他の多くの土質工學上の實驗例と同様に餘り多くをみない。特にその時間的過程に留意したものは筆者の寡聞か2,3の發表例を知るに過ぎぬ。筆者は嘗て諸種粒度の土質につき數種の詰込状態で實驗したが、不幸にしてそのdataを手許に持たぬため、當時の報文(“路盤の凍上機構に就て” 宮川勇, 滿鐵鐵道技術研究所, 昭和14年)よりその實驗例圖を引用すれば圖-1の土質につき圖-2a~圖-2cの通りである。即ち粒度の細いもの(粘土)程透水抵抗が大きいので、初期上昇高は低いが究極上昇高は大であり、粒度の粗いもの(砂)では逆の現象を示す。この現象を解析する一階程として、今回は、土層中の間隙を毛細管上昇に對して

equivalentな圓管(之はしかく簡単に定められるものではなく尙ほ多くの考察を必要とするもので、毛管現象を支配する諸因子に對して單一の圓管を假定すること自體に不合理性を内包するものではあるが、之に就ては別の機會に考究したい)に等置し得るものとして、この毛細管中における自由水面からの水の上昇過程を考へることとする。茲には表面張力、重力、粘性抵抗の間の平衡關係だけを考へ、上昇水の加速度の項は無

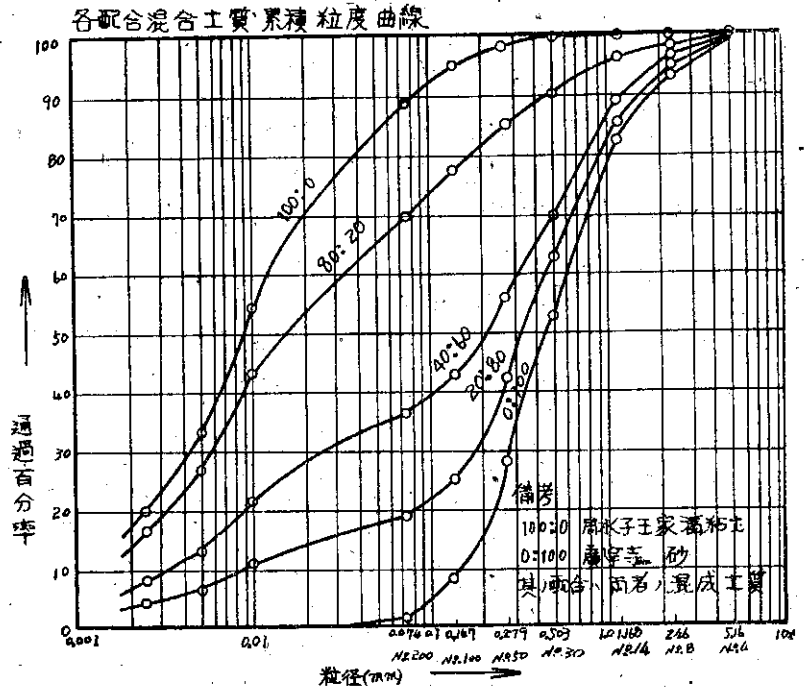


圖-1

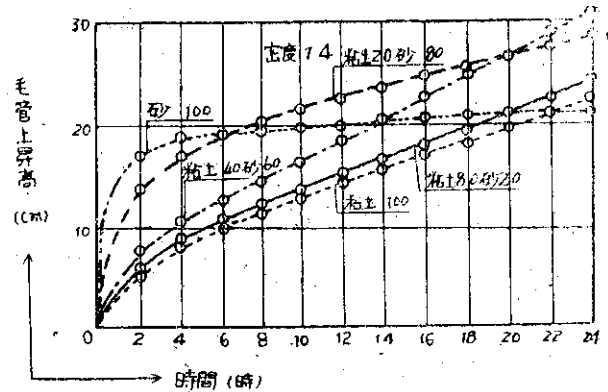


圖-2b

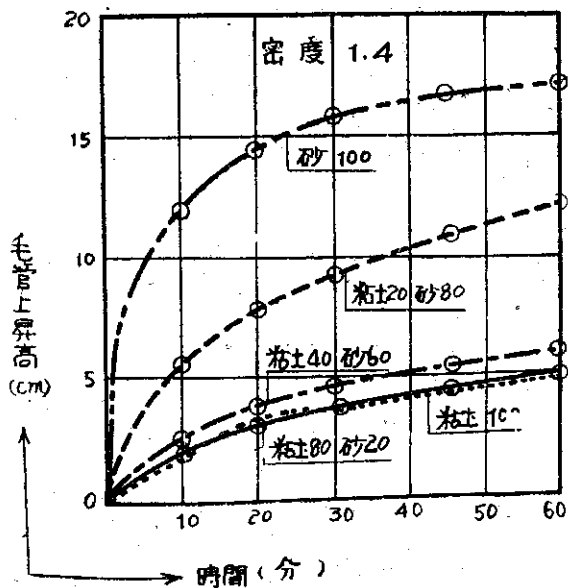


圖-2a

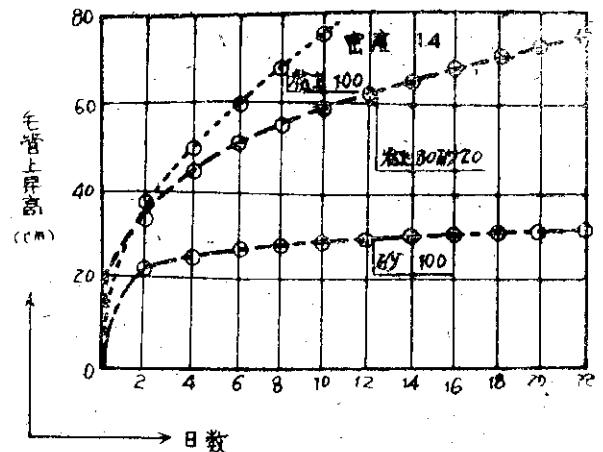


圖-2c

視し得るものとして扱つた。

先づ粘性抵抗を考へるに、毛細管内の水の流動が或時刻 t に於て 圖-3 の状態にあるものとし、中心より半径 r なる位置の流管の接觸面に働く摩擦力 f を一應次の如く表はせるものとする。

$$f = 2\pi r h \eta \frac{dv}{dr} \quad (\text{dyne})$$

但し v : 圓管中心より r なる位置の流速, cm/sec

η : 粘性係数, dyne·sec/cm²

故に半径 δr だけ離れた流管では

$$\delta f = \frac{\delta f}{\delta r} \delta r = 2\pi h \eta \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \delta r$$

だけ多くなる。水柱兩端に於ける單位面積當りの壓力を p_1, p_2 とすれば δf と平衡に在る壓力差は $2\pi r \cdot \delta r (p_1 - p_2)$ であるから

$$2\pi r \delta r (p_1 - p_2) + 2\pi h \eta \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \delta r = 0$$

又は

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{p_1 - p_2}{\eta h} r$$

之を積分して $r = R$ の時, $v = 0$ なる境界條件を満足せしめれば

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta h} (R^2 - r^2)$$

故に單位時間に流動する水の體積は

$$Q = \int_0^R 2\pi r dr \cdot v = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8\eta h} R^4$$

今、この時の平均流速を

$$\frac{Q}{\pi R^2} = \frac{p_1 - p_2}{8\eta h} R^2 = \frac{dh}{dt}$$

と置き得るものとするれば

$$p_1 - p_2 = \frac{8\eta h}{R^2} \frac{dh}{dt}$$

全面積については

$$\pi R^2 (p_1 - p_2) = 8\pi \eta h \frac{dh}{dt} \quad (\text{dyne}) \quad \dots\dots\dots (1)$$

但し η : dyne·sec/cm², h : cm, t : sec

次に表面張力の項を考へるに、或る溫度に於ける水の表面張力を σ dyne/cm, 水の圓管との接觸角を θ とすれば、全圓周につき $\pi \sigma D \cos \theta$ となるが、 θ はこの場合微小なりとして $\theta \approx 0$ とすれば

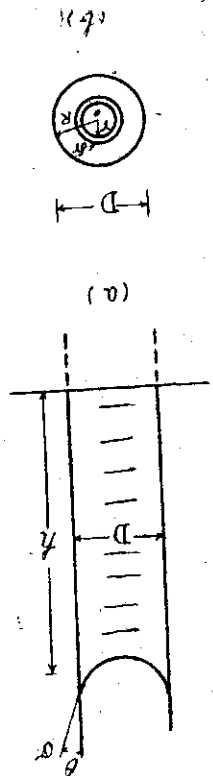
$$\pi \sigma D \quad (\text{dyne}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

但し D : cm (圓管直径)

次に上昇水柱に對する重力の作用は水の密度を ρ gr/cm³, 重力加速度を g cm/sec² とすれば

$$\frac{\pi D^2}{4} \rho g h \quad (\text{dyne}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

從つて上昇水柱の加速度の項は無視し得るものとするれば結局、圓管内の毛管上昇に對して次の關係が成立つ。



$$\pi \sigma D - 8\pi \eta h \frac{dh}{dt} - \frac{\pi D^3}{4} \rho g h = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

又は書直して

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4\sigma D - \rho g D^3 h}{32\eta h} \quad \dots\dots\dots (5)$$

上式を $t=0$ にて $h=0$ なる初期条件に於て解けば

$$\left. \begin{aligned} h &= H \left(1 - e^{-\frac{Kt-h}{H}} \right) \quad (\text{cm}) \\ \text{茲に } K &= \rho g D^3 / 32\eta \quad (\text{cm/sec}) \\ H &= 4\sigma / \rho g D \quad (\text{cm}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。(6) 式から明な様に $t = \infty$ の時 $h = H$, 即ち H は究極毛管上昇高を表はす。(之は周知の毛管上昇高を示す式である。)

又 (5) 式を書直せば

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho g D^3}{32\eta} \frac{\left(\frac{4\sigma}{\rho g D} - h \right)}{h} = K \left(\frac{H-h}{h} \right) \quad \dots\dots (5) a$$

となり, この場合に Darcy の法則が適用されるとすれば K は毛細管上昇時に於ける透水係數に相當するものである事が解る (圖-4)。又 (5)a 式は

$$\frac{dh}{dt} = K \left(\frac{H-h}{h} \right) = KH \frac{1}{h} - K \quad \dots\dots\dots (5) b$$

であるから, 若しこの現象が實驗的に純粹に觀測せられるならば圖-5の様にして K, H を求め得ることになり, 又從つてこの時のその土質の本現象に對する equivalent な圓管 (隙間) の直徑 D が實驗的に求められる筈である。

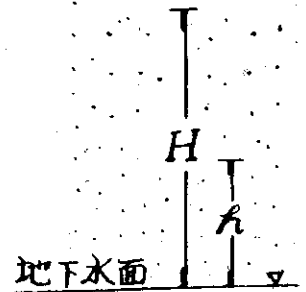


圖-4

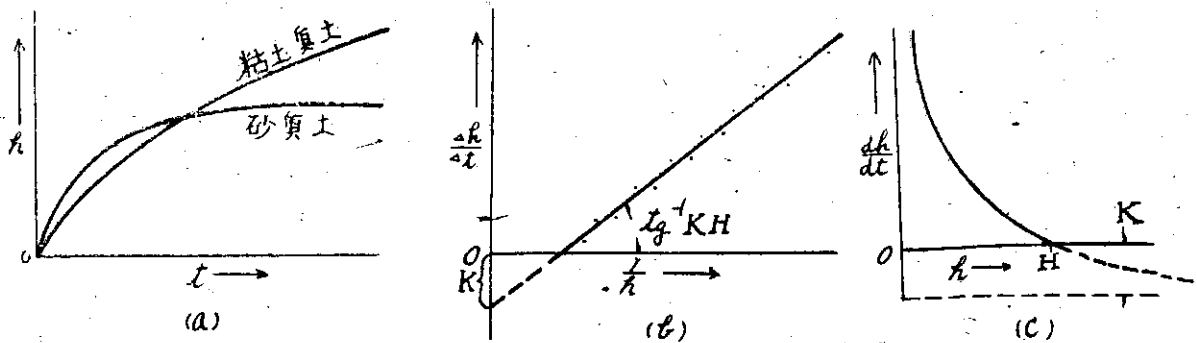


圖-5

又 (6) 式に於ける K, H の關係より

$$K = \left(\frac{\sigma^2}{2\rho g \eta} \right) \frac{1}{H^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となるが, 實際の土の場合には初めに述べた假定の不合理性により, 大部事情が異なるであらう。

(6) 式を書改めれば次の如くなる。

$$t = \frac{1}{K} \left\{ H \ln \frac{H}{H-h} - h \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

次に水柱表面より何等かの原因 (蒸發, 凍結時に於ける凍結面への水の移動, その他) で, 常に α cm/sec なる消耗がある時は (5) 式に於て

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4\sigma D - \rho g D^3 h}{32\eta h} - \alpha$$

とし、之を解けば前述の K, H の代りに夫々

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{\rho g D^2 + 32\eta a}{32\eta} = K + a \\ H_1 &= \frac{4\sigma D}{\rho g D^2 + 32\eta a} = \left(\frac{K}{K + a} \right) H \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

とおけば (6) 式の関係はそのまま適用されることが判る。我々は實驗的に測定し得たとしても、この後者の場合に類似の現象を見てゐることにならう (圖-6)。

尙ほ (6) 式又は (8) 式により $D = 0.01 \sim 0.0001$ cm の場合を温度 20°C に於て計算したものは圖-7 に示す様になる。圖-2 と對照せられたい。

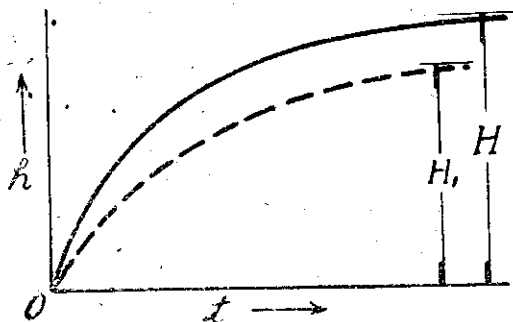


圖-6

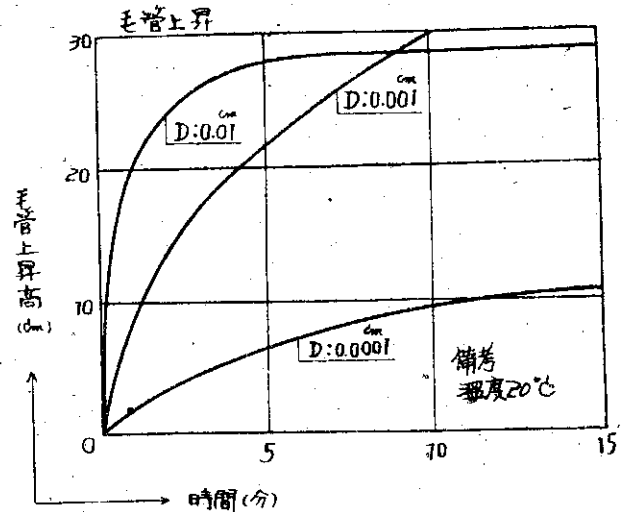


圖-7

§ 3. 一定水位の湛水ある場合の地中への滲透現象

§ 2 では一般に取扱つて居る上方への毛管現象を考へたが、茲では同様な假定の下に毛管現象を考慮した表記の場合を解いてみる。

圖-8 の様に $H_0 = \text{const.}$ なる定水位の湛水ある場合 § 2 の場合と同様に考へ、今の場合には次の関係になるものとすれば

$$\pi \sigma D + \frac{\pi D^2}{4} \rho g (h + H_0) - 8\pi \eta h \frac{dh}{dt} = 0 \dots\dots (10)$$

$t = 0$ なる時 $h = 0$ とし、又前と同様に

$$\begin{aligned} K &= \rho g D^2 / 32\eta, \quad H = 4\sigma / \rho g D, \quad \text{及び}^* \\ H' &= H + H_0 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

と置けば

$$t = \frac{1}{K} \left\{ h + H' \ln \frac{H'}{H' + h} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

又は

$$h = H' \left(e^{\frac{-Kt + h}{H'}} - 1 \right) \dots\dots\dots (13)$$

となり、又前節と同様にして

$$\frac{dh}{dt} = K \left(\frac{H + H_0 + h}{h} \right) = K \left(\frac{H' + h}{h} \right) = KH' \frac{1}{h} + K \dots\dots\dots (14)$$

が得られ、圖-9 の如き関係となり、 K はこの場合の透水係数を表はすことになる。

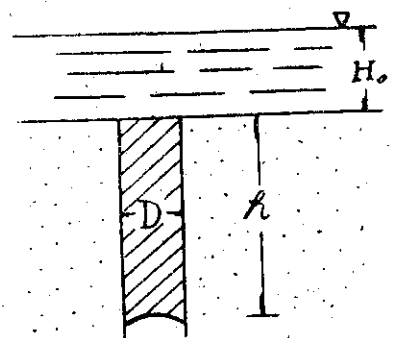


圖-8

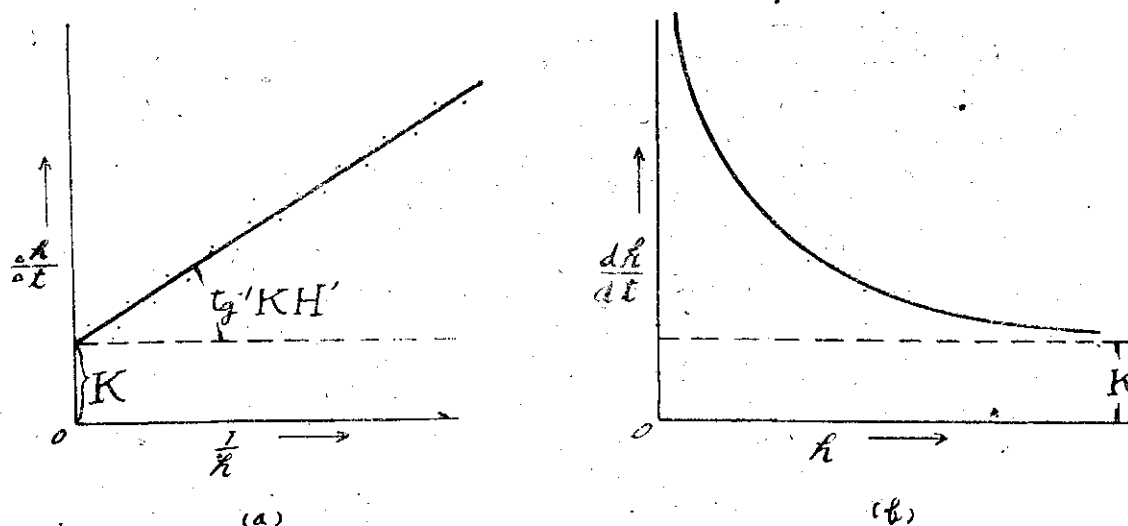


圖-9

§ 4. 一定量の湛水が地中へ滲透する現象 (溜水の滲透現象)

間隙率 λ なる土壤の表面に最初深度 H_0 なる溜水が出来、雨後の水の供給がない場合の地表水の滲透現象を考へてみる (圖-10)。

$t=0$ の時 $h=0$ とし、 t なる時刻に h 迄滲透し、滲透部分の土は水で飽和し (實態と違ふが)、その時に地表水は ψ 迄低下したとする。然る時は

$$\psi = H_0 - \lambda h$$

である筈であるから、この場合には

$$\pi \sigma D + \frac{\pi D^2}{4} \rho g (h + \psi) - 8\pi \eta h \frac{dh}{dt} = 0 \quad \dots (15)$$

となるものとし、又 (11) 式の関係及び

$$1 - \lambda = \xi$$

とおいて、これを用ひれば

$$\frac{dh}{dt} = K \left(\frac{H' + \xi h}{h} \right) = KH' \frac{1}{h} + \xi K \quad \dots (16)$$

之を解けば

$$t = \frac{1}{K\xi^2} \left\{ \xi h + H' \ln \frac{H'}{H' + \xi h} \right\} \quad \dots (17)$$

$$h = \frac{H'}{\xi} \left(e^{\frac{-K\xi^2 t + \xi h}{H'}} - 1 \right) \quad \dots (18)$$

又上式は $\lambda/\xi = \lambda/(1-\lambda) = \varphi$ (間隙比), $H_0/H = \zeta$, $h/H = \tau$ とおけば

$$\frac{dh}{dt} = K \left(\frac{1 + \zeta}{\tau} + \xi \right) \quad \dots (16) a$$

$$t = \frac{H}{K\xi^2} \left\{ \xi \tau - \left(1 + \zeta \right) \ln \left(1 + \frac{\xi \tau}{1 + \zeta} \right) \right\} \quad \dots (17) a$$

但し上式の関係は $\psi = 0$ 即ち $H_0 = \lambda h$ 又は $h = H_0/\lambda$, $\tau = \zeta/\lambda$ 迄成立し、この時地表水は無くなる。この時には

$$\left(\frac{dh}{dt} \right)_{\psi=0} = K \left(\frac{H' + \xi h}{h} \right) = K \left(\frac{\lambda H}{H_0} + 1 \right) = K \left(\frac{\lambda}{\zeta} + 1 \right) \quad \dots (16) b$$

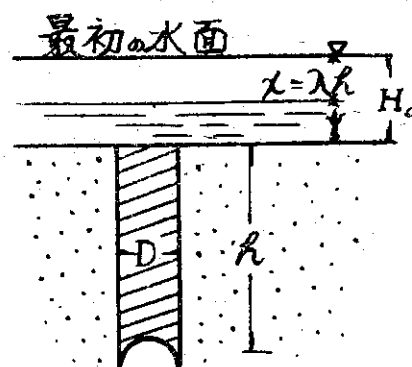


圖-10

$$\begin{aligned}
 (t)_{\varphi=0} &= \frac{1}{K\xi^2} \left\{ \frac{H_0}{\varphi} + H' \ln \frac{H'}{H' + \frac{H_0}{\varphi}} \right\} \\
 &= \frac{H}{K\xi^2} \left[\frac{\xi}{\varphi} - \left(1 + \xi\right) \ln \left\{ 1 + \frac{\xi}{\varphi(1+\xi)} \right\} \right] \dots\dots\dots (17) b
 \end{aligned}$$

地表水が滲透し終つて後は $h = H_0/\lambda$ なる水柱が重力の作用により粘性抵抗に逆つて下降するものと考へ、この時にも次の関係が成立つとすれば、

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi D^3}{4} \rho g \left(\frac{H_0}{\lambda} \right) - 8\pi\eta \left(\frac{H_0}{\lambda} \right) \frac{dh}{dt} &= 0 \\
 \frac{dh}{dt} &= \frac{\rho g D^3}{32\eta} = K \dots\dots\dots (16) c
 \end{aligned}$$

となり、 K なる速度で水柱が移動することになる。 $t=0$ で $h = H_0/\lambda$ とすれば

$$h = \frac{H_0}{\lambda} + Kt \dots\dots\dots (19)$$

となる。

(16), (16)b 及び (16)c を図示すれば 圖-11 の様になる。 dh/dt は $h = H_0/\lambda$ に於て地表水がなくなり、そこで $\lambda KH/H_0$ から K に漸變するものと考へられる。

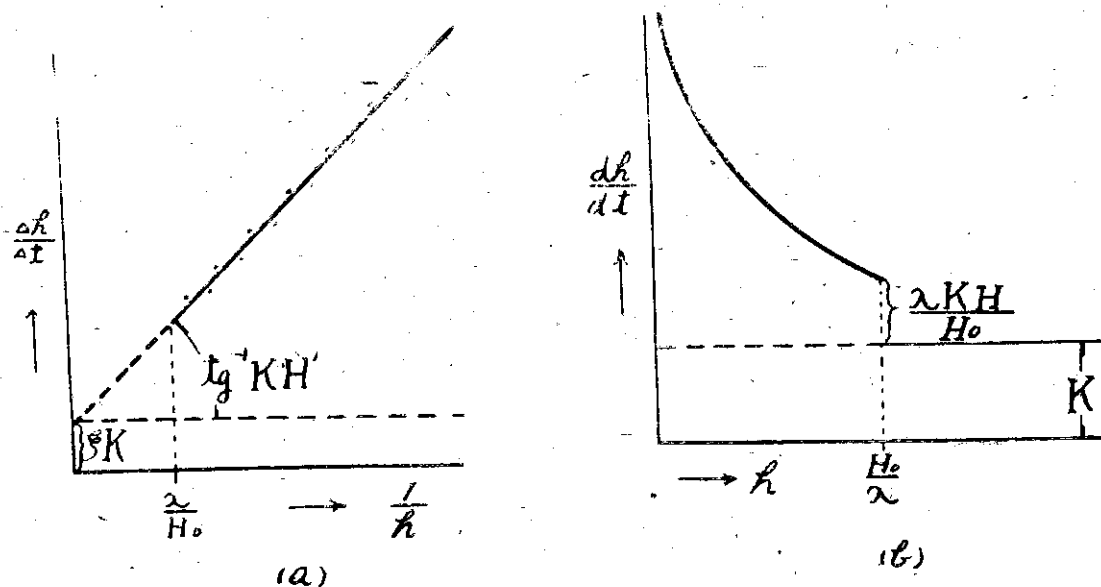


圖-11

なほ本項の現象を實驗的に追究する時には $t \sim h$ を測定すると、水で未飽和な部分を追ふ場合が多いので、次記の様に水面降下の時間的経過を追跡する方が實際的であり、又前記の假定に鑑みて正しい取扱方といへやう。

即ち t なる時刻の水面降下深さを X とすれば $X = \lambda h$ となり、この時は (15) 式の関係は次の様になる。

$$\pi \sigma D + \frac{\pi}{4} D^3 \rho g \left\{ H_0 + X \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right\} - \frac{8\pi\eta}{\lambda^2} X \frac{dX}{dt} = 0 \dots\dots\dots (15) a$$

又

$$\frac{1}{\lambda} - 1 = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{\xi}{\lambda} = \frac{1}{\varphi} = \omega$$

とおけば

$$\frac{dX}{dt} = \lambda^2 K \left(\frac{H' + \omega X}{X} \right) = \lambda^2 \omega K + \lambda^2 K H' \frac{1}{X} = \lambda \xi K + \lambda^2 K H' \frac{1}{X} \dots\dots (16) d$$

$$X = \frac{H'}{\omega} \left(e^{\frac{-\lambda^2 \omega^2 K t + \omega X}{H'}} - 1 \right) = \frac{\lambda H'}{\xi} \left(e^{\frac{-K \xi^2 t + \xi X}{H'}} - 1 \right) \dots\dots\dots (18) a$$

之等の関係により、前と同様にして K, H, D を求めることが合理的であると考へられる。

又、この場合には測定上の h に拘らず X/λ が水飽和の状態に置換へた時の實質的滲透深さであり、 X/λ と h との比、即ち $X/\lambda h$ は $0 \sim h$ の部分の平均飽水率（土質間隙の飽水度）を表はすことになり、これによつて平均飽水率の遷移状態が知られる。

なほこの時 λ の代りに空隙率（air void ratio, 全間隙より水の占める部分を除いた空気部分のみの土體全容積に対する比）を用ひれば（實驗的に豫め求めておく）未飽和な部分的含水土壤に對しても本法を適用してよいと思ふ。

又、ここに記した考方に基いて土の K, H を實驗的に求める場合には土體部の断面（例へば A ）に對して湛水部の断面（例へば a ）を小さくして行ふのが便であり、この時は (15) 式の h の代りに $X = \frac{\lambda A}{a} h$ とおいて解けばよい。その結果は

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{\lambda A}{a} \right)^2 K \left(\frac{H' + \varepsilon X}{X} \right), \quad \varepsilon = \frac{a}{\lambda A} - 1 \dots\dots\dots (16) e$$

となり、これから土の夫々の定数が求められる。

§ 5. 水平方向への毛管移動

圖-12 の様に土壤内を水が水平方向に移動する場合には同様にして

$$\pi \sigma D - 8\pi \eta h \frac{dh}{dt} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

となるものとすれば $t=0$ にて $h=0$ として

$$h^2 = \frac{\sigma D}{4\eta} t = 2KHt \dots\dots\dots (21)$$

但し K, H は (6) 式の場合と同様である。

實際に土の場合には一般に $h^m \propto t$ で $m > 2$ となるらしい。

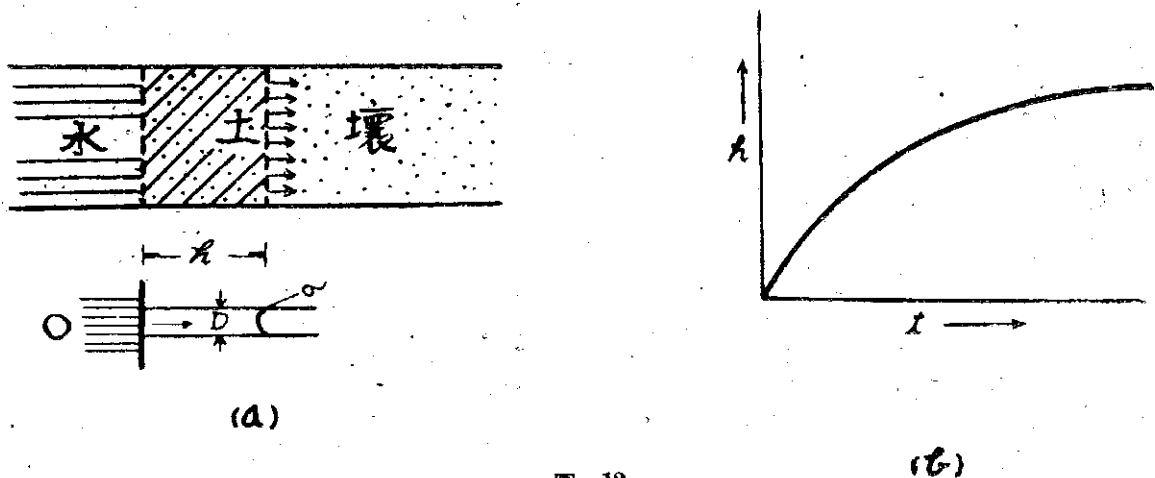


圖-12

又、水先速度は

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sigma D}{8\eta} \frac{1}{h} = KH \frac{1}{h} \dots\dots\dots (22)$$

又 (21) 式に K の値を入れれば

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{\rho g \gamma}{2\sigma^2} \left(\frac{h^2}{t} \right)^2 \\ h^4/t^2 &\propto K \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

となるが、土の場合には多少趣を異にするかと思ふ。

この現象並に解析結果は現場などで簡単に砂や土の毛管現象、透水係数の判定をするのに利用し得るであらう。尚ほ § 2, § 3, § 5 の解式を用ひて、温度 20°C で計算した数例を 圖-14 に例示する。

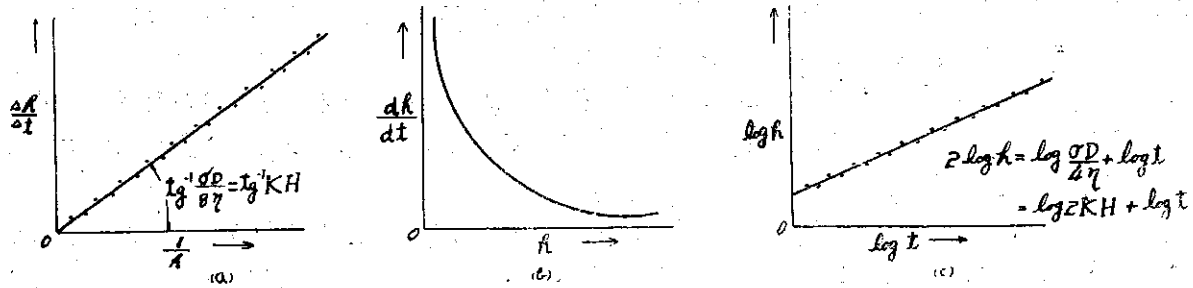


圖-13

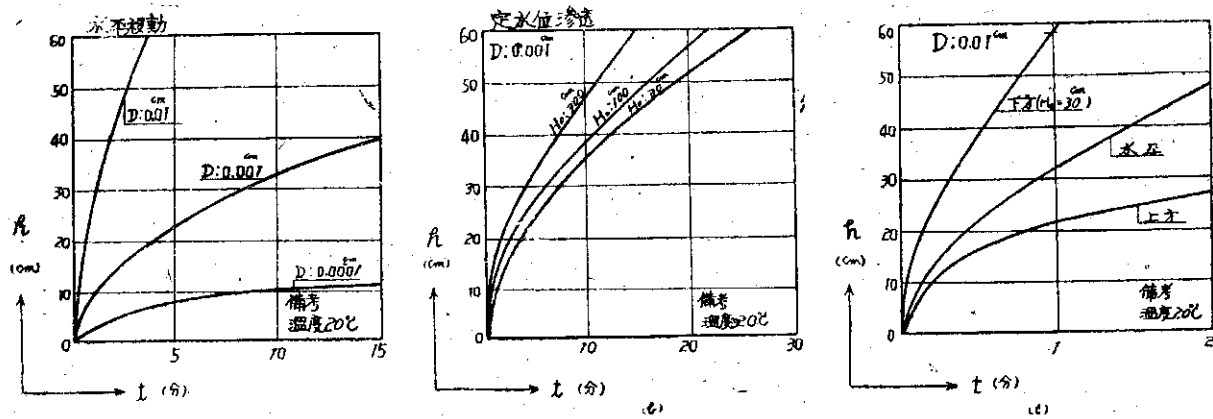


圖-14

§ 6. 毛管上昇水の分布状態に関する側面的考察

§ 2 では水が自由水面から圓管内を満して上昇するものとしてその過程を解いたが、周知の様に土中の毛細管上昇は間隙を満しては行はれず 圖-15 に示す様に自由水面では飽和し、上方に至るに従ひ含水を減少する。この點が今迄の考察の當否を決定する一岐點ともなるのであるが、茲ではこの含水分布に就て些か考へてみる。

圖-16 に示す様な grading curve を有つ土質の柱が自由水面上に在るものとし、之を 圖-17 に示す様に細孔の pure fraction に配列して考へてみる。

自由水面より h_1 なる高さの部分を考える。(6) 式の關係 $H = 4\sigma/cgD$ により決定せられる h_1 に對應する毛管の間隙を D_1 とする。又一般に土質の粒徑 d とそれに對應する粒子間隙の毛管上昇に對する equivalent diameter D との間には、その土質に對して

$$D = f(d) \dots\dots\dots (24)$$

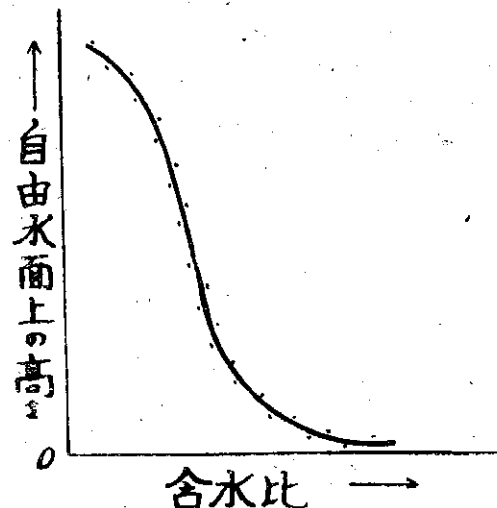


圖-15

なる関係があつて、土粒のある集合状態に対して D は d に依り一義的に定まるものとし、(24) によつて定まる D_1 に對應する粒徑を d_1 とすれば、 h_1 なる位置では d_1 より小さな粒子に附帶する間隙は全て水で飽和し、それより大きな部分は乾燥状態にあることになる。その時にその位置の含水量を求めてみる。

圖-16 の grading curve で一般に粒徑 d 以下の部分の重量分率を p とすれば

$$p = \varphi(d) \quad \dots\dots\dots (25)$$

又、一般に次の様に符號をきめると

G_s : 土粒子の眞比重

G_0 : 乾燥密度 (水を除いて土質實體だけを考へた時の見掛比重)

單位體積の土體中にある d_1 以下の部分の重量 = $G_0 p_1$

(但し p_1 は d_1 以下の粒子の通過重量分率)

單位體積土體中の d_1 以下の部分の體積 = $G_0 p_1 / G_s$

之に附帶する間隙は 間隙比が粒徑の大小に無關係として

$$\frac{G_0 p_1}{G_s} \left(\frac{G_s}{G_0} - 1 \right) = p_1 \left(1 - \frac{G_0}{G_s} \right)$$

上記の假定により 之が水の容積に等しいとすれば、水の比重を 1 として、この土のこの部分の含水比は

$$\text{含水比} = \frac{p_1 \left(1 - \frac{G_0}{G_s} \right)}{G_0} = p_1 \left(\frac{1}{G_0} - \frac{1}{G_s} \right)$$

G_0 はその土質の或る填充状態に對して常數と考へれば、一般に

$$\text{含水比} = p \left(\frac{1}{G_0} - \frac{1}{G_s} \right) = mp \quad , \quad m = \frac{1}{G_0} - \frac{1}{G_s} \quad \dots\dots\dots (26)$$

となり、 m は或る土質の一定填充状態に對して常數となる。

又、水隙 (間隙容積中水の占める部分) と全間隙との比を飽水率と名付けば

單位土體中の全間隙 = $1 - G_0/G_s$

單位土體中の d_1 以下の部分に附帶する間隙 (即ち含水容積) = $p_1 (1 - G_0/G_s)$

従つて、飽水率 S は兩者の比として、一般に

$$\text{飽水率 } S = p \quad \dots\dots\dots (27)$$

なる結果を得る。即ち grading curve 上の通過分率は、その粒徑の粒子に對應する毛管間隙を水が上昇する時の最大上昇の位置における飽水率を表はすことが判る。

(6), (24), (25), (26), (27) なる關係を解くには 圖-18 の様にすればよい。

即ち (24) の關係が既知なら自由水面上の含水分布が判るし、又含水分布を知れば $D = f(d)$ な

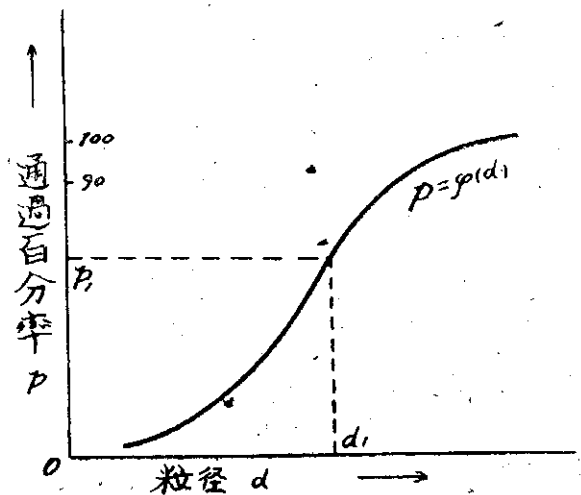


圖-16

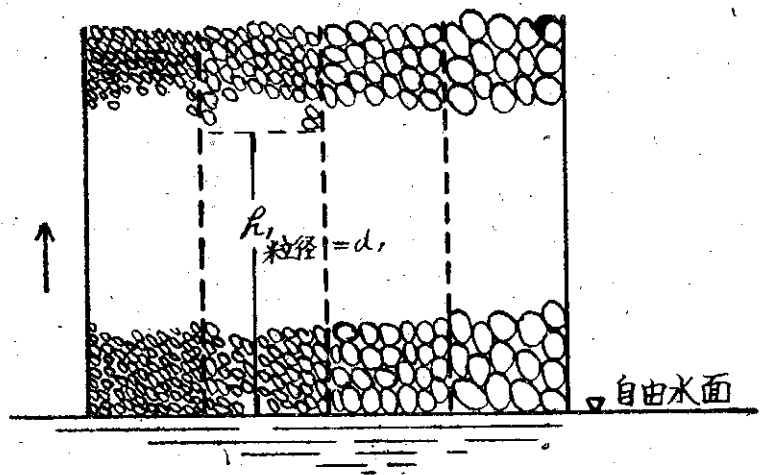


圖-17

