進化ゲームの基礎概念と分析上の注意点

旭　　貴　朗

1．概要

進化ゲーム（Evolutionary Game）は、ゲーム理論の概念や手法を適用して、生物の進化を論ずるものである。その特徴は、数理的定式化と演繹により、（生物の形態の違いや行動様式といった）表現型レベルでの進化について考察することである。またこの方法は、ある表現型をもつ生物の適応度が、その集団の他の表現型をもつ個体の頻度に影響を受けるような状況の分析に有効である。

そこで、企業を生物とみたてることにより、進化ゲームを経営学や経済学に応用することが可能ではないかと容易に予想される。しかしながら、理論的背景（モデルの前提条件）を知ることなしに、安易に進化ゲームの結果を借用することは、論理的な危険性をともなうものである。とくに、モデルが前提としていない事柄は、応用に際しての重要な考慮すべき問題となる。

本稿では、J.M. Smith（1982）の所論を中心に、若干の例を挙げながら、進化ゲームの基礎概念（第2節）と、分析方法の概要を述べる（第3、4節）。また、進化ゲームによる分析方法において注意すべき問題点を指摘する（第5節）。

2．分析対象

2.1 表現型と戦略

進化ゲームの分析対象は、基本的には生物集団であるので、まずはその集団に属する個体について考えよう。各個体は、見て分かるような形態の違いや、行動様式の違いをもっている。たとえば、鳥には翼の形といった形態の違いがあり、動物には肉食であるか草食であるかといった行動様式の違いがある。このような生物学上の特徴を表現型という。進化ゲームでは、この表現型のことを「戦略」と呼んでいる。

生物学上の種（しゅ）が異なれば、とりえる戦略は当然異なるだろうが、同一種であっても異なる戦略をもつことはある。たとえば、同一種の蝶や植物であっても、羽や花の色が異なる場合は多い。ある場所で黄色の個体が多い理由を問われたとき、進化ゲームでは「黄色の戦略をとる個体が、生存をかけたゲームを繰り返し、何世代も生き残ってきたからだ」と答えることになる。世代を超えた生き残りという見方からすると、「自然という世界は、地球規模の進化ゲームが展開されている場である」ということができよう。

一方、進化ゲームは、全世界とまではいかないが、ある限られた範囲で相互作用を行なっている、複数の戦略から成る生物集団を分析対象とする。そこでは、時間が経過するにつれて、ある戦略が繁栄し、別の戦略が衰退していく。言い換えると、ある戦略をとる集団の栄枯盛衰を問題としている。そして、最終的にはどのような戦略が生き残るのかを問題とする。

2.2 多型集団と単型集団

進化ゲームの分析対象は、複数の戦略を取りえる個体からなる生物集団であり、多型集団と単型集団の2つに分類される。多型集団とは、各個体があるひとつの戦略をとるならば、死ぬまでその戦略をとりつづけることを意味する。ゲーム理論の言葉では、純粋戦略のみをとることができる場合に相当する。したがって、全体集団は複数の「純粋戦略をとる集団」から成ることになる。そこには、生存のための競争や協力がある。また各個体の子孫は、突然変異により別の純粋戦略をとることもある。その結果、世代の交代にしたがって、純粋戦略の人口分布は変化してゆくことになる。多型集団の分析では、純粋戦略の人口分布の変化を調べることが主要な目的となる。

一方、単型集団とは、各個体が混合戦略をとることがありえるものを指す。この場合、全体集団が、複数の種である必要はなく、単一種であってもよい。ゲーム理論の意味での混合戦略は、ひとつの個体が、あるときにはこの純粋戦略、別のときには別の純粋戦略をとることが可能であることを意味する。その割合は確率的にみて、死ぬまで一定であるとする。さて、ここでもまた、各個体の子孫は、突然変異により別の混合戦略をとることがありえるものとする。その結果、世代の交代にしたがって、混合戦略の人口分布は変化してゆくことになる。

しかしながら、単型集団の場合、混合戦略は無限数個あり、どの混合戦略がどれくらい増加したかなどといった人口分布の変化をすべて追っていくことは不可能となる。したがって、単型集団の分析方法としては、人口分布の変化の追跡は放棄し、ほとんどすべての個体があるひとつの混合戦略をとっているときに、わずかな個体数の突然変異に対して影響を受けるかどうかという点に注目することになる。

2.3 進化的安定性の定義

進化的安定状態（Evolutionarily Stable State）とは、単型集団（混合戦略）においても多型集団（純粋戦略）においても共通に、「他の戦略の侵入を許さない状態」と定義される。

単型集団の場合、集団のすべての個体がある混合戦略Aをとっているときに、わずかな個体数の突然変異（戦略B）が起こったと仮定する。そのとき戦略Bは戦略Aに対して劣位であるために、戦略Bをとる個体は時間の経過にしたがって（自然選択によって）死滅し、最後には、もとの戦略Aをとる個体ばかりの状態に戻ってしまう。そのような戦略Aを進化的に安定な戦略（ESS：Evolutionarily Stable Strategy）という。

一方、多型集団の場合、集団がある人口分布Aをとっているときに、わずかな個体数の突然変異が起こり、人口分布Bになったと仮定する。それでも時間の経過にしたがって（自然選択によって）、最後には、もとの人口分布Aに戻ってしまう。そのような人口分布Aを進化的に安定な状態という。

ここで注意すべきは、集団のタイプの違いである。単型集団の分析枠組みと多型集団の分析枠組みは異なるものである。単型集団で注目する状態とは、すべての個体がとると仮定される混合戦略のことであり、多型集団で注目するのは人口分布である。ある場合には、これらを同一視することが可能であるが、同一視できない場合もあり、本来は別種の概念である（第5節で詳述する）。したがって、それぞれの場合における進化的安定性の具体的表現（数理的に表現される進化的安定性の定義）は異なるものになる。その違いに注意しながら、分析を進めるべきである。

2.4 個体間の相互作用

次に、タカ・ハトゲームを定式化しながら、個体間の相互作用について述べる。ある集団を考え、そこには無限個数の個体がいるものとする。また各個体は、次の2つの純粋戦略のうち、どちらかをとることができるものとする。

「タカ戦略H」：自分が傷つくか相手が逃げ出すまで戦いを挑み続ける。

「ハト戦略D」：まず誇示する。相手が戦いを挑めば、ただちに逃げ出す。

このとき、任意の2つの個体が出会って、エサを求めて戦ったら、どのような結果になるだろうか。下表（表1）は、そのような戦いのあとの、適応度の増減を表わす行列である。

表1　タカハトゲームの利得行列

	H	D
H	(V-C)/2	V
D	0	V/2

縦軸に個体１の戦略{H，D}、横軸に個体２の戦略{H，D}が並んでおり、表の中は、個体１の利得の増加分を表わしている。表中の記号は、Vがエサを獲得したときの利得の増加分、Cは傷を受けたときの利得の減少分を表わしている。たとえば、タカ戦略Hをとる個体１が、同じくタカ戦略Hをとる個体２と出会ったとき、確率1/2でエサを獲得し、確率1/2で負傷するので、期待利得は(V−C)/2である。また、ハト戦略D同士の個体が出会ったときは、仲良くエサを分け合うので、利得はV/2だけ増加するのである。

このような利得の増減は、個体１だけでなく個体２もまったく同様であり、対称的に考えることができる。したがって、これを対称ゲームという。一般的には、非対称ゲームを考えることができるが、ここでは単純に対称性を仮定する。また、以下では、この表を２変数関数ｕ(ｉ，ｊ)で表示する。たとえば、u(H，H)＝(V−C)/2、u(D，D)＝V/2である。

個体間の相互作用は、なにも「戦い」に限ったわけではない。進化経済学への応用では、２人の人間が企業を起こして、利潤を獲得する状況を考えることもある。その場合、相互作用は「協力して企業を起こすこと」であり、適応度は「企業の利潤」とみなしていることになる。このように、

１）各個体は、なんらかの意味の適応度をもち、

２）相互作用によって、適応度が増減する。

という設定をすることが、進化ゲームにおける基本である。

さて、無限要素をもつ集団のなかで、各個体はランダムに相互作用を行なうものとする。これを「ランダムマッチング」という。では、そのような状況で、各個体の適応度は、どのように計算することができるだろうか。それをタカハトゲームを例として、多型集団と単型集団に分けて、考察しよう。

３．多型集団の分析

多型集団とは、各個体が純粋戦略しか取れないものをいう。そこでは、人口分布の変動ダイナミクスを定式化し、安定な人口分布を求めることが焦点となる。

3.1 多型集団における個体の適応度

多型集団の分析の焦点は人口分布にある。そこで、現在時点で、タカ戦略をとる人口の割合がp1で、ハト戦略の割合がp2であるとしよう(p1＋p2＝1)。その集団のなかでランダムマッチングの対戦がおこなわれると、各戦略をとる個体の適応度は、利得行列（表１）を計算して、つぎのように増加する。

$u(H,p)=p1*u(H,H)+p2*u(H,D)$

$u(D,p)=p1*u(D,H)+p2*u(D,D)$

ただし、記号*は積の演算である。

ここで、相互作用以前の時点での（生まれながらの）適応度が定数cで、すべての個体に共通であると仮定する。すると、対戦後の、タカ戦略をとる個体の適応度u(H)とハト戦略をとる個体の適応度u(D)は、次のようになる。

$u(H)=c+u(H,p)$

$u(D)=c+u(D,p)$

理論的には、個体間相互作用の利得行列（表１）は、あくまでも対戦による増加分である。したがって、適応度の定式化は、生まれながらの適応度cを別に考えて、両者を加算するほうが論旨が一貫していると思われる。

3.2 多型集団のダイナミクス

さて、直観的には適応度の高いものが生き残り、その子孫を増やすことができると考えられる。そこで、ここでは「各個体は、適応度に比例して子孫を残すことができる」と仮定する。

総人口をＮとすると、適応度u(H)をもつ個体の数はN*p1である。したがって、

タカ戦略の部分集団は、全体としてN*p1*u(H)の適応度をもち、

ハト戦略の部分集団は、全体としてN*p2*u(D)の適応度をもつ。

そこで、次の世代（子孫）の人口分布（割合）に注目すると、戦略Ｈをもつ子孫の割合p1'と戦略Ｄをもつ子孫の割合p2'の比は、N*p1*u(H)対N*p2*u(D)のはずである。よって、u=p1*u(H)+p2*u(D)として、

$p1'=p1*u(H)/u$

$p2'=p2*u(D)/u$

となる。人口分布p=(p1,p2)が、次の世代にはp'=(p1',p2')に変化することになる。これを「離散時間軸のダイナミクス」と呼ぶ。離散時間軸というのは、集団が１年毎のある時期に、一斉に子供を生むことに相当する。

これに対して、繁殖期がとくに定まっていないような場合、つまり子孫の割合が微小時間ごとに変化する場合には、連続時間軸を考える必要がある。そのときには、次のような時間に関する微分方程式を考えることになる。

$dp1/dt=p1*(u(H)-u)/u$

$dp2/dt=p2*(u(D)-u)/u$

また、シミュレーションによる計算のために、時刻tから微小時間Δtだけ経過したときの人口分布を、

p1'＝p1＋Δt*p1*(u(H)-u)/u

p2'＝p2＋Δt*p2*(u(D)-u)/u

と近似することもできる。これを「連続時間軸のダイナミクス」という。Δtを1に設定すると、離散時間軸のダイナミクスに一致することに注意しよう。しかし実際には、Δtは微小数であるので、比例方向への完全な変動ではなく、わずかな変動となる。

3.3 多型集団の進化的安定状態

さて、各ダイナミクスでの「定常状態」とは、時間に関して変化しない状態（人口分布）のことである。具体的にはp'＝pとなる人口分布のことである。タカハトゲームの場合は、

p1*(u(H)-u)＝0かつp2*(u(D)-u)＝0

を解けばよい。p1＝p2＝0はありえないので、可能性としては3種類ある。

1）p1＝1,u(H)＝u

2）p2＝1,u(D)＝u

3）u(H)＝u,u(D)＝u

しかしながら、3つの定常状態のすべてが「漸近安定」であるとはいえない。漸近安定とは、直観的に言えば、しだいにその点に近づくという概念である。一般に、定常であっても漸近安定とは限らないので、安定分析をする必要がある。タカハトゲームの場合は、変数の数が少ないので手計算で求解することができる。しかし多くの場合は、上記ダイナミクスをプログラミングし、コンピュータシミュレーションをおこなって漸近安定な状態を求めることになる。

進化ゲームでは、多型集団の分析において、上記ダイナミクスのもとで漸近安定な状態のことを「進化的安定状態」と定義している。漸近安定な状態を進化的安定状態と呼ぶのには理由がある。漸近安定な状態の付近では、といっても限られた範囲のなかの、すべての状態が時間の経過にともなって、その安定状態に変動してゆく。これは「わずかな人口分布の変化が起こっても、もとの分布に近づく」ということである。つまり、わずかな個体数の突然変異に対して、頑健性をもっているということを意味しているからである。

3.4 簡略ダイナミクス

進化経済学では、上記ダイナミクスを簡略化し、つぎのようなダイナミクスを考察することがある。

$dp1/dt = p1*(u(H)-u)$

$dp2/dt = p2*(u(D)-u)$

これは、連続時間ダイナミクスから、分母のuを削除した式である。このダイナミクスをreplicator dynamicsと呼ぶことがある。

個体間の相互作用が、対称ゲームで表現されているときには、この簡略ダイナミクスの進化的安定状態は、連続時間ダイナミクスの進化的安定状態と一致することが証明されている。しかしながら、非対称ゲームでは、一致するとは限らないので注意を要する（5.5節で詳述する）。

特に、戦略が２つのときは、第１式のみの考察で十分である。そこで、u(H)とuに、それぞれの定義式を代入して、

$dp/dt = [(u(H,H)-u(D,H))p + (u(H,D)-u(D,D))(1-p)]p(1-p)$

と変形することができる。ここまでくれば、u(i,j)の大小関係だけで、安定性を議論することができる。Weibullは、このような分析方法を多用している。

3.5 進化的安定状態の解法（多型集団）

進化ゲームの安定状態は、２段階で求めることができる。第１は定常状態を求める段階であり、第２は、各定常状態のまわりでの安定性を調べる段階である。

命題１

多型集団のダイナミクスにおいて、人口分布p＝(p1,p2,...,pn)が定常状態であるための必要十分条件は、任意の純粋戦略iに対して「もしもpiがゼロでないならばu(i,p)＝u(p,p)」が成り立つことである。ただし、

$u(i,p) = p1*u(i,1) + p2*u(i,2) + ... + pn*u(i,n)$

$u(p,p) = p1*u(1,p) + p2*u(i,p) + ... + pn*u(n,p)$

である。

以降の諸命題の証明はすべて付録に一括して記載する。piがゼロでないとき、純粋戦略iを、pのサポートと呼ぶことがある。この用語を使えば、pが定常状態であるための必要十分条件は、すべてのサポート戦略iに対してu(i,p)＝u(p,p)が成り立つことである、と言い換えることができる。

実際には、つぎの手順になる。p1＋p2＋...＋pn＝1であるから、すべてのpiがゼロになることはない。そこで、どれかひとつだけのpiがゼロである場合を考える。この場合は可能性がn通りあり、pi＝1かつpj＝0(for any other j)に対して、u(i,p)＝u(p,p)であることを確認すればよい。つぎに、

ふたつのpiがゼロである場合を考える。可能性はn(n-1)通りある。iとjがサポートであるとし、連立方程式pi＋pj＝1,u(i,p)＝u(j,p)を解くことになる。順序よく繰り返し、すべてのpiがゼロでない場合まで計算を続ければよい。

第２段階では、上で求めた各定常状態に対して、漸近安定であるかどうかの安定判別をすることになる。タカハトゲームのように戦略数が２つのときは、手計算で求解することができる。また、分母の項がない簡略ダイナミクスでは、戦略数が多くても多項式システムの安定判別法が適用できる。

一般の場合には非線形システムとなるので、リャプノフ関数を求めることが必要になる。しかしながら、リャプノフ関数を見つける普遍的な方法は存在しないので、最近では、各ダイナミクスをプログラミングし、コンピュータシミュレーションをおこなって漸近安定な状態を求めている。

４．単型集団の分析

単型集団とは、各個体が混合戦略を取りえるものである。これに対する進化ゲームの分析方法を概説しよう。単型集団の分析では、人口分布の変化の追跡は放棄する。そのかわり、ほとんどすべての個体があるひとつの混合戦略をとっているときに、わずかな個体数の突然変異に対して影響を受けるかどうかという点に注目することになる。

4.1 混合戦略をとる個体の相互作用

単型集団では、各個体は混合戦略をとることができる。そこで、タカハトゲームを例として、相互作用による適応度の変化を計算しよう。ある個体１の混合戦略として、タカ戦略をとる確率がp1で、ハト戦略の確率がp2であるとしよう。このような混合戦略をp＝(p1,p2)と書くことにする（ただし、p1＋p2＝1である)。また別の個体２の混合戦略をq＝(q1,q2)と書くことにする。この２つの個体が出会って相互作用を行なった結果、適応度はどのように変化するであろうか。利得行列（表１）により、個体１の期待利得（増加分）は、

$$u(p,q)=p1*q1*u(H,H)+p1*q2*u(H,D)+p2*q1*u(D,H)+p2*q2*u(D,D)$$

である。

式の形から、u(p,q)は右線形性と左線形性をもっている。つまり、

$$u(p,q+ar)=u(p,q)+a*u(p,r)$$

$$u(p+ar,q)=u(p,q)+a*u(p,r)$$

が成り立つ。ただし、aは定数、rは混合戦略であり、左辺の括弧内の記号＋はベクトルの加算を表わし、右辺の記号＋はスカラーの加算を表わしている。

4.2 単型集団における個体の適応度

ここで、ほとんどすべての個体が混合戦略pをとっているときに、全人口のεの割合の個体が、突然変異を起こし、混合戦略qをとるようになってしまった状況を考える。その状況ではランダムマッチングをする各個体の適応度をどのように決めればよいだろうか。

まず集団全体を考える。任意に選んだひとつの個体が純粋戦略Hをとるのは、それが混合戦略pをとる個体である場合と混合戦略qをとる個体である場合の2つの場合だけである。したがって、任意に選んだひとつの個体が純粋戦略Hをとる確率は、$(1-\varepsilon)p1+\varepsilon q1$である。また、純粋戦略Dをとる確率は、$(1-\varepsilon)p2+\varepsilon q2$である。したがって、ランダムマッチングの前提から、この集団全体は、混合戦略$((1-\varepsilon)p1+\varepsilon q1,(1-\varepsilon)p1+\varepsilon q1)=(1-\varepsilon)p+\varepsilon q$をとる、ひとつの個体であるとみなすことができよう。ただし、右辺の記号＋はベクトルの加算をあらわす。

つぎに、混合戦略pをとるある個体1を考え、その適応度が相互作用のあとで、どのようになるかを考える。集団からランダムに選択された別の個体と相互作用をおこなうことは、混合戦略$(1-\varepsilon)p+\varepsilon q$をとる、ひとつの個体と対戦することと同じであるから、個体1の適応度u(p)は、4.1項の記法を使い、

$$u(p)=c+u(p,(1-\varepsilon)p+\varepsilon q)$$

となる。ただし、定数cは相互作用の前の（生まれながらの）適応度である。一方、突然変異した個体の適応度u(q)は、

$$u(q)=c+u(q,(1-\varepsilon)p+\varepsilon q)$$

である。

4.3 単型集団の進化的安定性

さて、混合戦略pが進化的に安定であるための条件を求めよう。単型集団における進化的安定性とは、大多数の個体が混合戦略pをとっている状況のなかで、突然変異によるどんな混合戦略qでも生き残ってゆけないというものである。直観的には適応度の低いものが死滅し、その子孫を増やすことができないものと考えられる。したがって、$u(p)>u(q)$であればよい。

定義1　単型集団の進化的安定戦略

単型集団において、混合戦略pが進化的に安定であるとは、ある正定数λ $(0<\lambda<1)$が存在し、任意の正数$\varepsilon<\lambda$と、任意の混合戦略qに対して、

$u(p,(1-\varepsilon)p+\varepsilon q) > u(q,(1-\varepsilon)p+\varepsilon q)$

が成り立つことである。

これは、注目している戦略pに応じてλという範囲（人口割合）が定まり、その範囲内で発生する突然変異はすべて劣位であることを意味する。また関数u(p,q)の右線形性より、

$u(p,(1-\varepsilon)p+\varepsilon q) = (1-\varepsilon)*u(p,p)+\varepsilon*u(p,q)$

$u(q,(1-\varepsilon)p+\varepsilon q) = (1-\varepsilon)*u(q,p)+\varepsilon*u(q,q)$

が成立する。したがって、２式を比較して、次の命題が得られる。

命題２　(J.M. Smith)

単型集団において、混合戦略pが進化的に安定であるための必要十分条件は、任意の混合戦略qに対して、次の２つが同時に成立することである。

$u(p,p) \geqq u(q,p)$ for any q,

if $u(p,p)=u(q,p)$ then $u(p,q)>u(q,q)$

証明は、付録の補題Aにおいて、A(q)＝u(p,p)-u(q,p), B(q)＝u(p,q)-u(q,q)とすればよい。上記の第１式は、混合戦略pが、個体間相互作用の利得行列（表１）においてナッシュ均衡点であることを意味している。したがって、単型集団における進化的安定戦略は、ナッシュ均衡の特殊なものであることがわかる。

4.4 進化的安定状態の解法（単型集団）

単型集団の進化的安定状態の判別法に関しては、先行研究（Bishop & Cannings 1978）があるが、それは必要条件にすぎない。つぎの定理は、前命題の２条件を、付録の補題Bと補題Cの条件に直接置き換えたものである。

定理３

単型集団において、混合戦略p＝(p1,p2,...,pn)が進化的安定状態であるための必要十分条件は、つぎの３つの条件が同時に成り立つことである。

1）各純粋戦略iに対して、もしもpi≠0ならば$u(p,p)=u(i,p)$。

2）各純粋戦略iに対して、もしもpi＝0ならば$u(p,p)\geqq u(i,p)$。

3）Support(q)＝{i|u(i,p)＝u(p,p)}であるような任意のqに対し、$u(p,q)>u(q,q)$。

ただし、

$$u(i,p)=p1*u(i,1)+p2*u(i,2)+...+pn*u(i,n)$$

$$u(p,p)=p1*u(1,p)+p2*u(i,p)+...+pn*u(n,p)$$

$$Support(q)=\{i|qi\neq 0\}$$

である。

この定理によれば、単型集団の安定状態は、条件１)、２)、３）の順に計算することにより、求めることができる。

まず第１に、多型集団のときに定義したサポートという用語を使えば、条件１）は、すべてのサポート戦略iに対してu(i,p)＝u(p,p)が成り立つことである、と言い換えることができる。これは、多型集団のときの定常状態の条件（命題１）とまったく一致している。したがって、そのときの解法手順が適用できて、安定状態の候補をみつけることができる。

第２に、それらの候補に対して、条件２）が成立するかどうかを判定する。すると、集合{i|u(i,p)＝u(p,p)}が確定する。

そこで最後に、集合{i|u(i,p)＝u(p,p)}をサポートとする任意の混合戦略qに対して、条件３）が成り立つかどうかを判定すれば、進化的安定戦略を求めることができる。

５．人口分布と混合戦略の差異

これまでに、４つの分析モデルを提示した。以下では、各モデルにおける進化的安定状態の間の関係を調べる。

5.1 多型安定と単型安定

本稿で提示したのは、つぎの４つの分析モデルである。

１）多型集団における離散時間軸ダイナミクス。

２）多型集団における連続時間軸ダイナミクス。

３）多型集団における（連続時間軸）簡略ダイナミクス。

４）単型集団における混合戦略による期待利得の比較。

多型集団における進化的安定状態は、１）から３）までのダイナミクスにおける漸近安定な「純粋戦略の人口分布」p＝(p1,p2)のことである。一方、単型集団における進化的安定状態は、定義１の式、$u(p,(1-\varepsilon)p+\varepsilon q)>u(q,(1-\varepsilon)p+\varepsilon q)$を満足する「混合戦略」p＝(p1,p2)のことであった。それらを区別するために、本稿では、前者を「多型安定」、後者を「単型安定」と称することにする。

さて、1）から4）のモデルに対する安定状態の間の関係は、いかなるものであろうか。興味の焦点は「同じ相互作用の利得行列（たとえば表1）に対して、異なるモデルをたてて、同じ進化的安定状態を得ることができるだろうか」ということにある。たとえば、同じ利得行列に対して、多型安定な人口分布と単型安定な混合戦略が同じになるかどうかを問題とする。この点に関して、J.M. Smithが次のようなまとまった議論をしているので紹介する。

5.2 単型安定と連続時間軸の多型安定

以下では、おもに個体間相互作用が対称ゲームになっているときを中心に考察する。ただし、5.5項のみ非対称ゲームを扱う。

定理4　(Taylor & Jonker (1978), Zeeman (1979))

p＝(p1,p2,...,pn)が単型安定な混合戦略ならば、p＝(p1,p2,...,pn)は必ず連続時間軸の多型安定な人口分布でもある。しかし、逆は必ずしも成立しない。

同等性に関する定理は、上のひとつだけしか見当たらない。まず、与えられた利得行列に対して、集団が単型であるとして混合戦略の比較を行ない、進化的安定状態を求める（命題1）。それは複数個あるかもしれないので、進化的安定状態の集合をP1と書くことにしよう。つぎに、同じ利得行列に対して、集団が多型であるとして連続時間軸ダイナミクスを定式化する。それを分析して進化的安定状態の集合P2を求める。すると、必ず集合P1が集合P2に含まれる（包含関係P1⊆P2が成り立つ）、しかし両者が等しいとは限らない、というのが定理4の主張である。

表2　Zeemanによる反例

	A	B	C
A	0	5	-4
B	-7	0	8
C	-1	2	0

逆が成立しない例として、Zeemanによるものがある（表2）。このゲームでは、単型安定な混合戦略は、(1,0,0)のひとつしかないが、多型安定な人口分布は、(1,0,0)と(1/3,1/3,1/3)のふたつが存在する。つまり、P1＝{(1,0,0)}⊂P2＝{(1,0,0),(1/3,1/3,1/3)}である。単型集団の混合戦略だけの分析では、多型安定な(1/3,1/3,1/3)という人口分布を求めることができないのである。

5.3 単型安定と離散時間軸の多型安定

では、離散時間軸のモデルではどうだろうか。このときは、どちらの方向にも反例があり、何の保証もない。たとえば、上記Zeemanによるゲーム（表2）に対して、離散時間軸ダイナミクスでの進化的安定戦略を求めると、多型安定な人口分布は、(1,0,0)と(1/3,1/3,1/3)のふたつが存在する。しかし、もともと単型安定な混合戦略は、p＝(1,0,0)のひとつしかないのであった。この事情は、連続時間軸の場合と同じである。つまり、多型安定であるが単型安定ではない状態が存在するのである。

表3　じゃんけんゲーム

	A	B	C
A	-d	1	-1
B	-1	-d	1
C	1	-1	-d

逆の方向が成り立たない例は、じゃんけんゲーム（表3）である。純粋戦略A、B、Cは、それぞれ、グー、チョキ、パーを表わしている。定数dは、引き分けのときの支払いで微小な正数である。このゲームに対して、p＝(1/3,1/3,1/3)は、ただひとつの単型安定な混合戦略であるが、人口分布p＝(1/3,1/3,1/3)は多型安定ではない。このゲームには、多型安定な状態はひとつも存在しないのである。

したがって、離散時間軸の場合は、単型集団の分析を多型集団の分析に活かすことができない。また、反対もだめである。したがって、別々のモデルをたてて分析するしかないのである。

5.4 時間軸

同じ多型集団の分析でも、時間軸が連続であるか離散であるかによって、安定性が異なる場合もある。上記じゃんけんゲーム（表3）では、定理4により、p＝(1/3,1/3,1/3)は連続時間軸で進化的に安定である。しかし、離散時間軸のダイナミクスでは安定ではない。

5.5 非対称ゲーム

また、同じ多型集団の、同じ連続時間軸のモデルによる分析でも、比例変動型の標準ダイナミクスを採用するか、簡略ダイナミクスを採用するかによって、安定性が異なる場合がある。第3.4項でも述べたが、両者が同じ進化的安定状態をもつのは、あくまでも相互作用が対称ゲームであるときだけである。たとえば、つぎのような非対称ゲームを考える（表4）。

表４　非対称ゲーム

	C	D
A	(1,2)	(2,1)
B	(2,1)	(1,2)

ある種１の生物が戦略ＡまたはＢをとり、別の種２の生物が戦略ＣまたはＤをとりえるとする。戦略Ａ、Ｃをとる個体の割合を、それぞれx、yとする。このとき、注目したいのは人口の割合(x,1-x,y,1-y)であるとする。この状況での各個体の適合度は、

$w(A)=y+2(1-y), w(B)=2y+(1-y), v(C)=2x+(1-x), v(D)=x+2(1-x),$

である。$w=w(A)+w(B), v=v(C)+v(D)$とおくと、連続時間ダイナミクスは、

$dx/dt=x(w(A)-w)/w$

$dy/dt=y(v(C)-v)/v$

と書くことができる。このとき、定常状態は(0.5,0.5,0.5,0.5)である。

そこで、簡単のために、xをx+0.5に、yをy+0.5に座標変換しよう。すると定常状態は原点(0,0,0,0)に変換され、ダイナミクスは、

$dx/dt=-y(1-4x^2)/(3-4xy)$

$dy/dt= x(1-4y^2)/(3+4xy)$

となる。原点のまわりのリャプノフ関数は、$H=x^2+y^2-4(x^2)(y^2)$であり、定常状態つまり原点が漸近安定であることが証明できる。

しかしながら、簡略ダイナミクスでは、

$dx/dt=x(w(A)-w)=-y(1-4x^2)/2$

$dy/dt=y(v(C)-v)= x(1-4y^2)/2$

となり、原点は漸近安定ではない。ただし、原点の近傍は閉軌道の集まりであり、リャプノフ安定ではある。

６．おわりに

本稿では、多型集団における進化的に安定な人口分布と、単型集団における進化的に安定な混合戦略との定義上の比較を行なった（第３節、第４節)。また、対象集団を定式化し、進化的安定状態を求めるときの注意点を調べた。その結果、単型集団の分析が多型集団の分析に役立たないことが多いことが分かった（第５節)。

ただし、ここでは多型集団の人口分布の変動モデルとして、適合度に比例する方向に変動するよ

うなダイナミクスを考えたが、その他のモデルを考えることも可能である。しかし、比例変動型のダイナミクスは、比較のための標準としては基本的なものであるために、これを採用したのであった。

本稿の結論を、さらに大まかにいえば、「モデルが異なれば、得られる進化的安定状態は異なるので、モデルは注意深く構築しなければならない」という、きわめて当然なことである。したがって、この分野で論文を書くときは、どのようなモデルを立てたかを、やはり詳細に述べる必要がある。とくに、対象集団のタイプ（多型、単型）、時間軸（連続、離散）およびダイナミクス（比例型、簡略型）などは、説明すべき重要な項目である。

また、シミュレーションに際しては、古来より、乱数発生や有効桁数や無理数の問題が指摘されている。その他には、連続時間軸ダイナミクスに新しい条件（変数間の関係）を付加するときには注意を要すると思われる。これをシミュレーションで分析するときには、いづれ微小時間で近似したものを使用することになるからである。「連続時間軸で定義された単純でないダイナミクス」を離散時間シミュレーションで近似分析する場合には、アルゴリズムそのものの正当性も説明すべき重要な項目である。

謝辞：本稿は、経営情報学会「情報型組織と社会」研究部会例会（1997.05.20）資料を加筆修正したものである。有益な意見をくださった参加者に感謝いたします。

付録

命題1の証明

定常状態は、$dpi/dt=pi*(u(i)-u)/u=0$を満足するものである。$u(i)$の定義から、任意の戦略iに対して、$pi*(u(i)-u)=0$は、$pi*(u(i,p)-u(p,p))=0$と同値であり、これは、「もしもpiがゼロでないならば$u(i,p)=u(p,p)$」と同値である。（証明終）

補題A

n次元単体を$Q=\{(q1,...,qn)|qi\geqq 0,q1+...+qn=1\}$とする。また、$A(q),B(q)$を$Q$を定義域とする連続な実数関数とする。

このとき、ある正定数λ（$0<\lambda<1$）が存在し、任意の正数$\varepsilon<\lambda$と、任意の$q\varepsilon Q$に対して、$(1-\varepsilon)A(q)+\varepsilon B(q)>0$が成り立つための必要十分条件は、次の２つの条件

1）任意の$q\varepsilon Q$に対して、$A(q)\geqq 0$

2）$A(q)=0$ then $B(q)>0$

が成り立つことである。

証明

（必要条件）$f(\varepsilon,q)=(1-\varepsilon)A(q)+\varepsilon B(q)$と書くことにする。任意の正数$\varepsilon<\lambda$と、任意の$q\in Q$に対して、$f(\varepsilon,q)>0$が成り立つことを仮定する。このとき、もしもある$q$が存在し、$A(q)\leqq 0$かつ$B(q)\leqq 0$ならば、$f(\varepsilon,q)\leqq 0$となり、矛盾するので、

$$\text{任意の}q\text{に対して、}A(q)>0\text{または}B(q)>0 \tag{1}$$

が常に成立する。したがって、条件２）が成り立つ。

背理法で条件１）を示そう。あるqに対して、$A(q)<0$を仮定する。性質(1)より、$B(q)>0$である。そこで、$\delta=\min\{\lambda,-A(q)/(B(q)-A(q))\}$とおくと、$\delta>0$である。いま任意に正数$\varepsilon<\delta$をとると、$\varepsilon<\lambda$であり、

$$f(\varepsilon,q)=A(q)+\varepsilon(B(q)-A(q))<A(q)+\delta(B(q)-A(q))$$
$$\leqq A(q)-\{A(q)/(B(q)-A(q))\}(B(q)-A(q))=A(q)-A(q)=0$$

これは、$f(\varepsilon,q)>0$に矛盾する。ゆえに、条件１）が成り立つ。

（十分条件）集合$V\subset Q$を、$V=\{q\mid B(q)\leqq 0\}$とする。Vは連続関数Bによる、閉集合$(-\infty,0]$の逆像であり、単体Qはn次元ユークリッド空間のなかのコンパクト集合（有界閉集合）だから、Vはコンパクト集合である。

さて、条件１）、２）を仮定する。qがVに属さないとき、$A(q)\geqq 0$かつ$B(q)>0$だから、任意のεに対して、$f(\varepsilon,q)>0$が成り立つ。

一方、qがVに属するとき、$A(q)>0$である。実際、$A(q)\leqq 0$ならば、条件１）により、$A(q)=0$、条件２）により、$B(q)>0$となり矛盾である。そこで、関数$g(q)=A(q)/(A(q)-B(q))$を考える。これはコンパクト集合Vから実数への連続関数である。したがって、その像$g(V)$は有界閉集合であり、最小値をもつ。そこで、$\lambda=\min\{g(q)\mid q\in V\}$が定義できて、しかも$0<\lambda<1$である。

したがって、任意の正数$\varepsilon<\lambda$と、任意の$q\in V$に対して、次が成り立つ。

$$A(q)/(A(q)-B(q))\geqq\lambda>\varepsilon$$
$$A(q)>\varepsilon(A(q)-B(q))$$
$$f(\varepsilon,q)=(1-\varepsilon)A(q)+\varepsilon B(q)>0$$

先のqがVに属する場合をあわせると、条件１）、２）が十分条件であることが証明された。

（証明終）

補題B

つぎの３つの条件は、互いに同値である。

1） $u(p,p) \geqq u(q,p)$ for any q(mixed strategy)

2） $u(p,p) \geqq u(i,p)$ for any i(pure strategy)

3）「$p_i \neq 0$ならば$u(p,p)=u(i,p)$」かつ「$p_i=0$ならば$u(p,p) \geqq u(i,p)$」

証明

（1→2）（背理法）仮に、ある純粋戦略jに対して、$u(p,p)<u(j,p)$であったと仮定する。すると、$q_j=1, q_i=0$(for $i \neq j$)なる混合戦略qに対して、

$$u(q,p)=q1*u(1,p)+...+qn*u(n,p)=u(j,p)>u(p,p)$$

となり、1）に矛盾する。ゆえに2）が成り立つ。

（2→1）$u(p,p) \geqq u(i,p)$ for any iであると仮定する。すると、$q1+...+qn=1$だから、$u(p,p) \geqq q1*u(1,p)+...+qn*u(n,p)=u(q,p)$が成立する。

（2→3）条件2）を仮定すると、まず、「$p_i=0$ならば$u(p,p) \geqq u(i,p)$」は明らかに成立する。つぎに、一般性を失うことなく、ある$m(m \leqq n)$が存在して、$p_i \neq 0(i=1,2,...,m)$とする。（背理法）仮に、ある$j(j \leqq m)$が存在して、$p_j \neq 0$かつ$u(p,p)>u(j,p)$であると仮定する。$p1+...+pm=1$だから、

$$u(p,p)=(p1+...+pm)*u(p,p)>p1*u(1,p)+...+pm*u(m, p)=u(p,p)$$

となり、矛盾する。よって、条件「$p_i \neq 0$ならば$u(p,p)=u(i,p)$」が成り立つ。

（3→2）明白である。（証明終）

補題C

pが、任意のqに対して$u(p,p) \geqq u(q,p)$を満足すると仮定する。このとき、与えられたqが、$u(p,p)=u(q,p)$を満足するための必要十分条件は、$Support(q)=\{i|u(i,p)=u(p,p)\}$が成立することである。

証明

$M(p)=\{i|u(i,p)=u(p,p)\}$と書くことにする。一般性を失うことなく、$M(p)=\{1,2,...,m\}$（ただし、$m \leqq n$）とする。前提と補題Aの3）より、$Support(p) \subseteq M(p)$である。また、同補題の2）より、$u(i,p) \leqq u(p,p)$ for any iである。したがって、M(p)に属さない$j(j \geqq m)$に対しては、$u(j,p)<u(p,p)$が成り立つ。

さて、混合戦略qに対して、$Support(q) \neq M(p)$を仮定すると、ある$j \varepsilon Support(q)$が存在して、jはM(p)の要素ではない。したがって、このjは、$q_j \neq 0$かつ$u(j,p)<u(p,p)$を満足する。すると、q

1＋...＋qn＝1より、u(q,p)＝q1*u(1,p)＋...＋qn*u(n,p)＜u(p,p)となる。

逆に、Support(q)＝M(p)を仮定すると、u(q,p)＝q1*u(1,p)＋...＋qn*u(n,p)＝q1*u(1,p)＋...＋qm*u(m,p)＝(q1＋...＋qm)*u(p,p)＝u(p,p)が成立する。

したがって、補題は証明された。（証明終）

参考文献

[1] J.M. Smith, *Evolution and Theory of Games*, Cambridge university press (1982), 寺本英・梯正之『進化とゲーム理論——闘争の論理——』産業図書（1985）

[2] Taylor & Jonker, "Evolutionarily stable strategies and Game dynamics", Math. Biosc., vol.40, pp.145-56 (1978)

[3] Zeeman, "Population dynamics from game theory", proc. Int. Conf. Global Theory of Dynamical Systems, Northwestern: Evaston (1979)

[4] Bishop & Cannings, "A generalized war of attition", J. Theor. Biol., vol.70, pp.85-124 (1978)

[5] Jorgen W. Weibuli, *Evolutionary game theory*, MIT Press (1995)

（1997年10月6日受理）