

装置産業のスケジューリング問題とそのモデル化

今 泉 淳

- 1 目的
- 2 装置産業の生産システムの特徴とスケジューリング
- 3 本稿が対象とする生産システムの概要
 - 3.1 システムの概要
 - 3.2 評価尺度
 - 3.3 本システムに対する解法の概要
- 4 抽象モデルの構築
 - 4.1 過去の研究モデルについて
 - 4.2 本質的に欠かすことのできない要因
 - 4.3 省略を考慮すべき要因
 - 4.4 目的関数について
- 5 問題の定義
- 6 評価尺度を総所要問題とした場合の解法の概要
 - 6.1 分枝限定法を適用する上でのポイント
 - 6.2 本アプローチが着目するスケジュールのクラス
 - 6.3 割り付け対象となる作業と機械の選択
 - 6.4 下界の計算法
 - 6.4.1 下界1—ジョブに基づく下界
 - 6.4.2 下界2—第2工程の機械に基づく下界
 - 6.5 数値実験の結果の概要
- 7 評価尺度を総納期遅れとした場合の解法の概要
 - 7.1 記号の定義
 - 7.2 定式化
 - 7.3 緩和の考え方
 - 7.3.1 原問題の特徴
 - 7.3.2 機械の能力を緩和した場合の子問題と解の性質
 - 7.3.3 実行可能解の生成方法に関して考慮すべき点
 - 7.3.4 第1、第2両工程の緩和
 - 7.3.5 第2工程のみの緩和
 - 7.4 ラグランジュ緩和問題
 - 7.5 子問題の特徴
 - 7.6 実行可能スケジュールを得るための手順
 - 7.7 数値実験の結果の概要
- 8 両モデルの長所と短所に関する考察
 - 8.1 総所要時間最小化モデル
 - 8.2 総納期遅れ最小化モデル
- 9 モデルの拡張の方向性
 - 9.1 尺度の複数化
 - 9.2 問題細部の条件を原問題のそれに近づける
 - 9.2.1 ジョブの候補機械
 - 9.2.2 機械の能力差
- 10 おわりに

1 目的

オペレーションズ・リサーチにおけるスケジューリング研究は、抽象的な理論モデルに対するものから、現実にある生産システムに対するものまで幅広く存在する。多くの研究は、組合せ問題的視点からのモデル化を前提にした最適化を指向しているが、それらの中の理論的モデル、具体的にはフローショップスケジューリング問題やジョブショップスケジューリング問題は、ジョブ群の技術的加工順序や加工時間が与えられたときに各機械上での作業の順序づけを行う単一の評価尺度の問題であり、加工や組み立て中心の機械工業を想定したモデルである。しかし、現実のショップがこれら理論モデルのような単純な条件を満たすことは稀である。

一方、装置産業の生産システムのように、工程間の重複生産が許されたり、ジョブが下流工程で異なるジョブに分岐するという、機械工業には無い特徴を持つ生産システムに対する理論的研究は、ほとんどなされていないのが現状である。

本稿では、装置産業の具体的事例である、ジョブが分岐し複数の尺度を持つ2工程並列機械フローショップ生産計画問題^[23]を取り上げ、この問題の抽象的モデル化に関する議論を行い、同時にそれらモデルに対する解法の方角性を提案し、これらから装置産業を想定した抽象モデルの研究の可能性を示唆する。

2 装置産業の生産システムの特徴とスケジューリング

装置産業の生産の一つの特徴として、製造プロセスが複数の大規模設備の集合体である点が挙げられる。すなわち、各工程はバッチあるいは連続的な設備の結合であり、操業上の条件や設備の使用条件、製品の加工条件が生産計画やスケジューリングにおける制約となる。

もう一つの特徴として、比較的少ない種類の素材から様々な製品を作るという側面が挙げられる。すなわち、素材や原料の段階から、工程を経るにしたがって様々な中間品となり、最終的には多くの種類の完成品となる（分解型生産、あるいはブレイクダウン型生産）。同一の中間品から加工される下流工程の中間品や最終製品は、可能な限りその原料となる上流工程の中間品を同一条件で加工をすることが生産上有利なので、このことが理由で加工がバッチ処理される点も大きな特徴である。

このような特徴を持つ生産システムの一例として、鉄鋼生産システム^[26]が挙げられる。鉄鋼の生産システムは、このような条件を備えているとともに、物流のための設備も必要となる、巨大システムである。

鉄鋼業に対するスケジューリングアプローチは、中川 et al.^[18]にも見られるように、評価尺度が複数で、変数や制約条件が膨大な数の数理計画問題として扱われ、大規模問題に対する高速近似解法の提案が主となっている。

しかし、装置産業一般の特徴として、上記のようにバッチ生産、分解型生産などの要素があり、このような要因をもったモデルや最適化問題としての難しさ、あるいは解法の開発は、個々の具体的システムの問題解決に対する基礎的な位置づけとして必要であると考える。

本節では、具体的事例である装置産業の生産システムの生産計画問題^[23]とそれに対する具体的アプローチを説明する。

2 工程の直列型並列機械生産工程（ハイブリッドフローショップ^{9[71]}）であり、第 1 工程には能力の異なる機械が、第 2 工程には能力の等しい機械が、それぞれ並列に存在するが、その他に以下のような特徴がある。

ジョブの分岐 第2工程に進むジョブは、一般に複数のジョブに分岐し、分岐前の第1工程のジョブを親ジョブ、分岐後の第2工程のジョブを子ジョブと呼ぶ。一つの親ジョブに対応して

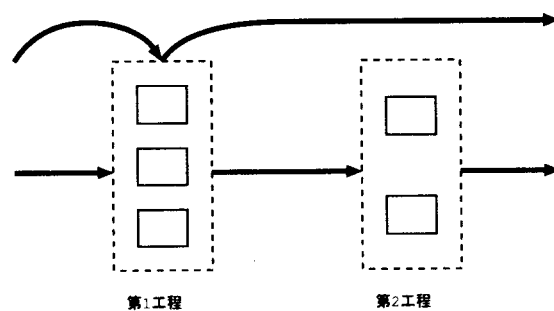


図 1 : システムの概要

子ジョブ群が一意に定まり、異なる親ジョブを共有する子ジョブは存在しない。これが、分解型生産に相当する部分である。

生産要求量 計画期間（通常1カ月＝31日間）に対する子ジョブ、および第1工程で加工を終了するジョブに対する要求量が与えられる。これらから親ジョブの要求量が定まる。

ジョブの行き先候補機械 親ジョブ、子ジョブとも、加工が可能な候補機械が所与である。そのうちのどの機械でどれだけの量を加工するかは、自由に決められる。加工を複数台の機械に振り分けたり、ある機械上での加工を途中で中断することも許される。

中間在庫 第1工程と第2工程の間には親ジョブ毎に専用の中間在庫置場があり、一定量以上の在庫の保有は望ましくない。

上下工程の重複生産 第1工程の加工と第2工程の加工は重複してよい。すなわち、親ジョブの加工が完全に終わっていないくても、終了した「部分」があれば、子ジョブの加工を開始できる。

段取り 第1工程では親ジョブ毎に、第2工程では子ジョブ毎に工具を必要とし、相前後するジョブの間で使用する工具が異なる場合には段取りを必要とする。

3.2 評価尺度

所与の生産要求に対する計画期間内の日単位の計画の立案を行い、以下の点から評価をする。

- i) **需要の満足度** 各ジョブ（親あるいは子ジョブ）の要求量に対する計画期間内における実際の生産量の割合（％）のジョブに関する平均。100％に近いことが望ましい。
- ii) **段取り回数** 第1、第2両工程で行った段取り回数。小さいことが望ましい。
- iii) **中間在庫量** 所与の上限（第1工程の各ジョブの、標準の能力を持つ機械における生産量3日分）を超えた在庫量（超過在庫量）。各ジョブ毎の毎日の超過在庫量が小さいことが望ましい。

3.3 本システムに対する解法の概要

本問題では、第1、第2の両工程が並列な代替機械からなるために各機械での各ジョブの加工量を決定した上で順序づけを行う必要がある、複数の評価尺度を有する問題である。また、問題の規模（変数や制約式の数）から考えても、直接的に解くことは難しく、問題全体を一つの問題に定式化して解くには大きすぎる。そこで、なんらかの分割を施す。問題の分割では、分割された各問題（部分問題）の決定項目と評価尺度の組み合わせ方が大きなポイントとなる。

本問題の決定項目は、

- どの機械でどれだけの量を加工するか

- どのような順序で加工するか
- 第1工程・第2工程のどちらに関してか

に分類することができる。第1工程から第2工程にものが流れるため、決定項目間に依存関係があると見るのが自然とはいえ、独立と見なす考え方もあり得る。

一方、「解法の都合」と「評価尺度の精度に対する要請」は必ずしも一致しないので、そのバランスを考慮することも重要である。以上の視点を踏まえた上で、評価尺度の精度の劣化が少ない分割や決定項目の固定方法、部分問題間の情報の授受を考えたい。そこで今泉 et al.^[23]では、

- 第1工程と第2工程が独立であるとの仮定の下で、各ジョブの各候補機械における仮の加工量を決定する機械割り当て・バッチサイズ決定問題（数理計画問題としての定式化に基づく）
- 仮の加工量に基づき、第1工程に対する手順と第2工程に対する手順を反復する順序づけ問題に分解し階層化するアプローチを採用した。

問題の分割に伴い、各評価尺度をどの部分問題で扱うかを定める必要があるが、基本的に段取り回数をバッチサイズ決定問題で、在庫量を順序づけ問題で扱い、需要の満足度はバッチサイズ決定問題と順序づけ問題の両方において考慮している。

4 抽象モデルの構築

分割アプローチによって本システムのスケジュールを生成する方法を、今泉 et al.^[23]が議論をした。このようなシステムに対するスケジューリング問題では、多くの要因が複雑に絡み合い、その本質的な難しさを見えにくくしている。そこで本節では、抽象モデルの構築を前提に、本システムの要因の中で、難しさを構成する要因として本質的でないものや、解く上で要因として扱いにくいと考えられる部分が何であるかを議論する。

4.1 過去の研究モデルについて

本システムの特徴に関して、既存の理論モデルとの関連を説明する。

並列機械フローショップ 一般にハイブリッドフローショップと呼ばれ、様々なモデルがある。

一例として Brah and Hunsucker^[3]や Rajendran and Chaudhuri^[15]は、標準的フローショップ問題の複数機械の拡張に近く、Gupta and Tunc^[8]や Gupta and Tunc^[8]は、特殊形や変形モデルと位置付けることができる。

段取り ジョブの順序依存の段取り時間を伴うものが典型例で、1機械総所要時間最小化の場合は巡回セールスマン問題に帰着する^[4]ことなどが良く知られている。Gupta^[10]は順序依存の段取り時間を伴うフローショップ問題であり、これら以外にも段取りコストなどの最小化を目的に

した問題が存在する。

複数の評価尺度 ほとんどの研究が1機械問題に集中し、評価尺度もジョブの終了時刻関連尺度が多い。フローショップを対象としたような研究はさらに少なく、ショップ形態にかかわらず、在庫量や段取り回数を評価尺度に含む研究は無いと言って良い^[22]。

重複生産 ロットを更に小さく分割し、工程間の重複生産を許すことによって終了時刻関連尺度の改善を企図する lot streaming^[5]と関連するが、本問題においてはむしろ中間在庫量の関係から、積極的に重複生産を行う必要がある部分に違いがある。

ジョブの分岐 第1工程のジョブの完了を待って第2工程が開始されるのであればジョブが分岐しても問題を生じないが、重複生産が許されたときに第2工程ジョブ同士の競合の問題が生じる。このような状況を扱った研究は存在しない。

これら全部の要因を同時に取り込んだ現実の問題のモデルは筆者の知る限り存在しないが、これらの要因それぞれは必ずしも特殊なものではなく、いくつかを持つような現実の問題が少なからず存在すると考えられる。

4.2 本質的に欠かすことのできない要因

本システムにおいて、不可欠と考えられるのは以下の要因であると考ええる。

ジョブの分岐 ジョブの分岐は、装置産業の生産システムの一つの特徴であり^[19]、従来のモデルには考慮されていなかった要因である。

重複生産 lot streaming と類似する面もあるが、ジョブの分岐が起こるため中間在庫の奪い合いが生じるので、単純に同一視することはできない。

並列機械 各段が単一機械で構成されている場合はこのような問題が起こらないのみならず、装置産業でしばしば見られるショップ形態であることから考えても、単一機械でモデル化することは、本質の大きな部分を失うことになる。

これらの3つの要因が同時に存在することが問題の難しくしていると考えられ、これらのうちの1つが無いような問題は、組合せ最適化問題としての成立するとしても、3つを同時に含む問題に比べて格段にやさしくなる。

4.3 省略を考慮すべき要因

当面は省略を考慮すべき要因は、以下のようなものが挙げられる。

評価尺度の取り扱い 理論スケジューリングにおいては、多くの評価尺度がジョブの終了時刻関連尺度に集中しており、一部の研究で段取り回数などが対象となっている。複数尺度の問題と

してモデル化するかどうかはともかく、超過在庫量のような尺度を対象とする研究はほぼ皆無であり、解法の構築する上でモデルが好ましい数学的構造を有するかどうかは自明ではない。

ジョブの候補機械 ハイブリッドフローショップの研究では、並列に並ぶ全機械で全ジョブを処理可能であることがほとんどである。それに対して本問題では、段取りやジョブの中断可能条件、あるいはジョブを複数の機械に跨ぐように割り付けることも可能であり、加工機械そのものを決定変数とすることは一つの問題の定義として成立するが、多目的問題との両立や次項のジョブの中断条件との両立は、問題の複雑さの観点から難しいと考える。

ジョブの中断可能条件 同一機械上でジョブ分割（他のジョブの割り込み）を許したり、複数の機械に跨ることを許すようなハイブリッドフローショップの過去の研究は皆無であり、森戸 et al.^[29]のような扱いによって定式化を行うことも考えられるが、変数の数などからみて現実的ではない。

多目的性 多目的問題はそれだけで通常の問題以上の難しさを有すると考えてよい。多目的スケジューリング問題に対する圧倒的多数の理論研究が1機械問題に集中している^[22]ことから考えて、本稿が扱うような複雑な問題を多目的問題として扱うことは、前述のように問題に構造的な意味での利点が無い限り、効率的スケジュールを求めるようなアプローチは容易には構築できないと考える。したがって、単一尺度の問題の特性を明らかにした後にアプローチすべきである。

第1工程で終了するジョブ 第2工程の加工時間を0と扱えば良いので、全ジョブが両工程を通過すると仮定しても一般性を失わない。

4.4 目的関数について

需要の満足度が本システムにおける主たる目的関数であることは言うまでもないが、目的関数の一般性という観点からは、本システムに依存した尺度である面も否定できない。

そこで、本アプローチではスケジューリング問題の代表的な評価尺度であり、終了時刻関連の尺度の一つである総所要時間で代替をする。その理由として、

- 総所要時間は設備の稼働率に概ね相当するとみなすことができる
- 設備が有効に利用されたときに需要の満足度が良い値をとると直観的に推測される

などの点が挙げられる。

さらに、従来のフローショップ問題やジョブショップ問題が、総所要時間最小化を中心に研究がなされている現状を踏まえ、これら問題に対して提案されている考え方を利用する可能性を考慮したり、このような尺度を目的関数にした場合の問題の難しさを実験的に分析する意図もある。

もう一つの考えとして、個々のジョブに納期が与えられるような状況での総納期遅れを尺度の候補とすることを考える。これは、本来の問題が1ヶ月単位での生産計画を考えており特に納期が与えられているわけではないとはいえ、納期が与えられているような問題でも求解が可能ならば、システムの運用方法や生産計画の方法に一つの選択肢を与える可能性がある。また、昨今脚光を浴びているラグランジュ緩和を用いた解法^{[12][11]}を適用する方向性もある。そこで、上記の議論を踏まえた抽象モデルの定義、及びそれに対するアプローチを以下に例示する。

5 問題の定義

上記の議論から構築される問題（モデル）を説明する。なお、総所要時間最小化問題を6節で、総納期遅れ最小化問題を7節で説明するが、本節では、両問題の共通部分の定義を示す。

1. 第1、第2工程がそれぞれ U 台、 D 台の並列機械からなる2工程のフローショップである。
2. 第1工程で作業を終了したジョブは逐次連続的に中間品として溜り、それを使って第2工程の作業を開始することができる。すなわち、同一ジョブの第1工程の作業と第2工程の作業が時間軸上で重なって加工されること（重複生産、overlapping production）を許す。
3. 各ジョブは第2工程で複数の作業に分岐する。これら作業は同一種類の中間品を共有する。第1工程の作業を親作業、第2工程の作業を子作業と称し、同一の親作業を共有する子作業同士を兄弟作業と呼ぶ。
4. 各作業は、加工される機械と加工時間（日単位）、中間品に換算した量が所与である。分岐した第2工程の作業は必ず異なる機械上で加工される。第1工程である日に加工を終えた中間品（の部分）は、次の日以降に第2工程で利用可能となる。あるジョブの第1工程の1日間に加工される量は、そのジョブ全体の加工時間と中間品の換算量から計算できる。
5. 作業の中断は許されない。
6. 原材料は常に利用可能である。

このとき、所与の評価尺度を最適にするような各作業の開始時刻（開始日）を決定する。なお、時間軸は第1日から開始し、日単位でスケジュールを考える。

また、以下のような記号を定義する。

M^u 第1工程の機械の集合

M^d 第2工程の機械の集合

i 親作業 i

(i, j) 親作業 i の子作業 j

6 評価尺度を総所要時間とした場合の解法の概要

評価尺度を総所要時間とする理論的スケジューリング研究は膨大な数にのぼり、理論モデルとしては極めて一般的な評価尺度である。また解法構築上、比較的扱いが容易で下界値の計算も考えやすい。このような観点から、分枝限定法を解法の枠組として選択するのは一つの自然な流れでもあり、総所要時間が必ずしもショップ一般の評価尺度では無いという指摘を考慮しても、その適用の可能性を探ることは意義があると考ええる。

なお、1日目から数えて x 日間を要して全てのジョブの加工が終わった場合、 $x+1$ 日の頭（= x 日の終り）に全てのジョブの加工が終わると定義する。

6.1 分枝限定法を適用する上でのポイント

組合せの性質を有する問題に対して分枝限定法を適用することは、自然な流れの一つであり、そこでは

- どのように分枝を行うか
- 下界値の計算方法
- 分枝戦略

などが議論の対象となる。

また、本問題固有の特徴として、「ある子作業の開始を最早で行うことが、当該ジョブにとって相応しいかどうかの保証がない」という性質がある。すなわち評価尺度がなんであっても、従来のフローショップやジョブショップでは、技術的加工順序の観点からみれば同一ジョブ内の各作業は早く終了させることが後続する作業の開始を早め、最終的にそのジョブの最終作業を早く終える結果になる。しかし本問題では、ある子作業を早く終えようとすると、同一ジョブ内の別の兄弟作業の在庫を食い潰す結果になりかねず、別の兄弟作業の開始が遅くなる可能性もある。

このような観点から考えると、スケジュール全体で見た場合、子作業は必ずしも最早開始日で開始することが良いかは分からず、兄弟作業の開始を遅らせることで良いスケジュールになる可能性もある。しかし、各機械で各作業の着手順序のみならず、兄弟ジョブの関係を考えながら各作業の開始日を決定するのは、全スケジュールの列挙のメカニズムが複雑になり、かつ列挙するスケジュールの数が膨大になるなどの問題が発生し得る。

6.2 本アプローチが着目するスケジュールのクラス

スケジュールの生成においては、1日目から始めてガントチャートを順次左から埋めるように作業を割り付けてゆくアプローチを採用する。その際に、部分スケジュールが与えられたら、「それに

対してある作業を割り付ける場合は、最早開始日に開始する」というスケジュールにのみ着目し、作業の開始を意図的に遅らせることは考えない。

親作業や他の兄弟作業の開始日が分かれば、中間品在庫がいつ、どれだけ利用可能かが分かることから、ある部分スケジュールが与えられたときの子作業の最早開始日は、当該子作業の中間品の払い出し量と加工日数から一意に計算できる。

6.3 割り付け対象となる作業と機械の選択

親作業が開始してからある特定の日数が経過したら、少なくとも継続する子作業のうち特定の一つが着手可能となる（問題のデータからあらかじめ計算できる）。その作業が着手できる最も早い時刻に着目することで、少なくとも当該作業が最早に開始するスケジュールを保証できる。そこで、分枝限定法の分枝の対象を、

- 第1工程では、後続する子作業の着手可能日が最早になるような親作業や機械とする
- 第2工程では、最早終了日（最早開始日に加工を開始した場合の終了日）の最も小さい作業や機械とする

といった工夫を施す。

6.4 下界の計算法

以下に説明する2つの下界 (LB_1 , LB_2) と、第1工程の各機械それぞれの加工時間の和から得られる終了日の最大値に1を加えた LB_3 の最大値、 $LB = \max\{LB_1, LB_2, LB_3\}$ を総所要時間の下界値として、分枝限定法によってスケジュールを求める。

6.4.1 下界1—ジョブに基づく下界

部分スケジュール σ に対して、第1工程の各機械の未割り付けのジョブそれぞれに関して、

- そのジョブの親作業は当該機械上の順番の最後に加工されるとし、
- そのジョブの子作業は、それぞれが行われる機械上で、その子作業以外の作業が現部分スケジュール σ に対して機械遊休無しで行われる

という前提で、当該ジョブの子作業の最早開始日を計算する。

この最早開始日にしたがって割り付けたときの終了日は、その作業の他の未割り付けの兄弟作業が無い（存在を無視する）という前提下での終了日とみなすことができる。これを全ての兄弟作業について計算し、それら終了日の最大のものが、ある親ジョブをその機械の最後に加工したときの所要日数の下界となる。そこで、各機械でこの所要日数を最も小さくなるように最後に加工する親

ジョブを選び、第1工程の全機械の中でもっとも大きな所要日数が、部分スケジュール σ の下界になる。

すなわち、第1工程の機械 $m \in M^1$ で加工される未割り付けの親作業集合を $R_m^1 \subset S^1(\sigma)$ とすると、親 $i \in R_m^1$ を当該機械の順序の上で最後に加工し、その子作業 $(i, j) \in S^d(\sigma)$ の、未割り付けの兄弟があってもそれを無視して求めた最早終了日を $C_{(i, j)}$ とすると、

$$LB_1 = \max_{m \in M^1} \min_{i \in R_m^1} \max_{(i, j) \in S^d(\sigma)} C_{(i, j)} \quad (1)$$

は下界となる。

6.4.2 下界2—第2工程の機械に基づく下界

部分スケジュール σ の第2工程の未割り付け作業に対して、少なくともその作業を開始するまでの位の日数が必要かを計算することができる。すなわち、部分スケジュール σ において、第2工程の各機械の未割り付けの子作業に対して、

- 親作業が割り付け済ならば、直接最早開始日を計算する
- 親作業が未割り付けならば、現部分スケジュール σ の後にすぐに続くように該当する親を割り付けた場合の子作業の最早開始日を計算する

ことで、ある子作業の、自分以外の未割り付けの兄弟作業の存在を無視した場合の加工を開始するまでに必要な日数が得られる。その前提で、総所要時間を最小にするような順序を第2工程の各機械で決めたときの、それらの最大値が総所要時間の下界となる。

すなわち、第2工程の未割り付けの全作業の最早開始日が得られたら、第2工程の各機械毎に着手可能時刻付き総所要時間最小化1機械問題を解き、機械 m の最適値を C^m とすると、

$$LB_2 = \max_{m \in M^2} C^m \quad (2)$$

は下界となる。

6.5 数値実験の結果の概要

使用した計算機はMMX 200MHzのAT互換機、使用言語はFreeBSD2.2.1のC言語(gcc)である。探索の戦略は、深さ優先探索を採用している。

本問題に対する提案する解法は、概ね精度の良い解を高速に生成できる。具体的には、

- 第1工程10機械、第2工程10機械、ジョブが60個、全作業数が270個程度の問題であっても、10秒程度で最適解を生成できる場合がほとんどである

- 第1工程20機械、第2工程20機械、ジョブが80個、全作業数が約320個の問題の場合、生成した頂点数が100,000個になった時点で計算打ち切った場合、最適解から1ないし2程度大きい値をもつスケジュールを生成でき、それらの値が実際に算出されるのは計算開始から1分以内の場合がほとんどである

などの結果を得た。

7 評価尺度を総納期遅れとした場合の解法の概要

納期尺度を有するスケジューリング問題は、並列機械に対するLuh et al.^[12]やジョブショップに対するHoitomt et al.^[11]の、ラグランジュ緩和による下界の導出と上界の計算を繰り返すアプローチがある。これらは、ラグランジュ緩和によって、原問題を子問題に分解し最適化して下界値を計算し、同時にその子問題の最適解から作業の優先順位を決定し、その優先順位にしたがってリストスケジューリング^[2]によって割り付けを行い実行可能スケジュールを生成し上界値を得る。

Luh et al.^[12]やHoitomt et al.^[11]の方法の適用では、対象とするモデルの違いがあるため、i) どのような緩和をするか、ii) どのように上界値を算出するか、の二点が焦点となる。

7.1 記号の定義

5節の定義に加えて、以下のような記号を定義する。

集合	O_i	親作業 <i>i</i> の子作業の集合
定数	p_i	親作業 <i>i</i> の加工日数
	$p_{(i,j)}$	親作業 <i>i</i> の子作業(<i>i,j</i>)の加工日数
	$d_{(i,j)}$	親作業 <i>i</i> の子作業(<i>i,j</i>)の納期
	m_i	親作業 <i>i</i> を加工する機械
	$m_{(i,j)}$	親作業 <i>i</i> の子作業(<i>i,j</i>)を加工する機械
変数	δ_{ikt}	親作業 <i>i</i> を機械 <i>k</i> で <i>t</i> 日に加工するならば1、さもなければ0
	$\delta_{(i,j)lt}$	子作業(<i>i,j</i>)を機械 <i>l</i> で <i>t</i> 日に加工するならば1、さもなければ0
	s_i	親作業での開始日
	$s_{(i,j)}$	親作業での子作業(<i>i,j</i>)の開始日
	c_i	親作業 <i>i</i> の終了日
	$c_{(i,j)}$	親作業 <i>i</i> の子作業(<i>i,j</i>)を終了日
	$T_{(i,j)}$	親作業 <i>i</i> の子作業(<i>i,j</i>)の納期遅れ

なお、

$$T_{(i,j)} = \max\{0, c_{(i,j)} - d_{(i,j)}\} \quad (3)$$

である。

7.2 定式化

以下で、 $\Sigma_{(i,j)}$ とは、「全ての (i,j) について」を意味する

目的関数

$$\min_{s_i, s_{(i,j)}} \sum_{(i,j)} T_{(i,j)} \quad (4)$$

制約条件

各日の各機械は、高々 1 つの作業しか処理できない。

$$\sum_i \delta_{ikt} \leq 1, \quad \forall k \in M^u, \quad \forall t \quad (5)$$

$$\sum_{(i,j)} \delta_{(i,j)lt} \leq 1, \quad \forall l \in M^d, \quad \forall t \quad (6)$$

加工日数に関する条件。

$$s_i + p_i - 1 = c_i, \quad \forall i \quad (7)$$

$$s_{(i,j)} + p_{(i,j)} - 1 = c_{(i,j)}, \quad \forall (i,j) \quad (8)$$

$$\text{中間在庫は負になることは許されない。} \quad (9)$$

$$\text{各作業は中断不可である} \quad (10)$$

7.3 緩和の考え方

7.3.1 原問題の特徴

一般にラグランジュ緩和をする場合、どの制約式を緩和するかが焦点となる。その際、緩和問題の解きやすさと下界値の精度のバランスが問題となるが、さらに本問題の固有の特徴として、

- 兄弟作業内の組合せ的性質、すなわちある子作業の開始日が早過ぎると、中間在庫を共有している兄弟作業の開始日に悪影響を及ぼす可能性がある
- 第 1 工程の機械上で作業間の機械遊休が無いスケジュールにのみ注目すれば良い

の 2 点を考慮する必要がある。

7.3.2 機械の能力を緩和した場合の子問題と解の性質

本問題で機械の能力を緩和するアプローチを踏襲することを前提にする場合、子問題の最適解で

は各ジョブ（作業）に関して、

- 本来の目的関数に相当する納期遅れ量
- 双対変数の値（「機械の使用料」と解釈ができる^[27]）

の総和が最小になるような開始日が得られるはずである。

中間在庫に関する制約を守るような緩和の場合は、上記の要素が全体で最小化され、その結果、親子作業や兄弟作業間でバランスがとれた開始日（解）が得られ、中間在庫についての制約も緩和した場合は、納期遅れ量と在庫量が負になることのペナルティ、機械の使用料のバランスを加味した開始日（解）が得られる。

7.3.3 実行可能解の生成方法に関して考慮すべき点

在庫の非負制約を緩和せず機械の能力のみの緩和を前提にする場合は、兄弟作業内の組合せの性質が残るため、緩和問題の最適化の手間は無視できない。一方、実行可能解の生成の際には、

- 子作業の中間在庫に対する奪い合いが生じる状況下では、兄弟作業内での優先順位という相対的關係ではなく、開始日そのものの絶対的關係が重要である
- 親作業の開始日が変わってしまうと中間在庫の時間的推移は変化し、納期遅れ量と機械使用料の総和が最小化され兄弟作業間で開始日のバランスがとれたはずの緩和問題の解が、全くあてにならなくなる可能性がある

などを考慮する必要がある。したがって、実行可能解の生成時に緩和問題の解を参考にする場合、

- 親作業の開始日が子問題を最適に解いた際の開始日から変わる
- 親子間あるいは兄弟間の開始日の絶対的關係が失われる

ような緩和法は、実行可能解の生成上は不利であると考えられる。

7.3.4 第1、第2両工程の緩和

Hoitomt et al.^[11]のジョブジョブ問題に対するラグランジュ緩和の適用では、全ての工程の能力の緩和を前提に、リストスケジューリングという簡便な方法を用いて実行可能スケジュールを生成している。そのアプローチをそのまま踏襲したのが、村上 et al.^[20]の第1、第2の両工程の緩和である。この緩和は、子問題において、

- 各作業の重なり（第1、第2の両工程）
- 第1工程での作業間での機械遊休

を許容するスケジュールとなる。第1工程の遊休や作業の重なりを許すと、第1工程の作業の開始日が、緩和問題の解のそれから実行可能化する際に変わり得る。これによって緩和問題の親作業の

開始日に基づく子作業の開始日まで変更される可能性があり、緩和問題で得たスケジュールにおける「バランス」やその他の情報が失われてしまう可能性が高い。また、子問題の最適化は列挙法に頼らざるを得ず、手間が比較的にかかるわりに、実行可能スケジュールを生成する時点では、最適化から得られた情報が失われる部分が多い。

7.3.5 第2工程のみの緩和

第1工程はその性質から遊休を考える必要は無いので、第1工程では各作業の順列を考えれば良い。順列さえ決れば開始日は各親作業について一意に決定でき、それに基づき最適化を行い子作業の開始日を決定すれば、

- 第1工程は実行可能性を保証できる
- 親作業の開始日は実行可能解を生成する際に変わることはないので、在庫の時間的推移も変化することはない
- 親子間あるいは兄弟間の開始日の絶対的関係が失われることもなく、実行可能化の際は、緩和問題から得られた開始日を基準にしてそれを変更するアプローチが考えられる

などの利点がある。

そこで、第2工程の機械能力のみを緩和する。

7.4 ラグランジュ緩和問題

(6)に対して π_{lt} なる非負のラグランジュ乗数を考え緩和する。

$$\begin{aligned} \min \sum_{S_{it}, S_{(i,j)}} T_{(i,j)} + \sum_t \sum_l \pi_{lt} \left(\sum_{(i,j)} \delta_{(i,j)lt} - 1 \right) \\ \text{s.t.} \quad (5), (7), (8), (9), (10) \text{式} \end{aligned} \quad (11)$$

この問題は、以下のように変形が可能である。

$$\begin{aligned} \min \sum_{S_{it}, S_{(i,j)}} \sum_i T_{(i,j)} + \sum_t \sum_l \pi_{lt} \left(\sum_i \sum_{(i,j) \in O_i} \delta_{(i,j)lt} - 1 \right) \\ \text{s.t.} \quad (5), (7), (8), (9), (10) \text{式} \end{aligned} \quad (12)$$

さらに

$$\begin{aligned} \sum_{k \in M^*} \min_{S_{it}, S_{(i,j)}} \left[\sum_{(i,j) | m_i=k} \left(T_{(i,j)} + \sum_t \sum_l \pi_{lt} \delta_{(i,j)lt} \right) \right] - \sum_t \sum_l \pi_{lt} \\ \text{s.t.} \quad (5), (7), (8), (9), (10) \text{式} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

また、ラグランジュ双対問題は以下ようになる。

$$\max_{\pi} \left[-\sum_l \sum_t \pi_{lt} + \min_{S_{i,j}, S_{(i,j)}} \left\{ \sum_{(i,j)} \left(T_{(i,j)} + \sum_{t=S_{(i,j)}}^{c_{(i,j)}} \pi_{m(i,j)t} \right) \right\} \right] \quad (14)$$

これを劣勾配法^[21]あるいは代理劣勾配法^[17]を用いて解く。

7.5 子問題の特徴

(13)式の第1項は第1工程の機械に関して分解すると、

$$\min_{S_{i,j}, S_{(i,j)}} \left[\sum_{(i,j) | m_i=k} \left(T_{(i,j)} + \sum_t \sum_l \pi_{lt} \delta_{(i,j)lt} \right) \right]$$

となる。これは「第1工程の機械上では作業の重なりを許さず、第2工程の機械上では作業の重なりを許し、納期遅れと機械使用料の和を最小にする問題」である。この問題は、元の問題よりもサイズが小さくなっているもののなお組合せの要素を有しており、子問題は最適に解く必要があるためなんらかの厳密解法が必要である。一般に子問題を解く際に、動的計画法を用いるアプローチ^[1]もあるが、ここでは分枝限定法を用いる^[24]。

7.6 実行可能スケジュールを得るための手順

緩和問題の解は在庫の非負制約を守りつつ、第2工程の機械上での作業の重なりを許しており、これをどのようにして実行可能解に直すかが残された課題である。ここで、子作業は一般には兄弟を持ち在庫を共有しているので、既に述べたように、

- ある子作業の開始日を早くすると、中間在庫を過度に早く食い潰してしまい、他の兄弟作業の開始日が遅くなる可能性がある
- ある子作業の開始日を遅くすると、他の兄弟作業の開始日を早められる可能性があるものの、当該作業の開始日の遅れによる納期遅れ量の増加を招いたり、同一機械上の他の作業の開始日を遅くしてしまう可能性がある

の両者を考慮する必要がある。

すなわち、通常のフローショップやジョブショップのモデルならば少なくとも当該工程を最早で行うことが同一ジョブ内では悪影響を持たないが、本モデルでは同一ジョブ内で互いに依存関係を持っているため、一概に最早開始日で着手できないという難しさがある。その意味で、既に述べたように、Hoitome et al.^[11]の最早開始を前提にしたリストスケジューリングのようなアプローチを採用することは困難である。

一般に、緩和問題の解は第2工程上での「作業の重なり」を含む可能性があり、それをなんらか

の形で無くすと、多くの場合その機械に対応する子問題の目的関数値の増加を招くと考えられる。兄弟作業間の在庫の共有を考慮し、緩和問題の解の目的関数値からの悪化を最小限に抑えるためには、緩和問題において既に納期遅れが大きいような機械の納期遅れ量を可能な限り大きくしないという方針が考えられる。その際、可能な限り他の兄弟作業に影響を及ぼさず、なおかつ既に開始日が決定している兄弟作業の開始日を変えないという制約の元で、開始日を決定しなければならない。

そこで、緩和問題における各機械の納期遅れ量の大きい順に、以下のような手順でスケジュールを決定する。

- step 1 第2工程の各機械毎に子問題の解から総納期遅れを計算し、その降順に機械を並べ $(M_{[1]}, M_{[2]}, \dots, M_{[D]})$ とし、 $i=1$ とする。
- step 2 $M_{[i]}$ で加工される作業を、子問題の解の開始日順に並べる。
- step 3 先頭の作業から「兄弟作業の開始日が、確定していればそれにしたがって、まだ確定してなければ子問題の開始日にしたがって親作業の在庫を払い出し、それから得られる当該作業の最早開始日と機械が利用可能な最早日を比べて遅い日を開始日として確定する」という手続を、順次施す。
- step 4 $i=D$ ならば終了。さもなければ $i=i+1$ として step 2 に戻る。

本手順の思想は、「緩和問題において、第2工程の機械毎に目的関数の値を計算した際に、もっとも値の悪い機械の悪化を可能な限り抑制する」というものである。

7.7 数値実験の結果の概要

使用した計算機はPentiumⅡ 400MHzのAT互換機、使用言語はWindows98上のC++ Builderである。

計算時間の上限を30分とした場合、

- 第1工程8機械、第2工程8機械、ジョブが24個、全作業数が70個程度の問題の場合、双対ギャップが10%から20%程度の解を
- 第1工程10機械、第2工程10機械、ジョブが30個、全作業数が90個程度の問題の場合、双対ギャップが20%から30%程度の解を

生成できる。これらよりも全体の作業数が多くなると（すなわち、各親作業から加工される子作業数が多くなると）、子問題を最適化するための時間が長くなり、全体としての計算時間が多く必要となる。現段階の実装はまだ改良の余地があることと、インスタンスの性質と得られる解の精度の分析の必要性があると考えられるので、それに基づいた精度の改善の可能性はある。

8 両モデルの長所と短所に関する考察

8.1 総所要時間最小化モデル

本モデルは、良好な精度を持つ解を高速に生成する解法を構築するに至った。その観点からすると望ましいモデル化ではあるが、一方で総所要時間そのものが必ずしも現場の尺度を反映したものではないという批判がある。本モデルの場合は、元々の問題が、一定の計画期間内により多くのジョブを詰め込むような問題であるため、そのような本来の問題の趣旨と大きな遊離はないと考えるものの、モデルの一般化や汎用性を目指す観点から見ると、このようなモデルのみで色々な場合に対応できるとは限らない。ただし、このような比較的高速な解法は、一方でこれを用いて新たな枠組、例えば多目的尺度を考慮する場合の、一つの尺度の考慮にこのようなメカニズムを利用するなどの方向性が考えられる。

8.2 総納期遅れ最小化モデル

本モデルは、概ね許容できる精度を持つ解を生成する解法を構築するに至ったが、計算時間については必ずしも高速とは言えない。また、子作業数の増加に伴い、子問題の最適化に要する時間が増大することが予測されることが、大きな欠点である。この欠点は、本問題の本質的部分に依るものと考えられ、このような兄弟作業内の競合が組合せ的な要因として残ること、さらに全体の問題の下界値を計算するために、子問題を厳密に最適化しなければならない、これらのことが全体の計算時間の増大や精度の悪化を招くためと考えられる。また、子問題の性質（ここでは、実験のために生成した問題のパラメータ）によって、子問題の最適化に要する時間が大きく変動することがあり、一定時間内での精度保証が難しいという問題もある。

一方で、各子作業には個々に納期を与えることができるので、このような解法は顧客の要望それぞれにきめ細かに対応できる可能性を示唆している。一般に、フローショップ問題全般に関して、納期関連尺度のスケジューリング問題は比較的难度なことから^[14]、総所要時間最小化モデルとの計算時間の比較は一概にはできない部分もある。

9 モデルの拡張の方向性

9.1 尺度の複数化

本来の問題は多尺度の問題であったが、問題を単純化するために敢えて単一尺度化した。しかし、可能であるならば、本来の尺度全てを考慮することが望ましい。そこで、元々の問題の尺度のうち、考慮対象となっていない尺度、もしくはその代替尺度を考慮対象とし、多目的問題として扱う。多目的最適化はそれだけでも様々な議論が可能であるが、生産スケジューリングで多目的問題を解く

場合、よほど特殊な構造が無い限り分枝限定法を基礎にしたアプローチが多い^[22]。そこで、逆に対象となる尺度が分枝限定法の枠組に当てはまるような、すなわち下界値計算などに目処が立つものが考慮対象になり得る。

在庫（正確には超過在庫量）は従来の研究でも扱われることがない尺度で、数学的な構造については検討の余地が多く、好ましい構造を有するかどうか明らかではない。その一方で段取り回数は、3.3節で触れた今泉 et al.^[23]のバッチサイズ決定問題での扱いのような形があり得ることから、比較的アプローチがしやすいと考えられる。

9.2 問題細部の条件を原問題のそれに近づける

例えば、各ジョブは候補の機械が唯一であるような単純化を行ったが、原問題の条件に近づけることが、本来の問題を解く上で更に重要な基礎的情報を提供する可能性が高い。具体的には、以下のような方向があり得る。

9.2.1 ジョブの候補機械

総所要時間を評価尺度とした場合は、候補機械が複数あっても多少の複雑さは伴うものの、精度の問題を度外視すれば下界値の導出は可能であると考えられる。一方、総納期遅れを評価尺度にした場合は、まず本稿におけるアプローチのような第1工程の機械毎の分解は不可能になる。したがって、分解の段階からアプローチの再構成を余儀なくされる。また、実行可能スケジュールの生成方法にもかなりの工夫が必要になる。

9.2.2 機械の能力差

元々の問題には機械の能力差があった。各作業の候補機械内における加工時間は所与なので、精度に関しては明らかではないが総所要時間を評価尺度とした場合の下界値の計算は可能であるとする。ただし、非一様型の並列機械のスケジューリング問題は存在するが、ハイブリッドフローショップ問題でこのような条件を持っているモデルは、筆者の知る限り存在しないことを附記する。

10 おわりに

本稿では、現実のシステムのスケジューリング問題を元に、それを抽象化したモデルの構築、およびその解法に関する議論を行った。

現実の問題にはさまざまな要因が含まれていることがほとんどで、その本質的難しさがどの部

分にあるかはすぐには分からない。仮に、組合せ的な問題に帰着したとしても、変数の数や制約式の数、組合せ数、あるいはNP困難性などで問題の難しさを表現するのが一般的であり、既存の理論モデルと対比して、どの部分が、どのように扱いにくいかを論じるには、現実の問題を本稿のような抽象モデルに帰着させた上で議論しない限り、比較は一般には容易ではないと考えられる。

一般に納期尺度を有する問題は、総所要時間を尺度とするような問題に比べて解き難いと言われるが、本稿で示した現時点における結果も概ねそれを肯定している。その一方で、納期尺度を有する多くの問題に対して適用が試みられているラグランジュ緩和法によるアプローチが、単純な適用では必ずしも良い結果を生まないような問題の存在を示唆しており、従来の理論モデルから見た場合の、本稿が対象とした問題の困難さを示していると考えられる。

今後の方向性として、両モデルに対する数値実験による分析に加えて、9節で述べたような拡張を施したモデルに対する解法の構築を指向すること考えられる。

謝辞

本研究の一部は、東洋大学井上円了記念研究助成によっている。

参考文献

- [1] J.F. Bard. Short-term scheduling of thermoelectric generators using lagrangian relaxation. *Opns. Res.*, Vol.36, No.5, pp.756-766, 1988.
- [2] K.E. Blazewicz, G. Schmidt, and J. Weglarz. *Scheduling in Computer and Manufacturing Systems*. Springer-Verlag, 1993.
- [3] S.A. Brah and J.L. Hunsucker. Branch and bound algorithm for flow shop with multiple processors. *Eur. J. Opnl. Res.*, Vol.51, pp.88-99, 1991.
- [4] R.W. Conway, W.L. Maxwell, and L.W. Miller. *Theory of Scheduling*. Addison-Wesley, 1967.
- [5] S. Dauzère-Pères and J.-B. Lasserre. Lot streaming in Job-shop scheduling. *Opns. Res.*, Vol.45, No.4, pp.584-595, 1997.
- [6] J.N.D. Gupta. Flowshop scheduling with sequence dependent setup times. *J. Opns. Res. Soc. Japan*, Vol.29, No.3, pp.206-219, 1986.
- [7] J.N.D. Gupta. Two-stage, hybrid flowshop scheduling problem. *J. Opnl. Res. Soc.*, Vol.39, No.4, pp.359-364, 1988.
- [8] J.N.D. Gupta and E.A. Tunc. Schedules for a two-stage hybrid flowshop with parallel machines at the second stage. *Int. J. Prod. Res.*, Vol.29, No.7, pp.1489-1502, 1991.

- [9] J.N.D. Gupta and E.A. Tunc. Schedules a two-stage hybrid flowshop with separable setup and removal times. *Eur. J. Opnl. Res.*, Vol.77, pp.415-428, 1994.
- [10] S.K. Gupta. n Jobs and m machines job-shop problems with sequence-dependent set-up times. *Int. J. Prod. Res.*, Vol.20, No.5, pp.643-656, 1982.
- [11] D.J. Hoitomt, P.B. Luh, and K.R. Pattipati. A practical approach to job-shop scheduling problems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.9, No.1, pp.1-13, Feb. 1993.
- [12] P.B. Luh, D.J. Hoitomt, E. Max, and K.R. Pattipati. Scheduling generation and reconfiguration for parallel machines. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.6, No.6, pp.687-696, Dec. 1990.
- [13] T.E. Morton and D.W. Pentico. *Heuristic scheduling systems*. John Wiley & Sons, 1993.
- [14] M. Pinedo. *Scheduling*. Prentice-Hall, 1995.
- [15] C. Rajendran and D. Chaudhuri. A multi-stage parallel-processor flowshop problem with minimum flowtime. *Eur. J. Opnl. Res.*, Vol.57, pp.111-122, 1992.
- [16] B.N. Srikar and S. Ghosh. A MILP model for the n -job, m -stage flowshop with sequence dependent set-up times. *Int. J. Prod. Res.*, Vol.24, No.6, pp.1459-1474, 1986.
- [17] X. Zhao, P.B. Luh, and J. Wang. Surrogate gradient algorithm for lagrangian relaxation. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 1997.
- [18] 中川義之. 鉄鋼業における離散事象システムの最適化. 室田一雄 (編), 離散構造とアルゴリズムⅢ, pp.163-204. 日本応用数理学会, 近代科学社, 1994.
- [19] 玉木欽也. 戦略的生産システム. 白桃書房, 1996.
- [20] 村上元一, 今泉淳, 森戸晋. ジョブの分岐のある2段階複数機械フローショップにおける納期遅れ最小化スケジューリング: ラグランジュ緩和に基づくヒューリスティックアプローチ. 生産スケジューリングシンポジウム'97, 東京, 1997.
- [21] 今野浩, 山下浩 (編). 非線形計画法, ORライブラリー, 第6巻. 日科技連, 1978.
- [22] 今泉淳. 多目的スケジューリングに関する概観—現在までの研究の流れと招来展望. 東洋大学経営研究所論集, 第22号, 1998 (掲載予定).
- [23] 今泉淳, 山越康裕, 村上元一, 森戸晋. ジョブの分岐を伴う2工程並列機械フローショップスケジューリングへの分割アプローチ. オペレーションズ・リサーチ, Vol.43, No.11, pp.624-631, 1998.
- [24] 今泉淳, 森戸晋. A branch and bound approach to two-stage hybrid flowshop scheduling with job splitting and overlapping production. 1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会秋期研究発表会予稿集, 1996.
- [25] 森戸晋, 今泉淳, 朴宰完. 厳しい制約を有するスケジューリングに対する数理計画アプローチ. 生産スケジューリングシンポジウム'96講演論文集, 名古屋, 1996.
- [26] 中川義之, 熊本和浩, 小西伸之, 西田大, 坂井伸弘. 鉄鋼とOR. オペレーションズ・リサーチ, Vol.43,

No.11, pp.593-597, 1998.

- [27]米田清. ラグランジュ緩和法によるスケジューリング. システム／制御／情報, Vol.41, No.4, pp.130-138, 1997.

(1999年1月12日受理)