

河川流出に関する一研究

研究員 藤 樫 博 暁

A Study on River Run-off

By Tohgashi Hiroaki

要 旨

大抵の河川では、流量と河道貯溜量との間には直線的関係が存在するとゆう Flood Routing の理論を用い、降雨継続時間と降雨強度の分布を任意に想定した場合の小流域よりの流出波の數學的算定法を示し、次にそれら小流域流出波を河道の貯溜容量、流域の形状、流出波流下時間を考慮に入れて圖式的に合成することに依り全流域よりの流出波を見出さんとしたものである。

目 次

1. 緒 言	43
2. 河川流出水の分析	44
3. 地下水流出遞減と河道貯溜水流出遞減	44
4. Flood Routing の方法	45
5. 降雨の型による單位波の算定法	47
6. 各種單位波の計算例	51
7. 矩形型降雨と三角形型降雨による單位波の比較	54
8. $A_s - A_0$ 曲線の特性	55
9. 一流域内の單位波の合成	56
10. 實際河川への應用例	58
11. 結 語	59

1. 緒 言

洪水は主として低氣壓又は不連續線に伴う豪雨に基因するもので、その程度は降雨量、降雨継続時間、降雨區域の廣さに関係するは勿論、流域の面積、形状、地勢、地質、地被狀態、降雨前の保濕量によつて異り、同一河川に於いてもその量水曲線は千差萬別甚だ複雑であり、その本質を把握することは極めて困難である。

併し特定の河川に於いては流域の形状及地勢は不變であり、又地被狀態は洪水時期が大體一定しているから殆んど變りはないものと見做し得るので、その量水曲線は自ら独自の形態を有して居り、各量水曲線の差異は只降雨に関係する項目のみに因るものである。即ち流域の地形的特徴と降雨の時間的並に地域的分布とが結合して出來たものが量水曲線であり、この曲線の形態にそれらの凡ゆる要素が示唆せられているものであつて、降雨分布の精密な調査と量水曲線の徹底的分析研究にこそ河川流出現象解決の鍵が秘められているものと言えよう。

筆者は先年或河川の計畫洪水流量決定に當り、Flood Routing の理論を用い降雨の總量、継続時間及びその分布を種々に想定した場合の量水曲線を算定し、之を實際に生起した洪水波と比較検討

することによつて流出率その他の要素を決定し、将来起り得べき最大の降雨量（降雨継続時間をも考慮したもの）に因る計畫洪水波の形を求めんとした。¹⁾ここにその理論の大要を述べんとするものであるが、この研究は未だ未完成で、これは一つの間報告にすぎず、なお幾多検討すべき点を含んでいるものである。

2. 河川流出水の分析

地上に降つた雨は一部蒸發によつて失はれるが、その大部分は下記の如き徑路によつて河川流出水となる。

- a) 表面流出 ——— 直接流出
 ——— 河道貯溜水流出
- b) 地下水流出 ——— 基底流量
 ——— 地下水流出増量

表面流出とは降雨が地表を流下して最寄りの溪流に入り、更に本河道に到達したもので、これには地表の上層を潜流して水路に流入したものも含まれる。このうち河道に永く貯溜されず一氣に懸案地點まで流下して來たものを直接流出と言ひ、又一時河道に貯溜せられて雨が止み直接流出がなくなつても暫らくは流出を持続するものを河道貯溜水流出と言つている。

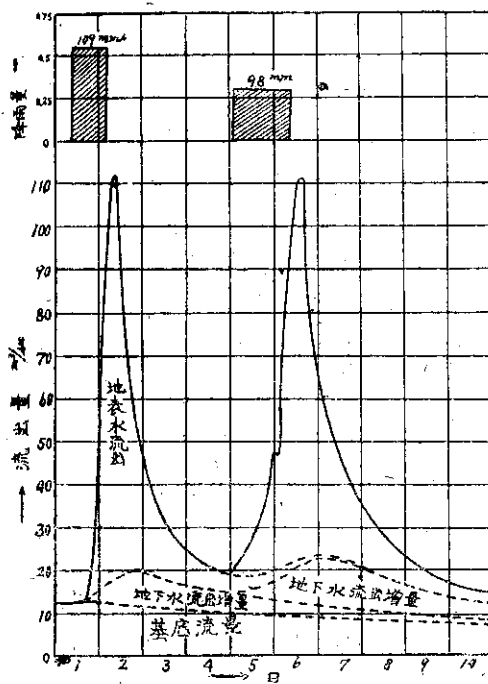


圖-1

地下水流出は一時地下に滲透して地下水となつた雨水が再び地表に出て河道に入つたもので、或降雨の前からある流量を基底流量と言ひ、降雨の爲地下水が増加し従つて地下水流出の増加となつた部分を地下水流出増量と言つている¹⁾。

或河川の量水曲線は異つた時刻に降つた多くの雨による地表水流出、地下水流出の綜合したものである。従つて或單獨降雨による量水曲線の變化を研究せんとすれば、これを分析して如何なる部分がこの降雨による流出であるかを明白にする必要がある。この單獨降雨による量水曲線の分離は平素その河川の地下水流出、地表水流出について深い研究を必要とするが、今その詳細を述べる紙面がないので讀者は下記文献を参照されんことを希望する²⁾。

即ち或單獨降雨による量水曲線を分析して、その降雨以前からある基底流量、その降雨による地下水流出増量及び表面流出の三者に分離し得る。筆者が本文に於いて論ぜんとするのは洪水流出の大部分を占める表面流出についてである。

3. 地下水流出遞減と河道貯溜水流出遞減

何日も續いて降雨がなく、河川の流量が地下水流出のみと見做される時、その流量は日毎に遞減してゆき、その流量、時間關係は一つの指數函數で表されることが多くの河川で實證されている。即ち初の流量を Q_0 とし、 t 時間後の流量を Q とすれば

1) 野滿隆治博士著：「河川學」P 153.

2) R. K. Linsley & W. C. Ackermann: "Method of Predicting The Run-off from Rainfall"—Proceedings of A.S.C.E. 1941-6, P. 1023.

$$Q = Q_0 e^{-ct}$$

で表される。地表面よりの直接流出は降雨後間もなく止み、これは量水曲線の頂点後にある轉向點附近であり、その後の流量は河道貯溜水と地下水のみに因る。

扱てこの河道貯溜水は如何なる法則によつて遞減するかについては、R. T. Zoch は又この場合も指數函数的であると言ひ、W. B. Langbein は必ずしもそうでないと言つてゐる。併し同氏の調査の結果を見ると、或流量の範囲内では大體指數函数的に變化すると見做して差支えない様である。R. E. Horton もこの問題について研究し

$$Q = KS^M$$

なる関係があることを實證した。ここに

Q : 或時刻の流量

S : その時刻における觀測地點から上流の河道貯溜水量

K, M : 常數

北米の諸河川では $M = 0.629 \sim 1.042$ であつて、大體 1 に近く、もし $M = 1$ であれば

$$Q = KS$$

となり、この時の Q の變化は指數函数的であることが證明せられる (本文 56 頁参照)。

4. Flood Routing の方法¹⁾

Flood Routing とは河川の上流一地點の洪水波が、下流の或地點に如何に變化して傳播するかをその地點間河道の調節能力を考慮し、逐次計算によつて算出する方法であり、洪水波追及法とでも譯し得るものである。以下この方法を簡単に紹介する。

地表水流出量水曲線の減衰側において、轉向點を過ぎた或時刻 t に於ける河道全貯溜水は、その時刻以後の量水曲線と横座標とにかこまれた部分の面積に等しい。(R. E. Horton の原理) (圖-2)

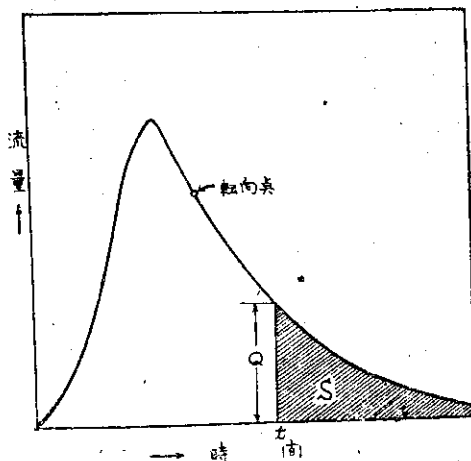


圖-2

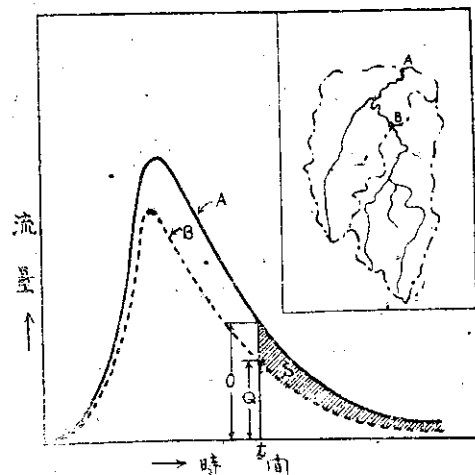


圖-3

今或る流路 A, B 區間を考える。或時刻に於ける A, B 區間の河道貯溜量 S は A, B 兩地點の量水曲線 O, Q の間に挟まれた部分の面積で表されることは、前記 Horton の原理で明かである。(圖-3)

今 Q : 上流端 B に於ける流量

O : 下流端 A に於ける流量

S : A, B 區間の河道貯溜水量

とすれば、 Q は上流端の水位に、 O は下流端の水位に、而して S は上下兩端の水位に關係するから、この三者の間には一定の關係が存在することが容易に想像出來よう。

1) C. O. Wisler & E. F. Brater: "A Direct Method of Flood Routing" — Proceedings of A.S.C.E., 1941-6, p. 1053.

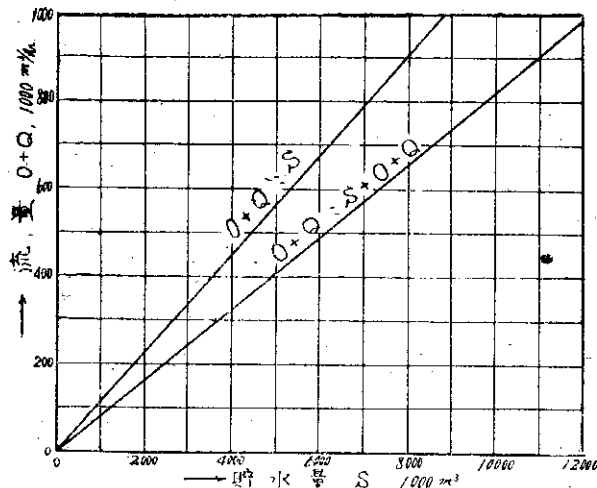


図-4

而してこの水路が特異なものでない限り、高低の河川では平水位以上の水位において、流路の或区間の河道貯溜量 S と、その区間兩端の流量の和 $Q+O$ との関係は一つの直線で表されることが多くの實例で判明した。(圖-4)

この $O+Q:S$ の直線を $O+Q:S+O+Q$ の補足的直線に変換することにより

- A, B 兩地點中間流域よりの流入量 I の算定
- B 地點に於ける流量 Q 及び中間流域よりの流量 I が下流端 A 地點に如何に現れるかの Routing を可能ならしめる。

1) 未観測流入量 I の決定

今 O : A 地點の観測流量 m^3/hr
 Q : B 地點の観測流量 m^3/hr
 I : A, B 地點中間流域よりの流入計算量 m^3/hr
 S : A, B 區間の河道貯溜水量 m^3

とし、時刻 $t=0$ における Q, O, S を夫々 Q_0, O_0, S_0 とし、 n 時間後におけるものを Q_1, O_1, S_1 とし、その間に於ける中間流域よりの平均流入量を I_0 とする。然る時 $t=0 \sim n$ 間に於ける河道貯溜方程式は、

$$S_0 + n \left(\frac{Q_0 + Q_1}{2} \right) + nI_0 - n \left(\frac{Q_0 + O_1}{2} \right) = S_1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore I_0 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2S_1}{n} + O_0 + O_1 - \left(\frac{2S_0}{n} + Q_0 + Q_1 \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2) 式右邊に於いて Q_0, Q_1, O_0, O_1 は観測値であり、 $t=0$ における貯溜量を O とすれば $S_0=O$ となり、未知数は S_1 のみになる。而して圖-4 に於いて $Q_1 + O_1$ より S_1 が求められるから I_0 が計算出来る。次に $t=n \sim 2n$ 間に於けるものが同様にして計算出来る。即ち Q 及び O が観測せられている時は、中間流域よりの流入量 I は逐次計算によつて求めることが出来る。

2) Q の Routing

先づ上流端 B に於ける流量 Q が下流端 A に如何に現れるかを追及する。この場合は中間流域よりの流入量を無視する。

(1) 式において $I=0$ とすれば

$$\frac{2S_0}{n} + Q_0 + Q_1 - O_0 = \frac{2S_1}{n} + O_1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{2S_0}{n} + Q_0 + O_0 + 2(Q_1 - O_0) = \frac{2S_1}{n} + Q_1 + O_1$$

$$T_0 + 2(Q_1 - O_0) = T_1 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに

$$T = \frac{2S}{n} + Q + O$$

(4) 式において左邊は既知、即ち $T_1 = \frac{2S_1}{n} + Q_1 + O_1$ の値は既知となり、これより圖-4 を用いて $Q_1 + O_1$ が判り、更に O_1 が求められ、最後に S_1 も計算出来る。この計算を $t=2n, 3n, 4n,$

……と逐次繰返してゆく。この時得られる O は Q のみに因るものであるから、これを Q' として表す。

3) I の Routing

この場合は中間流域からの流入量 I が下流端 A に如何に現れるかを追及するので、 Q は無視せられ、(1) 式は

$$\frac{2S_0}{n} + 2I - O_0 = \frac{2S_1}{n} + O_1 \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。

$$\frac{2S_0}{n} + O_0 + 2(I_0 - O_0) = \frac{2S_1}{n} + O_1$$

$$T_0 + 2(I_0 - O_0) = T_1 \quad \left(T = \frac{2S}{n} + O \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで左邊は既知であり、又この場合 $Q=0$ であるので $Q+O: \frac{2S}{n} + Q+O$ の関係は $O: \frac{2S}{n} + O$ の関係と見做されるので、矢張り 圖-4 を利用出来る。即ち $\frac{2S}{n} + O$ より O を、次いで S を求められ、 O が逐次計算出来る。この I によつて現はれる下流端 A の流量 O を I' で表す。

以上の計算で求められた Q' 及び I' を合計したものが下流端 A に於ける流量 O となるべきであり、 $O' = Q' + I'$ とすれば O' と O とは殆んど一致し、 $O + Q: \frac{2S}{n} + O + Q$ 関係が正しいことが證明せられる。

(圖-5) この Flood Routing により B 地點の洪水波が A 地點の洪水波中に如何なる割合

を占めているかが判明し、これは上流地區の河川改修が下流地區に及ぼす影響を判定するのに甚だ重要な役割を演ずるものである。

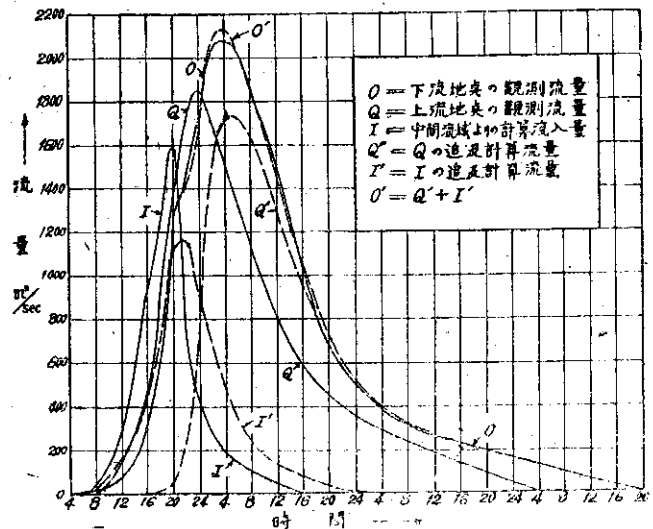


圖-5

5. 降雨の形による單位波の算定法

流域内の一部小流域よりの流出波を今單位波と名付ける。全流域からの幾つかの單位波を到達時間及び本流河道の調節作用を考慮して合成したものが全流域の流出波と考られる。

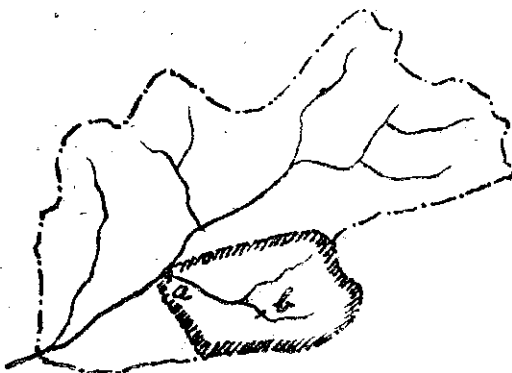


圖-6

扱てこの様な小流域において Flood Routing の理論を少しく擴張し 圖-6 に於ける河道 a, b 區間の上流端 b が最上流まで移動した場合を考えてみる。この時は全流域が中間流域と見做されるから $Q=0$, S は小流域全域の河道貯留水量, I は全流域より河道への流入量を示すこととなり、(5) 式をそのまま使つて

$$\frac{2S_0}{n} + 2I - O_0 = \frac{2S_1}{n} + O_1$$

の関係が成立する。而して $O: \frac{2S}{n} + O$ が直線関係をなすと言うことは、 O と S が直線関係であることであるから

$$O = aS \quad \dots\dots\dots (7)$$

と導き得る。

今降雨の際の蒸発滲透による損失を差引いた有効雨量のみを考え、降雨が地表を流れて河道へ流入するまでの時間を無視する。即ち流域内有効降雨が直に河道への流入量であると假定すれば、流入量 I はそのまま全流域に降つた有効雨量の強度となし得よう。即ち

$$I = \Delta t Ar \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに Δt : 時間

A : 流域面積

r : Δt 時間内の平均有効雨量強度

時刻 t_1 における河道貯溜水を S_1 とすれば、その時の流出量は aS_1 である。同様に時刻 $t_2 = t_1 + \Delta t$ に於けるものを夫々 S_2, aS_2 とし、その間の降雨による流入量を $\Delta t Ar$ とすれば

$$S_2 = S_1 + A \Delta t r - a \left(\frac{S_1 + S_2}{2} \right) \Delta t$$

$$\Delta S = A \Delta t r - a S \Delta t$$

$$\frac{dS}{dt} + aS = Ar$$

$$\therefore S = e^{-at} \left(A \int r e^{at} dt + C \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

又

$$Q = aS = a e^{-at} \left(A \int r e^{at} dt + C \right) \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに Q は小流域よりの流出であつて (7) 式に於いて O で表したものである。この (10) 式は流域内に任意の強度の降雨があつた際の流出を表す基本方程式である。

$Q = aS$ の係数 a はその流域よりの地表水流出曲線より見出されるもので、貯溜水流出係数とも言うべく、流域面積大なる程小なる値をとる。 a が判り、更に降雨の時間的変化即ち r の形を適度に想定すれば、その場合の流出曲線は (10) 式によつて計算出来ることになる。以下各型の降雨に際しての地表水流出曲線が如何なる形をとるかを計算して見る。

A) 矩形型降雨の場合

有効雨量 R が初から終まで一様な強度 r_c を以つて T 時間繼續する最も簡単な場合である。この時は

$$r = r_c = \frac{R}{T}$$

i) $t = 0 \sim T$

$$Q_1 = a e^{-at} \left(A r_c \int e^{at} dt + C \right)$$

$$= a e^{-at} \left(\frac{A r_c}{a} e^{at} + C \right)$$

$t = 0$ にて $Q = 0$

$$C_1 = - \frac{A r_c}{a}$$

$$\therefore Q_1 = A r_c (1 - e^{-at}) = \frac{AR}{T} (1 - e^{-at})$$

..... (a)

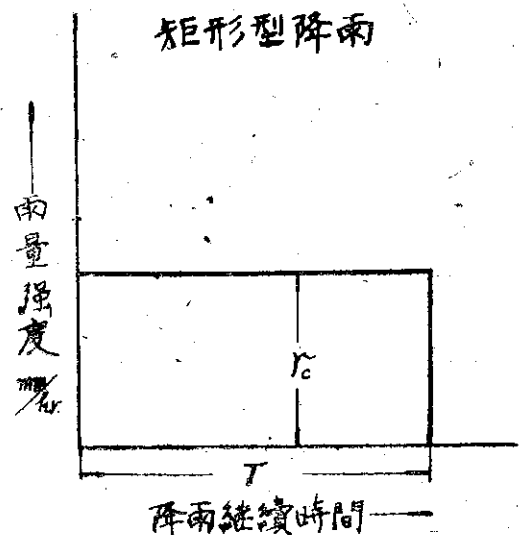


圖-7

ii) $t > T$

$$r = 0$$

$$Q_2 = aC_2 e^{-at}$$

$$t = T \text{ において } Q_T = \frac{AR}{T} (1 - e^{-aT}) = aC_2 e^{-aT}$$

$$\therefore C_2 = \frac{AR}{aT} (e^{aT} - 1)$$

$$Q_2 = \frac{AR}{T} (e^{aT} - 1) e^{-at} = \frac{AR}{T} (1 - e^{-aT}) e^{-a(t-T)}$$

$$= Q_T e^{-a(t-T)} \quad \dots\dots\dots (b)$$

B) 三角形型降雨の場合

降雨が三角形型に変化する場合で

$$R = \frac{Tr_m}{2} \quad r_m = \frac{2R}{T}$$

$$r_1 = r_m \frac{t}{kT} = \frac{2R}{kT^2} t = \frac{K}{k} t$$

$$r_2 = \frac{K}{1-k} (T-t)$$

ここに

$$K = \frac{2R}{T^2}$$

i) $t = 0 \sim kT$

$$Q_1 = ae^{-at} \left(A \frac{K}{k} \int te^{at} dt + C_1 \right)$$

$$= ae^{-at} \left\{ \frac{AK}{ak} e^{at} \left(t - \frac{1}{a} \right) + C_1 \right\}$$

$$t = 0 \text{ にて } Q_1 = 0 \text{ より } C_1 = \frac{AK}{a^2 k}$$

$$\therefore Q_1 = \frac{AK}{k} \left\{ \left(t - \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{a} e^{-at} \right\} \quad \dots\dots\dots (c)$$

ii) $t = kT \sim T$

$$Q_2 = ae^{-at} \left\{ \frac{AK}{1-k} \int (T-t) e^{at} dt + C_2 \right\}$$

$$= ae^{-at} \left\{ \frac{AK}{(1-k)a} \left(T + \frac{1}{a} - t \right) e^{at} + C_2 \right\}$$

 $t = kT$ に於いて (c) より

$$Q_2 = \frac{AK}{k} \left\{ \left(kT - \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{a} e^{-akT} \right\}$$

$$= ae^{-akT} \left\{ \frac{AK}{(1-k)a} \left(T + \frac{1}{a} - kT \right) e^{akT} + C_2 \right\}$$

$$\therefore C_2 = \frac{AK}{ak} \left(1 - \frac{1}{1-k} e^{akT} \right)$$

$$Q_2 = e^{-at} \left\{ \frac{AK}{1-k} \left(T + \frac{1}{a} - t \right) e^{at} + \frac{AK}{ak} \left(1 - \frac{1}{1-k} e^{akT} \right) \right\}$$

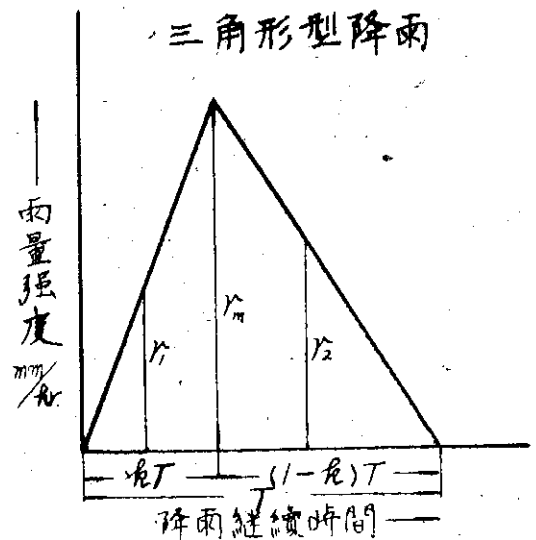


圖-8

$$= AK \left\{ \frac{T + \frac{1}{a} - t}{1 - k} + \frac{1}{ak} \left(1 - \frac{1}{1 - k} e^{akT} \right) e^{-at} \right\} \quad \dots\dots\dots (d)$$

iii) $t > T$

$$Q_3 = aC_3 e^{-at}$$

$$= \frac{AK}{a} \left(\frac{1}{1 - k} e^{aT} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{1 - k} e^{akT} \right) \right) e^{-at} = Q_T e^{-a(t-T)} \quad \dots\dots\dots (e)$$

iv) $k = \frac{1}{2}$ 即ち對稱形降雨に於いては

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= 2AK \left\{ \left(t - \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{a} e^{-at} \right\} \\ Q_2 &= 2AK \left\{ \left(T + \frac{1}{a} - t \right) + \frac{1}{a} \left(1 - 2e^{-\frac{aT}{2}} \right) e^{-at} \right\} \\ Q_3 &= \frac{2AK}{a} \left(1 + e^{-at} - 2e^{-\frac{aT}{2}} \right) e^{-a(t-T)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (f)$$

C) Sine 曲線型降雨の場合

$$r = r_m \sin \frac{\pi t}{T} = r_m \sin pt \quad \left(p = \frac{\pi}{T} \right)$$

$$R = r_m \int_0^T \sin pt \, dt = \frac{2}{\pi} r_m T$$

$$\therefore r_m = \frac{\pi}{2} \frac{R}{T}$$

$$r = \frac{\pi}{2} \frac{R}{T} \sin pt$$

i) $t = 0 \sim T$

$$Q_1 = ae^{-at} \left(A \int re^{at} dt + C_1 \right)$$

$$= ae^{-at} \left(\frac{\pi}{2} \frac{AR}{T} \int e^{at} \sin pt \, dt + C_1 \right)$$

ここに

$$\int e^{at} \sin pt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2 + p^2} (a \sin pt - p \cos pt)$$

$$Q_1 = ae^{-at} \left\{ K \frac{1}{a^2 + p^2} e^{at} (a \sin pt - p \cos pt) + C_1 \right\}$$

$$t = 0 \text{ にて } Q_1 = 0 \text{ より } C_1 = K \frac{p}{a^2 + p^2} \quad \left(K = \frac{\pi AR}{2T} \right)$$

$$Q_1 = aK \frac{1}{a^2 + p^2} (a \sin pt - p \cos pt + pe^{-at}) \quad \dots\dots\dots (g)$$

ii) $t > T$

$$Q_2 = aK \frac{1}{a^2 + p^2} (a \sin pT - p \cos pT + pe^{-at}) e^{-a(t-T)} \quad \dots\dots\dots (h)$$

D) 拋物線型降雨の場合

$$r = \frac{4r_m}{T^2} t(T-t)$$

$$R = \frac{2}{3} ATr_m$$

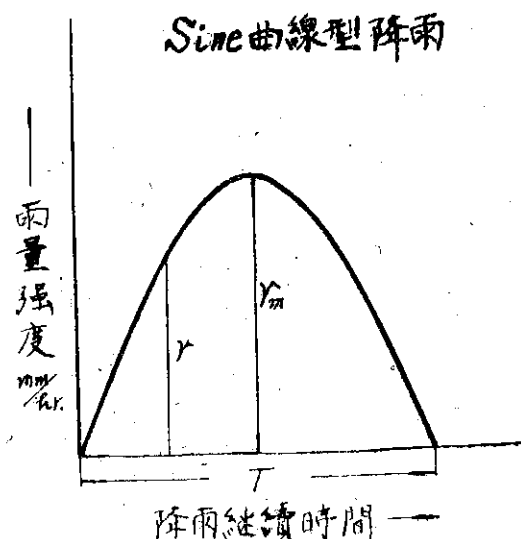


図-9

$$\therefore r_m = \frac{3R}{2AT}$$

$$r = \frac{6R}{AT^3} t(T-t) = Kt(T-t)$$

$$\left(\text{ここに } K = \frac{6R}{AT^3} \right)$$

i) $t = 0 \sim T$

$$Q_1 = a e^{-at} \left\{ K \int t(T-t) e^{at} dt + C_1 \right\}$$

$$\int t(T-t) e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} \times \left\{ \left(t - \frac{1}{a} \right) \left(T + \frac{2}{a} \right) - t^2 \right\}$$

$$Q_1 = K \left\{ \left(t - \frac{1}{a} \right) \left(T + \frac{2}{a} \right) - t^2 \right\} + a C_1 e^{-at}$$

$$t=0 \text{ にて } Q_1=0 \text{ より } C_1 = \frac{K}{a^2} \left(T + \frac{2}{a} \right)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= K \left\{ \left(t - \frac{1}{a} \right) T - t^2 + \frac{2}{a} \left(t - \frac{1}{a} \right) \right\} + \frac{K}{a} \left(T + \frac{2}{a} \right) e^{-at} \\ &= K \left\{ \left(t - \frac{1}{a} \right) \left(T + \frac{2}{a} \right) - t^2 + \frac{1}{a} \left(T + \frac{2}{a} \right) e^{-at} \right\} \dots\dots\dots (i) \end{aligned}$$

ii) $t > 0$

$$Q_2 = \frac{K}{a} \left\{ T - \frac{2}{a} + \left(T + \frac{2}{a} \right) e^{-aT} \right\} e^{-a(t-T)} \dots\dots\dots (j)$$

6. 各種単位波の計算例

流域面積 1 km², 降雨量 100 mm, 降雨時間 24 時間, $a = 0.02125$ ($\frac{1}{a} = 47$) の場合, 各種降雨型の単位波を計算してみる。

A) 矩形型降雨の場合

$$Q_1 = \frac{AR}{T} (1 - e^{-aT}) \dots\dots\dots (a)$$

$$Q_2 = Q_T e^{-a(t-T)} \dots\dots\dots (b)$$

ここに

$$K = \frac{AR}{T} = \frac{1 \times 100}{24} = 4.16 \text{ (1000 m}^3/\text{hr/km}^2\text{)}$$

i) $t = 0 \sim T$

①	②	③	④	⑤
t	$-at$	e^{-at}	$1 - e^{-at}$	$K(1 - e^{-at})$
4	-0.085	0.91851	0.08149	0.3395
8	-0.170	0.84366	0.15634	0.6515
12	-0.255	0.77491	0.22509	0.9379
16	-0.340	0.71177	0.28823	1.2038
20	-0.425	0.65377	0.34623	1.4468
24	-0.510	0.60050	0.39950	1.6642

ii) $t > T$

①	②	③	④
t	$t-24$	$e^{-a(t-T)}$	$Q_2 e^{-a(t-T)}$
28	4	0.91851	1.5286
36	12	0.77491	1.2896
48	24	0.60050	0.9994
60	36	0.46533	0.7744
72	48	0.36059	0.6001

拋物線型降雨

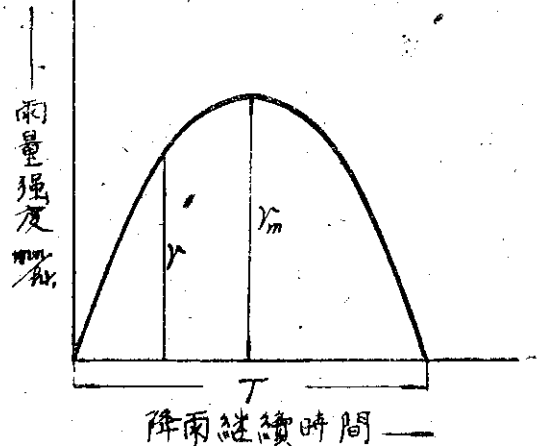


圖-10

B) 三角形型降雨の場合

(f) 式において $2K = \frac{4R}{T^2} = \frac{4 \times 100}{24^2} = 0.6944$

i) $t = 0 \sim \frac{T}{2}$

①	②	③	④	⑤	⑥
t	$t - \frac{1}{a}$	e^{-at}	$\frac{1}{a} e^{-at}$	② + ④	$2K \times ⑤$
4	-43	0.91851	43.170	0.170	0.1181
8	-39	0.84366	39.652	0.652	0.4529
12	-35	0.77491	36.420	1.421	0.9869

ii) $t = \frac{T}{2} \sim T$

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
t	$T + \frac{1}{a} - t$	$\frac{aT}{e^{\frac{aT}{2}}}$	$\frac{1}{a} \left(1 - 2e^{\frac{aT}{2}}\right)$	e^{-at}	④ × ⑤	② + ⑥	$2K \times ⑦$
16	55	1.2905	-74.307	0.7118	-52.890	2.110	1.4651
20	51	"	"	0.6538	-48.530	2.420	1.6313
24	47	"	"	0.6005	-44.621	2.379	1.6523

iii) $t > T$

$Q_t = Q_{24} e^{-a(t-24)}$

(計算省略)

C) Sine 曲線型降雨の場合

(g), (h) 式において,

$K = \frac{\pi AR}{2T} = \frac{\pi \times 1 \times 100}{2 \times 24} = 6.55$

$p = \frac{\pi}{T} = 0.1309$ $p^2 = 0.01713481$

$a^2 = 0.00045156$

$a^2 + p^2 = 0.01758637$ $\frac{1}{a^2 + p^2} = 46.249$

$aK \frac{1}{a^2 + p^2} = 7.9184$

i) $t = 0 \sim T$

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
t	pt	$\sin pt$	$\cos pt$	e^{-at}	$a \sin pt$	pe^{-at}	$-p \cos pt$	⑥ + ⑦ + ⑧	$K \times ⑨$
4	$\pi/6$	0.500	0.866	0.9185	0.0106	0.1201	-0.1133	0.0174	0.1378
8	$\pi/3$	0.866	0.500	0.8437	0.0184	0.1104	-0.0654	0.0634	0.5020
12	$\pi/2$	1	0	0.7749	0.0213	0.1014	0	0.1227	0.9716
16	$2\pi/3$	0.866	-0.500	0.7118	0.0184	0.0931	0.0654	0.1769	1.4038
20	$5\pi/6$	0.500	-0.866	0.6538	0.0106	0.0355	0.1133	0.2034	1.6531
24	π	1	-1	0.6005	0	0.0785	0.1308	0.2093	1.6573

ii) $t > T$

$$Q_t = Q_T e^{-a(t-T)} = 1.6573 e^{-a(t-24)} \quad (\text{計算省略})$$

D) 拋物線型降雨の場合

(i), (j) 式において

$$K = \frac{6R}{AT^3} = \frac{6 \times 100}{1 \times 24^3} = 0.0434$$

$$T + \frac{2}{a} = 118, \quad \frac{1}{a} \left(T + \frac{2}{a} \right) = 47 \times 118 = 5546$$

i) $t = 0 \sim T$

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
t	t^2	$t - \frac{1}{a}$	$\left(t - \frac{1}{a}\right) \left(T + \frac{2}{a}\right)$	e^{-at}	$\frac{1}{a} \left(T + \frac{2}{a}\right) e^{-at}$	④ - ② + ⑤	$K \times ⑦$
4	16	-43	-5074	0.9184	5093.524	3.524	0.1529
8	64	-39	-4602	0.8435	4677.957	11.957	0.5189
12	144	-35	-4130	0.7747	4296.303	22.303	0.9680
16	256	-31	-3658	0.7115	3945.779	31.779	1.3791
20	400	-27	-3186	0.6534	3623.862	37.862	1.6432
24	576	-23	-2714	0.6001	3328.199	38.199	1.6578

ii) $t > T$ (計算省略)

E) 各型単位波の比較

以上の計算結果を比較すると、下表並に圖-11の如くなる。

 Q の値

t	矩形型	三角形型	Sine型	拋物線型
4	0.3395	0.1181	0.1378	0.153
8	0.6515	0.4529	0.5020	0.519
12	0.9379	0.9869	0.9716	0.968
16	1.2008	1.4651	1.4008	1.379
20	1.4463	1.6813	1.6531	1.643
24	1.6642	1.6523	1.6573	1.653
28	1.5286	1.5177	1.5222	1.523
36	1.2896	1.2804	1.2843	1.285
48	0.9994	0.9922	0.9952	0.996
60	0.7744	0.7639	0.7710	0.772
72	0.6001	0.5953	0.5976	0.598

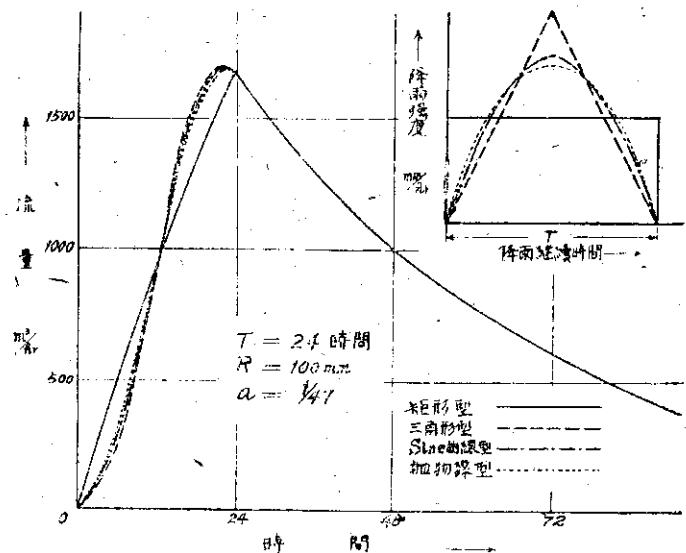


圖-11

圖-11 に示す如く三角形型、Sine 曲線型、拋物線型の計算結果は殆んど差異がない。最も計算の簡単な矩形型を除き、大體前三者の形に似た降雨型に於いては適宜計算の簡単な型を選んでよいことになる。拋物線型は特に精密な計算を必要とするので、この三者の中最も不利であり、三角形型、Sine 曲線型は計算の手数においては大體同様であるが、非對稱型降雨の場合の計算も可能である點三角形型が最も有利である。

なほ参考の爲、矩形型降雨 $T = 6, 12, 24$ 、時間の場合の単位波と、三角形型降雨 $T = 24$ 、 $k = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ の場合の単位波の比較を 圖-12、圖-13 に示す。

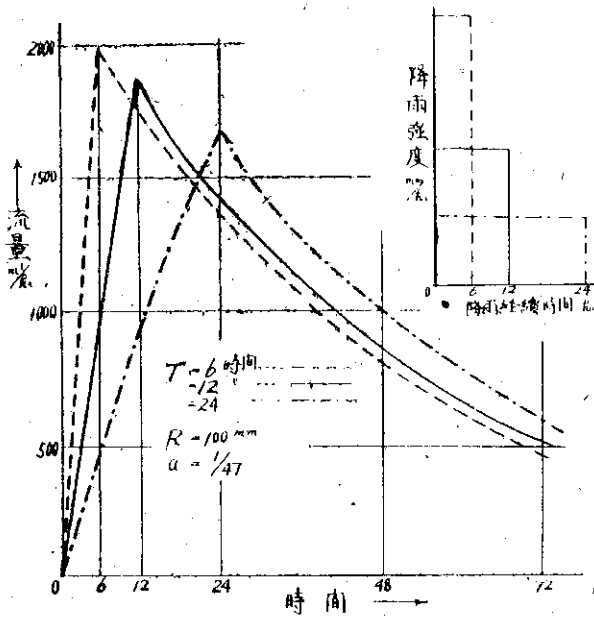
矩形型降雨 ($T = 6, 12, 24$)

圖-12

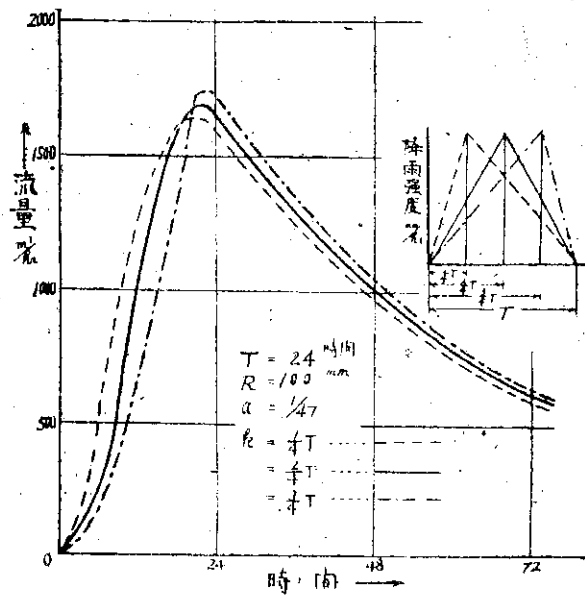
三角形型降雨 ($k = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$)

圖-13

7. 矩形型降雨と三角形型降雨に因る単位波の比較

先づ三角形型降雨に因る単位波の最大流量 $Q_{m\Delta}$ とそれが起きる時刻 t_m を計算によつて求め、それと矩形型降雨に因る単位波の最大流量 $Q_{m\Box}$ 及びそれが起きる時刻 T とを比較する。三角形降雨の際の流出は (d) 式より、

$$Q_2 = AK \left\{ \frac{T + \frac{1}{a} - t}{1 - k} + \frac{1}{ak} \left(1 - \frac{1}{1 - k} e^{akT} \right) e^{-at} \right\}$$

流量が最大となる時刻は

$$\frac{dQ_2}{dt} = AK \left\{ -\frac{1}{1 - k} - \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{1 - k} e^{akT} \right) e^{-at} \right\} = 0$$

$$\therefore e^{at} = \frac{1}{k} (e^{akT} - 1 + k)$$

$$t = t_m = \frac{1}{0.4343a} \log \frac{1}{k} (e^{akT} - 1 + k) \quad \dots\dots\dots (11)$$

によつて求められる。ここに t_m は $Q_{m\Delta}$ を生ずる時刻である。而してその際の最大流量は、

$$\begin{aligned} Q_{m\Delta} &= AK \left\{ \frac{T + \frac{1}{a} - t_m}{1 - k} + \frac{1}{ak} \left(1 - \frac{1}{1 - k} e^{akT} \right) e^{-at_m} \right\} \\ &= AK \left\{ \frac{T + \frac{1}{a} - t_m}{1 - k} - \frac{1}{a(1 - k)} \right\} \\ &= AK \frac{T - t_m}{1 - k} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

對稱型降雨の時、即ち $k = \frac{1}{2}$ の場合は

$$\left. \begin{aligned} t_m &= \frac{1}{0.4343a} \log 2 \left(e^{\frac{aT}{2}} - 1 \right) \\ Q_{m\Delta} &= 2AK (T - t_m) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。擬て矩形型降雨に於いては

$$Q_{m\Box} = \frac{AR}{T} (1 - e^{-at})$$

$$t_{q-\max} = T$$

であり、これ等の比 $\frac{Q_{m\Delta}}{Q_{m\Box}}$, $\frac{t_m}{T}$ を計算することによつて兩者の單位波の差異を判定することが出来る。今降雨時間 T が 6, 12, 24, 48, 96 時間、貯溜水流係数 a が 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05 と變化した場合について計算した結果を示すと 圖-14, 圖-15 の如くなる。

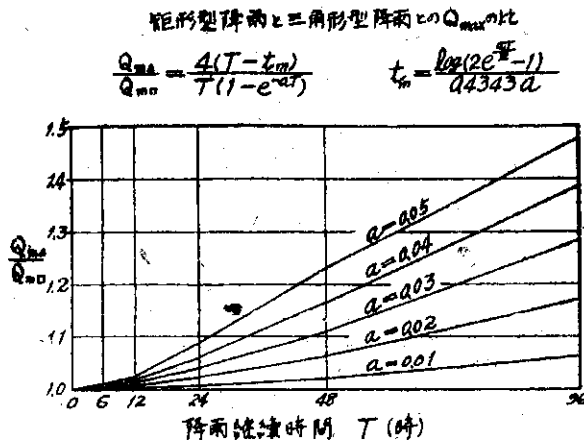


圖-14

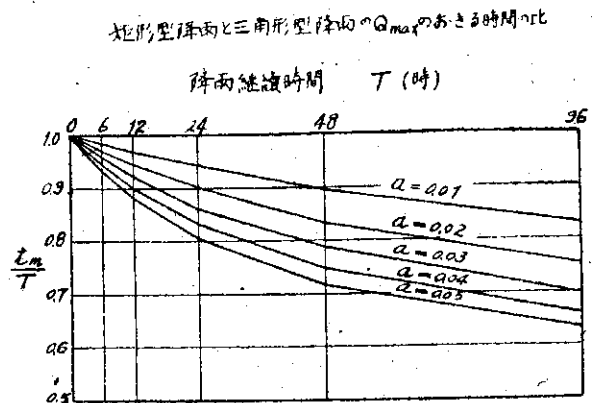


圖-15

これによつて見れば降雨継続時間が長くなればなる程、又 a が大即ち流域面積が小になればなる程兩者の差異は増大してくることが判る。反對に降雨継続時間が比較的短く、流域面積が大となれば降雨の形が如何なるものであつてもそれが平均に分布したもの、即ち矩形型降雨として取扱つて差支えないことを示している。

8. Ae^{-ax} 曲線の特性

$$i) \quad Ae^{-ax} + Be^{-bx} + Ce^{-cx} + \dots = Pe^{-px} \quad (a)$$

なる關係が成立するかどうかを検討してみる。

$$Ae^{-ax} = A \left(1 - ax + \frac{1}{2} a^2 x^2 - \frac{1}{6} a^3 x^3 + \dots \right)$$

であるから (1) 式は

$$\begin{aligned} & \left(A + B + C + \dots \right) - \left(Aa + Bb + Cc + \dots \right) x + \frac{1}{2} \left(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + \dots \right) x^2 \\ & = P - Ppx + \frac{1}{2} Pp^2 x^2 \dots \end{aligned}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} P &= A + B + C + \dots \\ Pp &= Aa + Bb + Cc + \dots \\ Pp^2 &= Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots \quad (b)$$

一般には (b) の關係は成立しない。併し $ax, bx, cx, \dots$ が小さい時はその自乗以上の項を無視出来るから

$$\left. \begin{aligned} P &= A + B + C + \dots \\ p &= \frac{1}{P} (Aa + Bb + Cc + \dots) = \frac{Aa + Bb + Cc + \dots}{A + B + C + \dots} \end{aligned} \right\} \dots \quad (c)$$

となり、 Ae^{-ax} なる曲線を幾つか合成したものも同様な曲線で表される。

もし $a = b = c = \dots$ ならば $p = a$
 又 $A = B = C = \dots$ ならば $p = \frac{a + b + c + \dots}{n}$ (n は項数)
 となる。

ii) 座標原点を移動した場合

原点を X だけ右方に移動した時は、

$$Ae^{-ax} = Ae^{-a(X+x')} = Ae^{-aX}e^{-ax'} \\ = A'e^{-ax'} \quad \dots \dots \dots (d)$$

即ち原点を何處に選んでもこの曲線の方程式は同じ形で表すことが出来る。

iii) Ae^{-ax} の積分

$$y = Ae^{-ax} \\ S_x = \int_x^\infty y dx = \int_x^\infty Ae^{-ax} dx = \frac{1}{a} Ae^{-ax} = \frac{y}{a} \\ \therefore y = a S_x \quad \dots \dots \dots (e)$$

これは (3) において示した $Q = KS$ の関係を表している。

即ち或地點の流出波は、その上流各小流域よりの單位波の合成されたものであり、その減衰側曲線は近似的に Ae^{-at} なる式で表され、 $Q = aS$ なる関係を有するものであると言える。

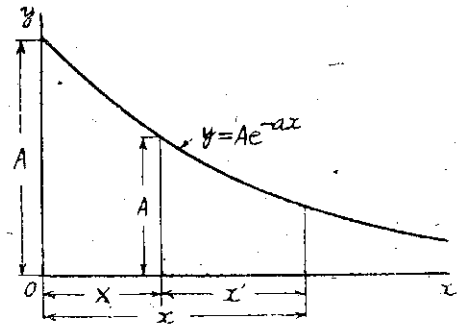


圖-16

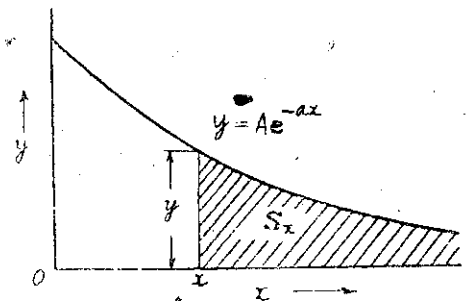


圖-17

9. 一流域内の單位波の合成

今 圖-18 の如き流波を考え、これを支流の配置により適宜 ① ② ③ の如き小流域に分割し、その各々の面積は

$$A_1 = 400 \text{ km}^2 \quad A_2 = 400 \text{ km}^2 \quad A_3 = 800 \text{ km}^2$$

であつたとする。又最下流點 A に於ける流量が観測せられて居り

$$Q = aS = 0.03 S \quad \dots \dots \dots (1)$$

なる関係が判明しているものとする。 A 地點に於ける流出波は ①, ②, ③ より流下した單位波の合成されたものと考えられるが、その各單位波が A 地點に如何に傳播されるかを考察しよう。

a) 各小流域に対する河道貯溜水流係数の推定

小流域内の降雨は夫々の支流河道によつて本流河道に注入せられ、その一部は本流に貯溜せられ、その水位を上昇しつつ A 地點迄流下し来るものである。小流域の位置が A 地點より遠ければ遠い程途中貯溜せられる水量が多くなつて、その單位波は低平となり、近ければ近い程貯溜量も少く、その單位波は急昇急降のものとなることは容易に想像出来ることである。

河道貯溜による單位波の調節作用は上流小支流でも行はれるものであるが、ここでは簡單の爲 A 地點の流量に影響を及ぼす河道貯溜容量としては本流筋 AC 区間のみが働くものとする。次に支流の配置状況より見て

① 流域よりの流出水に対しては、 AC 区間のうち延長 0.3 l だけの河道がその調節容量として働き、

② 流域のものに対しては 0.6 l の部分が、

③ 流域のものに対しては 1 即ち AC 全區間が働くもの

と大體の見當をつける。

即ち ① 流域よりの流出水が A 地点において Q なる流量を生ずる時の河道貯溜量を S_1 とすれば

$$Q = a_1 S_1 \quad \therefore a_1 = \frac{Q}{S_1}$$

(1) 式より

$$a_1 = a \frac{S}{S_1}$$

この場合 $S_1 = 0.3S$ であるから

$$a_1 = \frac{a}{0.3} = \frac{0.03}{0.3} = 0.10$$

小流域 ② 及び ③ に対しては

$$a_2 = \frac{a}{0.06} = 0.05$$

$$a_3 = a = 0.03$$

となる。 a_1, a_2, a_3 は夫々 ①, ②, ③ 流域よりの流出に対する河道貯溜量流出係数である。

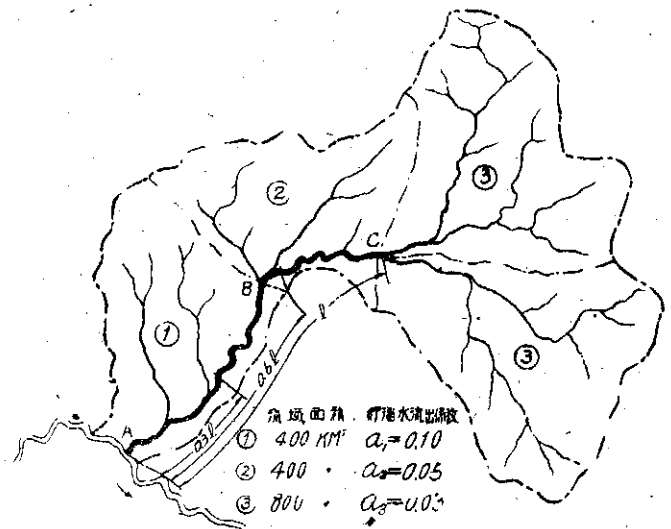


圖-18 (流域圖)

b) $T = 6, 12, 24$ 時間, 總量 100 mm の三角型降雨が
あつた場合の各單位波の計算例

5(f) 式により

$$\begin{aligned} t = 0 \sim \frac{T}{2} \quad Q_1 &= 2AK \left\{ \left(t - \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{a} e^{-at} \right\} \\ t = \frac{T}{2} \sim T \quad Q_2 &= 2AK \left\{ \left(T + \frac{1}{a} - t \right) + \frac{1}{a} \left(1 - 2e^{-\frac{aT}{2}} \right) e^{-at} \right\} \\ t > T \quad Q_3 &= Q_T e^{-a(t-T)} \end{aligned}$$

ここに

$$K = \frac{2R}{T^2}$$

① に対しては	$A_1 = 400 \text{ km}^2$	$a_1 = 0.10$
② "	$A_2 = 400 \text{ km}^2$	$a_2 = 0.05$
③ "	$A_3 = 800 \text{ km}^2$	$a_3 = 0.03$

上の各々に對し $R = 100 \text{ mm}$, $T = 6, 12, 24$ 時間として Q を求め, その結果を圖上に示したものが 圖-19, 圖-20, 圖-21 である。これら 3 つの單位波を合成したものが實際に現れる量水曲線

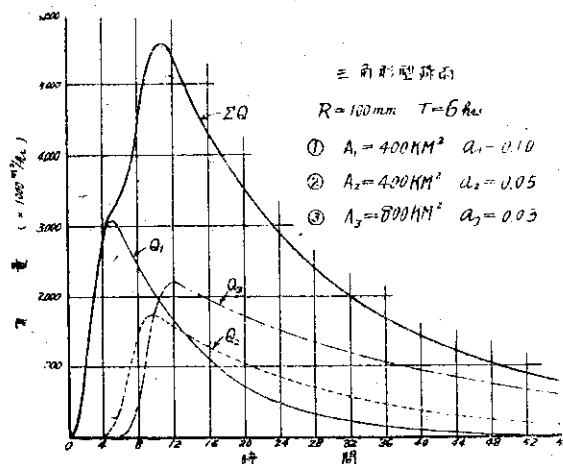


圖-19

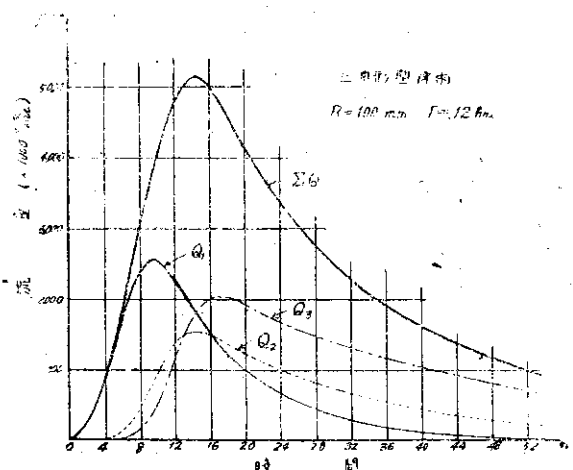


圖-20

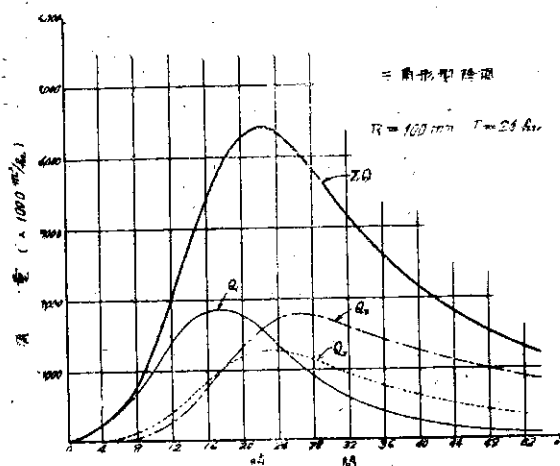


圖-21

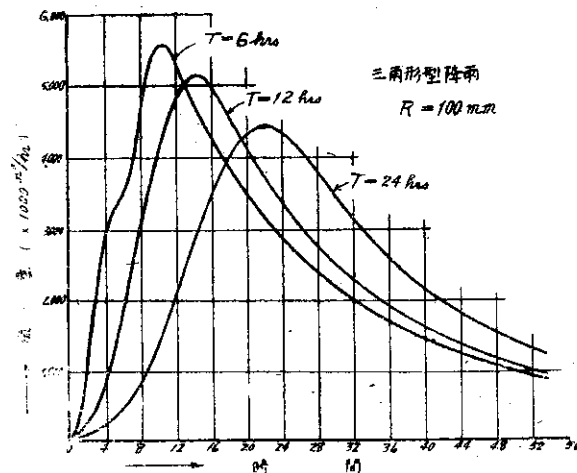


圖-22

となるのであるが、小流域の位置によつてその単位波がA地點に到達する時刻に差があるので、洪水波傳播速度を考慮して①と②は4時間、②と③は2時間の遅れがあるものとして、それだけずらして合成した。圖-22は $T=6, 12, 24$ 時間の場合の合成波を比較したもので、これは同量の降雨でも、その繼續時間によつて最大流量に相當の差異があることを示して居る。 T と Q_{max} との間にも一定の關係がある様であるが、それについては茲で觸れぬことにする。

10. 實際河川への應用例

以前に筆者が某河川について實際にこの理論を適用した例について簡単に説明する。

先づ過去10年間位の記録により、その流域一帯に均等な單獨降雨があつた場合の量水曲線を選んで、その地表水流出曲線を描き、それらを比較検討することにより最も普遍的な量水曲線の形を見出す。次いでその曲線により Q と S との關係を對數圖表上に描く(圖-23)。

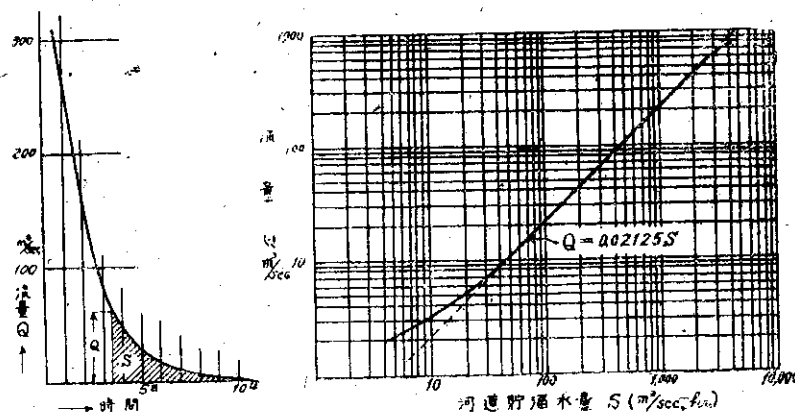


圖-23

一般に Q と S との關係は $Q = a(S + b)^k$ なる形で表はされることが判るが、大低の場合 $k \approx 1$ であり、又中水位以上の流量においては b は S に比し相當小さいので近似的に $Q = aS$ と表すことが出来る。この場合流域の形は大體 圖-18 に似たもので、その流域面積は 2109 km^2 であり、 $Q = 0.02125S$ なる關係を有することが判明した。この流域を適宜 4 小流域に區分し、全流域に總雨量 120 mm 、蒸發滲透による損失を除いた有効雨量 100 mm の矩形型降雨があり、その降雨繼續時間 T が 6 時間、12 時間、24 時間であつた場合について各々その單位波を計算し、それらの合成波を求めたのが 圖-24, 25, 26 である。

而してこれらの合成波と、1937 年實際に生起した洪水波を比較すると、6 時間降雨の場合の合成波と相當よく合致していることが判る。有効雨量 105 mm 程度の三角形降雨として計算したならもつとよく合致することと思はれる。

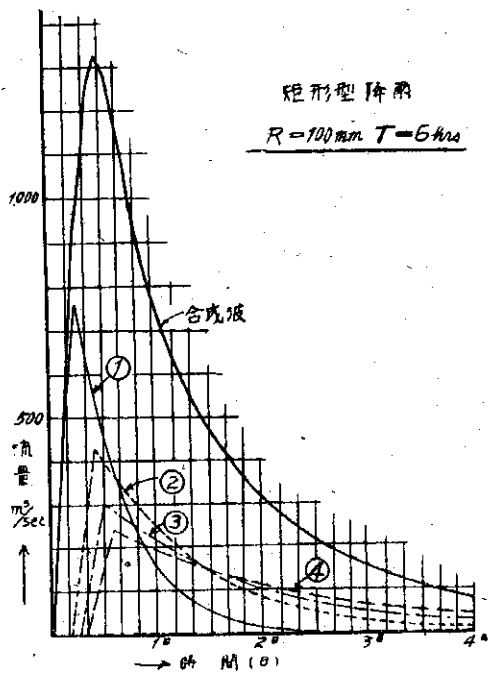


圖-24

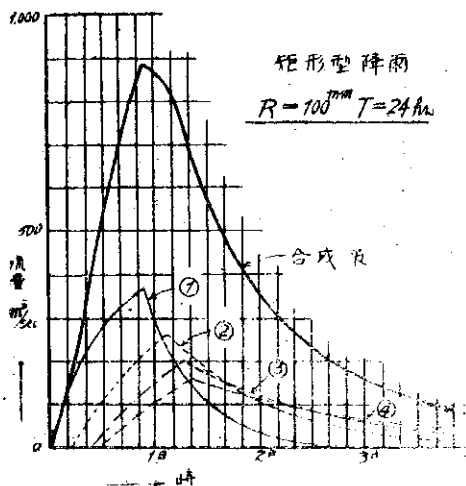


圖-25

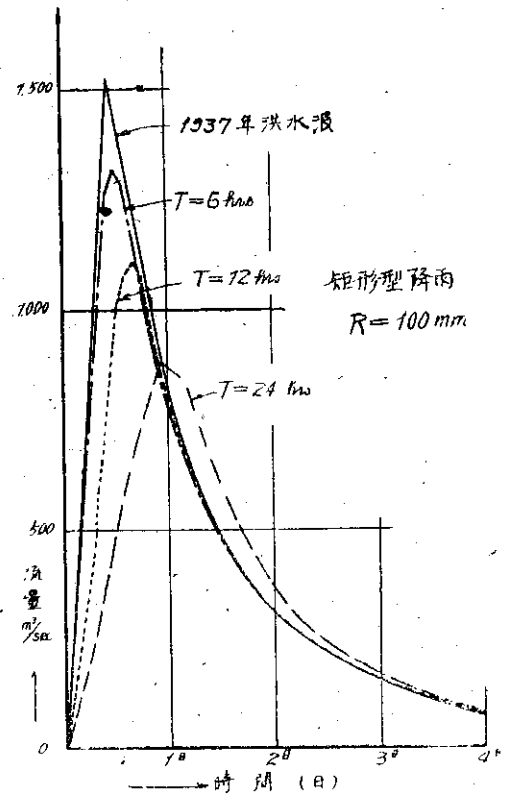


圖-26

11. 結 語

河川流出に対しては降水量、その時間的並に地域的分布、流域の面積形状勾配、流出率、河道の調節作用等何れも関連性を有する重要な要素であり、何れも決して無視せらるべきものではない。従来の洪水流量公式は単に日雨量、流域面積の項を含むに過ぎず、すべての未知項を流出率の中に包含させているものが多く、これ等を以つて凡ゆる流域の洪水流量を求めんとするのは甚だ不合理と云はねばなら

ぬ。筆者の上記の研究はなほ今後の検討に俟つべきもの少くないが、一應それ等に関し総合的に考慮せんとしたものである。

偕てこの理論を用いる爲には、その河川に於いて完全な水位流量曲線が求められて居ること、流域内に相當数の雨量観測所、出来れば2,3の自記観測所が設置せられていることの2つが前提条件となる。又その河川の洪水波の傳播速度が正確に観測せられて居り、もし出来得れば本流筋の河道貯溜容量が測量せられて居れば申分はない。

或降雨條件において、計算により合成した量水曲線と實際に生起したものとを照合し、單位波の到達時間や流出率を適宜訂正することにより、之等の正確な値を求め、又一方この流域の降雨の地域的、時間的分布の統計的研究により50年又は100年に1度の最大降雨量を推定することにより計畫洪水流量の決定も可能となるのである。