ベイズ意思決定論における等価性定理のシステム理論的意義

旭　貴朗

(1) 意思決定の合成問題

本研究の目的は意思決定の合成問題を定式化し、システム理論的な意義を明らかにすることである。ここで意思決定とは、複数の代替案の中から望みの性質をもつ代替案を選択するシステムと定義する。また合成問題とは、単純な意思決定を組織的に組み合わせ、全体として複雑な意思決定をさせるにはどうすればいいかを問うことである。したがって本研究は組織設計論の数理的基礎に当たることになろう。

合成問題は詳しく言えば意思決定の分割と結合から成るものである（図１）。つまり直面する全体意思決定をそのままでは求解せず、複数の部分意思決定に分割し、部分解を求める。その部分解を組み合わせることによって、最終的にもとの全体解を求めることを問題としている。

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{分割} & \\
\text{全体意思決定} & \longrightarrow & \text{部分意思決定} \\
\downarrow & & \downarrow \text{求解} \\
\text{全体解} & \longleftarrow & \text{部分解} \\
 & \text{結合} &
\end{array}
$$

図１　意思決定の合成問題

たとえば、つぎのようなことが合成問題である。

1）管理戦略の合成

2）プロセスの分解

3）階層システムの構成

管理システムとはプロセスと管理者から成るフィードバック（あるいはフィードフォワード）システムのことである。管理者は管理対象のプロセスの内部状態や入力出力を観察し、その情報に応じて何らかの対処をするものとする。そのような対処の仕方（ルール）のことをここでは戦略と呼んでいる。戦略は複数のルールから成るものである。管理戦略の合成では、全体意思決定を複数の部分意思決定に分割し、その解を求め、組み合わせることによって、全体最適な戦略を合成することが重要となる。

プロセスの分解とは、与えられた大規模なプロセスを複数の部分プロセスに分割し、それらを組み合わせることによって、もとのプロセスを構成することである。これは階層的意思決定システムの基礎となっている。つまり複雑なプロセスを部分プロセスに分割しておけば、それら部分システムを複数の人間に管理してもらうことが可能となる。

階層システムの構成とは、分割された大規模システムを管理している担当者たちの間の調整を問題としている。部分システムを管理する人々が自分勝手に最適化を行なえばかならず全体システムとして不都合が生じることになる。そこで全体を調整することが必要になってくる。したがってどのような調整方式が有効であるかが問題となる。

このような合成問題に対して、システム理論の観点からみて重要な課題は次のようなものであろう。

1）最終的には全体解が得られるような意味のある分割とは何か。

2）どのような合成方式（種類）があるのか。

3）与えられた合成方式が可能であるための条件は何か。

これらの課題を検討するにあたり、できるだけ首尾一貫した統一的視点のもとに定式化を進めたい。そこで、本稿の目的としては、特に、ベイズ意思決定理論における「事前分析と事後分析の等価性」について明らかにしたい。

(2) 基本決定問題（定式化）

基本決定問題を定義する前に、まず環境というものを定式化する。この節では前提として、2変数をもつ環境（$\Theta \times U$, p）が与えられているものとする。ここにΘはメッセージ集合、Uは外乱集合で、どちらも有限集合とする。またpは$\Theta \times U$上の確率分布関数$p : \Theta \times U \to [0,1]$であり、環境の状態確率とよぶ。組（$\Theta \times U$, p）を環境と呼ぶ。また任意のuに対して周辺確率を次のように定義する。

$$\sum_{\theta} p(\theta, u) = p(u)$$

最初に定義する基本決定問題はメッセージθを利用しないで、外乱に関する確率$p(u)$のみを考える意思決定である。

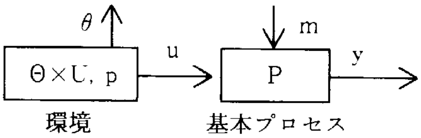

図２　外乱確率をもつプロセス

［定義１］　基本決定問題

1）外乱確率をもつ基本プロセスとは４つ組（M，（U，p），Y，P）のことである。ただし、M、U、Yを代替案集合、外乱集合、出力集合と呼ぶ。外乱集合は有限集合であるとし、周辺確率 p：U→［0，1］が割り当てられているものとする。これを（U，p）と略記する。一方Pは関数P：M×U→Yであり、基本プロセス関数と呼ぶ。

2）基本決定問題とは、基本プロセスと評価関数の組である。D＝（M，（U，p），Y，P，G）と表記する。ただし、評価関数はG：M×U×Y→実数集合である。とくに、合成関数 g（m，u）＝G（m，u，P（m，u））を目的関数と呼ぶ。これは決定理論における利得行列（あるいは損失行列）に相当するものである。

決定原理 ϕ とは、与えられた決定問題Dの代替案Mのなかから望みの性質をもつものを選択する方法のことである。選択された代替案の集合を $\phi(D)\subseteq M$ と表記する。特に本稿では次の期待値原理を採用する。代替案 $m\in M$ の期待利得を

$$E(m)=\sum_{u} p(u)g(m,u)$$

と定義するとき、基本決定問題の解m*は期待利得を最大にするもので、

$$m^{*}\in\phi(D)\leftrightarrow E(m^{*})=\max_{m} E(m)$$

と定義できる。これは情報を利用しない意思決定の解である。

(3) 戦略決定問題（定式化）

これに対して、戦略決定問題は情報を利用する意思決定問題である。まず（フィードフォワード型の）戦略プロセスを定義する。戦略プロセスとは、基本のプロセスPと戦略 σ を組み合わせた複合プロセスのことである。戦略とはメッセージ θ に対して、代替案 $m\in M$ を対応させる関数のことである。$\sigma:\Theta\to M$. 可能な戦略の集合 $\Sigma=\{\sigma\mid\sigma:\Theta\to M\}$ を戦略集合と呼ぶ。考察対象の基本プロセス $P:M\times U\to Y$ を戦略 $\sigma:\Theta\to M$ を用いて操作することを考えたいのである（下図参照）。

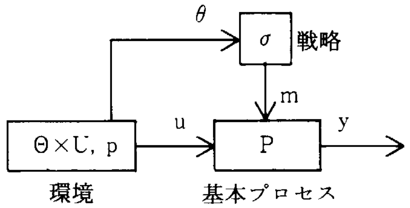

図3　戦略プロセスP'

基本プロセスと戦略はどちらも関数である。$y=P(m, u)$、$m=\sigma(\theta)$。これらを組み合わせた複合プロセスは、$y=P(\sigma(\theta), u)$ と書くことができる。これを「戦略プロセス」と呼ぶことにする。戦略プロセスは、戦略σをパラメータとして、入力（情報θと外乱u）に対して出力yを対応させる関数$P' : \Sigma\times(\Theta\times U)\rightarrow Y$である。

［定義2］　戦略決定問題

基本決定問題$D=(M, (U, p), Y, P, G)$と環境$(\Theta\times U, p)$が与えられているとき、次の5つ組$D'=(\Sigma, (\Theta\times U, p), Y, P', G')$をDに対する戦略決定問題と呼ぶ。ただし、

$$P'(\sigma, u, \theta)=P(\sigma(\theta), u)$$

$$G'(\sigma, u, \theta, y)=G(\sigma(\theta), u, y)$$

このとき目的関数は、つぎのようになる。

$$g'(\sigma, u, \theta)=G'(\sigma, u, \theta, P'(\sigma, u, \theta))$$
$$=G(\sigma(\theta), u, P(\sigma(\theta), u))=g(\sigma(\theta), u).$$

これを期待値原理で求解することを考える。ϕを期待値原理とし、戦略決定問題の解集合を$\phi(D')\subseteq\Sigma$と書くことにする。この段階で、戦略決定問題の解（つまりベイズ戦略）の期待利得が、もとの基本決定問題の解の期待利得よりも常に大きいことを示せる。

［命題1］

基本決定問題Dと、これに対する戦略決定問題D'が所与とする。このとき、任意の解$m^*\varepsilon\phi(D)$、$\sigma^*\varepsilon\phi(D')$に対し、

$$E'(\sigma^*)\geqq E(m^*)$$

が成り立つ。

この命題により、不完全情報の期待価値（Expected Value of Inperfect Information）を定義することができる。EVII＝E’(σ*)－E(m*)。つまり不完全情報の期待価値はつねに非負である。

［命題２］

命題１と同じ前提で、次が成り立つ。

$$\max_{\sigma}\ \min_{u,\theta}\ g'(\sigma,\ u,\ \theta) \geqq \max_{m}\ \min_{u}\ g(m,\ u)$$

これは期待値原理でなく、ミニマックス原理で求解しても、やはり戦略決定問題の解のほうが有利であることを示している。戦略決定問題のミニマックス値は、基本決定問題のミニマックス値よりも大きいのである。

(4) 事前分析と事後分析の等価性

ここではベイズ意思決定理論における事前分析と事後分析の等価性を示そう。これは意思決定の合成問題を解いていると解釈することができる。そもそもベイズ意思決定論では、戦略集合Σ＝{σ｜σ：Θ→M}の中から、同時確率による期待利得$\sum p(u,\ \theta)g(\sigma(\theta),\ u)$を最大にする戦略$\sigma$*を選択することを事前分析と呼んでいた。つまり戦略決定問題である。

一方、事後分析の方法では、一つひとつのメッセージθを前提とし、条件付確率による期待利得$\sum p(u \mid \theta)g(m,\ u)$を最大にする代替案m*を選択することになる。これを各θに対して実行すれば、対応 $\theta \mapsto m^*$ がベイズ戦略として構成できるのであった。事後分析では１回の計算量は事前分析よりも小さくなるのが利点である。すなわち、単純な意思決定（事後分析）を組み合わせることによって、複雑な意思決定（事前分析）を行わせているのである。

［定理３］

外乱確率をもつ意思決定問題D=(M，（U，p），Y，P，G）および環境システム（Θ×U，p）を所与とする。任意のθに対して、部分決定問題を

$$D(\theta)=(M,\ (U,\ p(-\mid\theta)),\ Y,\ P,\ G)$$

とする。また部分決定問題の解$m^* \varepsilon\ \phi(D(\theta))$から合成される戦略を

$$\sigma^*:\ \theta \mapsto m^* \varepsilon\ \phi(D(\theta))$$

とする。このとき、σ*は戦略決定問題D’の解である。つまり$\sigma^* \varepsilon\ \phi(D')$である。ただし、関数$p(-\mid\theta)$：U→実数は条件付確率を表わすものとする。

この定理では、部分決定問題D(θ)を解いて戦略σ*を合成することが事後分析に相当し、戦略

決定問題D'が事前分析に対応している。すなわち定理は、事後分析で得られる戦略が、事前分析の解（ベイズ戦略）になっていることを保証している。

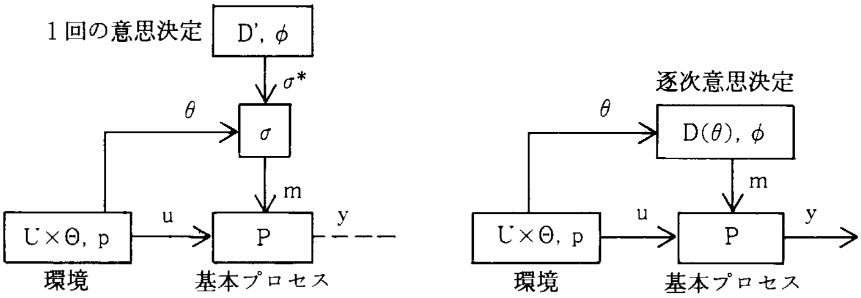

図4　事前分析（左）と事後分析（右）のシステム構成

図4は、事前分析を行なう意思決定システムと事後分析を行なう意思決定システムの構成図である。もちろん左は戦略型目標追求システム（D'，ϕ）であるが、右はいわゆる「逐次型」の構成となっている。つまりメッセージθを受け取るたびに、逐次、決定問題D(θ)を作成し、求解するシステムを表現している。定理3は左右のシステムが同じ行動をとることを示している。この意味で、ベイズ意思決定論における等価性定理は、逐次分割による合成問題を解いていると言えよう。

(5) おわりに

本稿では、外乱情報にもとづいて管理を行なう意思決定のモデルとして、フィードフォワード型戦略決定問題を定式化した（定義2）。次に、その問題の最適解（最適戦略）が部分意思決定集合から合成できることを示した（定理3）。これはベイズ意思決定理論における事前分析と事後分析の等価性を、本稿の枠組みのなかで証明したことを意味する。

その結果、等価性のシステム理論的意味は「フィードフォワード型逐次意思決定への分割（図4)」であることが判明した。動的計画法などに見られるように、通常、逐次最適を繰り返しても、大局的な意味の最適解を得ることができないのは周知の事実である。ところが事後分析では、条件付き確率を利用した部分決定問題D(θ)を逐次求解することにより、全体最適を得ることができている。動的計画法がフィードバック管理の構造をしていることが推測できるが、ベイズの事後分析の枠組みは、そうではなく、フィードフォワード管理の構造をしている。逐次意思決定への分割が成功する理由は、それがフィードフォワード管理の構造をしているからであろう。

この論文の意義は、そういった「理論の背後にある構造」を見い出したことにある。ベイズ意思

決定論から見れば、本稿の結果は新しいものではない。むしろ図2～図4のように図式化できることを示したこと（構造化したこと）にシステム理論的意義を見いだすことができる。副次的ではあるが教育的という意味でも重要な結果であろう。

付録（命題の証明）

命題1の証明

定値戦略の集合$X \subseteq \sum$を$X=\{\sigma m \mid \forall\theta,\ \sigma m(\theta)=m\}$と定義する。

$$
\begin{aligned}
E'(\sigma^*) &= \max\{E'(\sigma) \mid \sigma \varepsilon \textstyle\sum\} \\
&\geqq \max\{E'(\sigma) \mid \sigma m \varepsilon X\} \\
&= \max_{\sigma m} \sum_{u,\theta} p(u,\ \theta)\, g'(\sigma m,\ u,\ \theta) \\
&= \max_{\sigma m} \sum_{u,\theta} p(u,\ \theta)\, g(\sigma m(\theta),\ u) \\
&= \max_{m} \sum_{u,\theta} p(u,\ \theta)\, g(m,\ u) \\
&= \max_{m} \sum_{u} \sum_{\theta} \{p(u,\ \theta)\, g(m,\ u)\} \\
&= \max_{m} \sum_{u} p(u)\, g(m,\ u) = E(m^*)
\end{aligned}
$$

命題2の証明

部分集合$X \subseteq \sum$を定値戦略の集合とする。

$$X=\{\sigma m \mid \forall\theta,\ \sigma m(\theta)=m\}.$$

このとき、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \max_{\sigma} \min_{u,\theta} g(\sigma(\theta),\ u) \\
&= \max_{u,\theta}\{\min g(\sigma(\theta),\ u) \mid \sigma \varepsilon \textstyle\sum\} \\
&\geqq \max_{u,\theta}\{\min g(\sigma m(\theta),\ u) \mid \sigma m \varepsilon X\} \\
&= \max\{\min_{u} g(m,\ u) \mid m \varepsilon M\} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

定理3の証明

σ^*の定義により、任意のθに対して$\sigma^*(\theta)\ \varepsilon\ \phi(D(\theta))$である。つまり、

$$\forall\theta,\ \sum_{u} p(u \mid \theta)\, g(\sigma^*(\theta),\ u) = \max_{m} \sum_{u} p(u \mid \theta)\, g(m,\ u) \tag{1}$$

一方、$g'(\sigma,\ u,\ \theta)=g(\sigma(\theta),\ u)$だから、$\sigma^*\ \varepsilon\ \phi(D')$であるためには、

$$\sum_{u,\theta} p(u,\ \theta)\, g(\sigma^*(\theta),\ u) = \max_{\sigma} \sum_{u,\theta} p(u,\ \theta)\, g(\sigma(\theta),\ u) \tag{2}$$

でなければならない。従って、式(1)を満たすσ^*を任意にとり、それが式(2)を満足することを示せ

ば良い。ところが一般に、式(2)左辺≦式(2)右辺は明らかであるから、結局、式(2)左辺≧式(2)右辺を示せば良い。

任意のθに対して、

$$\{\sigma(\theta) \mid \sigma \varepsilon \Sigma\} = M$$

だから、式(1)を変形すると、

任意のθに対して、

$$\sum_{u} p(u \mid \theta) g(\sigma^*(\theta), u)$$
$$= \max_{\sigma} \sum_{u} p(u \mid \theta) g(\sigma(\theta), u)$$

$p(\theta)$を両辺に乗じ、

$$\sum_{u} p(u, \theta) g(\sigma^*(\theta), u)$$
$$= \max_{\sigma} \sum_{u} p(u, \theta) g(\sigma(\theta), u)$$

θに関する和をとると、

$$\sum_{u,\theta} p(u, \theta) g(\sigma^*(\theta), u)$$
$$= \sum_{\theta} \max_{\sigma} \sum_{u} p(u, \theta) g(\sigma(\theta), u)$$
$$\geqq \max_{\sigma} \sum_{\theta}\sum_{u} p(u, \theta) g(\sigma(\theta), u)$$

すなわち、左辺≧右辺が示された。よって、$\sigma^* \varepsilon \phi(D')$。

参考文献

1）高原康彦他『経営システム』日刊工業（1991）
2）宮沢光一編『経営意思決定』ダイヤモンド（1983）
3）高原康彦他『システム理論』共立出版（1990）
4）宮沢光一『情報・決定理論序説』岩波書店（1971）

（1995年11月22日受理）