投資タイミング・オプションとハードル･レート

飯　原　慶　雄

資本予算、あるいは、企業の投資決定の分野でリアル・オプションの重要性が認識されるようになってきた。この論文では、リアル・オプションの分野でのいつかの話題について検討してみることにする。

McDonald は、企業が慣習的に採用している簡単な投資採用基準が、暗黙のうちに投資タイミング・オプションについての考慮を取り入れているのではないかと推測している。第１節ではその考え方を紹介する。第２節では投資コストが一定率で増加する場合について分析する。

１．投資タイミング問題とハードル･レート

1.1 投資タイミング・オプション[1)]

いま、投資プロジェクトを実行したときに発生する時間当たりのキャッシュフローが、投資を実行する時点とは関係なく、 キャッシュフローが発生する時間だけに依存し、時刻 t から時刻 $t+dt$ までのキャッシュフローが $C(t)dt$ と表わされるものとし、その変動が

$$dC(t)=\alpha C(t)dt+\sigma C(t)dZ(t) \tag{1.1}$$

で表現されるようなものであるとする。αはキャッシュフローの長期的な増加または減少の傾向を示すパラメーターで、αが正であれば、増加を表わし、αが負であれば、減少を示す。σはキャッシュフローの確率的変動の大きさを示すパラメーターで、$dZ(t)$はウィナー確率過程の増分を表わす。以下では、αとσは一定であると仮定する。$C(t)$が C であるとき、$lnC(t+T)$の確率分布は平均 $lnC+\alpha T$、分散 $\sigma^2 T$ の正規分布になり、$C(t+T)$の期待値は $C\cdot exp(\alpha T)$となる。また、リスク・フリー・レートを r で表わし、これにリスク・プレミアムλを加えたρ($\rho=r+\lambda$）をプロジェクトからのキャッシュフローの割引率とする。簡単化のためにプロジェクトの寿命は永久であると仮定する。時刻 t でのキャッシュフローが C であると、プロジェクトから発生する時刻 t 以降のすべ

てのキャッシュフローを割引いたものの期待値は、$\rho>\alpha$であれば、$C/(\rho-\alpha)$となる。$\rho>\alpha$でなければ期待値は発散するので、以下では$\rho>\alpha$であると仮定する。この値は、(1.1)の代わりに、$C(t)$の危険中立的確率過程が

$$dC(t)=(\alpha-\lambda)C(t)dt+\sigma C(t)dZ(t) \tag{1.2}$$

であるとして、将来のすべてのキャッシュフローをリスク・フリー・レートで割引いた合計値について、危険中立的確率を使用して求めた期待値と一致する。

$$E\left[\int_t^{\infty} C(s)e^{-r(s-t)}ds \mid C(t)=C\right]=C/(r-(\alpha-\lambda))=C/(\rho-\alpha) \tag{1.3}$$

この値を$V(C)$で表わし、プロジェクトの現在価値と呼ぶことにする。

$$V(C)=C/(\rho-\alpha) \tag{1.4}$$

プロジェクトの現在価値がある水準に到達したときにプロジェクトを実行することにし、そのような水準を V_A で表わし、対応するキャッシュフローの水準を C_A で表わすことにする。この場合、キャッシュフローの水準が C_A 以下であれば、プロジェクトの実行を延期し、キャッシュフローが C_A に到達したときにプロジェクトを実行することになる。ある条件が成立したときに投資を実行するということは、アメリカン･コール・オプションの権利行使と同じような考え方であるとすることができる。すなわち、投資コストを I とすると、プロジェクトの現在価値を原資産と考え、行使価格が I で、満期が無限期間のアメリカン・コール・オプションについて、原資産の価格が V_A に達したときに権利行使することに対応する。このようなコール・オプションの価格を $W(V)$とすると、$W(V)$は危険中立的確率を使用すると

$$W(V)=E[e^{-rdt}W(V+dV)] \tag{1.5}$$

と表わすことができる。Vの危険中立的確率過程での変動は（1.4)と(1.2)から

$$dV(t)=(\alpha-\lambda)V(t)dt+\sigma V(t)dZ(t) \tag{1.6}$$

となるので、

$$E[e^{-rdt}W(V+dV)]=e^{-rdt}\{W+((\alpha-\lambda)VW_V+1/2\,\sigma^2V^2W_{VV})dt\}$$

となる。W_V、W_{VV} は W の導関数である。上の式の右辺について、e^{-rdt} を展開し、dt の高次の項を無視すれば、

$$W(V)+\{1/2\cdot\sigma^2V^2W_{VV}+(\alpha-\lambda)VW_V-rW\}dt$$

となる。したがって、(1.5) は

$$1/2\cdot\sigma^2V^2W_{VV}+(\alpha-\lambda)VW_V-rW=0 \tag{1.7}$$

となる。$V\to 0$のとき、$W\to 0$となり、Vが V_Aに達すると権利が行使されるので、

$$W(V_A)=V_A-I$$

となる。$W(V)=BV^b$と仮定すると、(1.7)は

$$\{1/2\cdot\sigma^2b(b-1)+(\alpha-\lambda)b-r\}BV^b=0$$

となる。したがって、

$$F(x)=1/2\cdot\sigma^2x(x-1)+(\alpha-\lambda)x-r \tag{1.8}$$

とすると、b は２次方程式 $F(x)=0$の根でなければならない。$F(0)=-r<0$で、$F(1)=\alpha-\lambda-r=-(\rho-\alpha)<0$であるから、２根の一つは負根であり、もう一つは１より大きな正根である。負根に対応する係数 B が零でないと、$V\to 0$ のとき、W は発散するので、負根に対応する係数 B は零である。正根を b_1とすると、

$$b_1=1/2-(r-(\rho-\alpha))/\sigma^2+\sqrt{(r-(\rho-\alpha))/\sigma^2-1/2)^2+4r/\sigma^2}$$

となる。以下の議論との関係でλの代わりに$\rho-r$ を使用した。係数 B は境界条件

$$W(V_A)=BV_A^{b_1}=V_A-I$$

から、$B=(V_A-I)/V_A^{b_1}$となり、これから、

$$W(V)=(V_A-I)(V/V_A)^{b_1} \tag{1.9}$$

となる。このオプションの価値を最大にするような V_A を求め、それを V_H で表わすと、

$$V_H=b_1/(b_1-1)\cdot I \tag{1.10}$$

となる。b_1は１より大きいので、$b_1/(b_1-1)$は１より大きくなり、上の式はプロジェクトからのキャッシュフローの現在価値が投資コストを上回るだけでは十分でなく、$b_1/(b_1-1)$倍になるまで

投資の実行を待つのが最適であることを示している。

1.2 投資決定基準とハードル・レート[2)]

内部収益率はプロジェクトからの期待キャッシュフローのを割引いた合計額が投資コストに等しくなるような割引率であるから、これを R とすると、キャッシュフローの値が C であるときには、

$$C/(R-\alpha)=I$$

から

$$R=C/I+\alpha \tag{1.11}$$

となる。コーポレート・ファイナンスのテキストでは、プロジェクトの採否を決定するために内部収益率が越えなければならないハードル・レートは、そのプロジェクトにたいする要求収益率であると書かれている。この要求収益率を上でプロジェクトからのキャッシュフローの現在価値を求めるために使用した割引率 ρ であるとすると、R が ρ を上回ったときに投資を実行すれば、確かに、キャッシュフローの現在価値 V は投資コスト I を上回ることになるが、R が ρ に等しくなったとき直ちに投資を実行することにすると、正味現在価値は零になってしまう。最適な投資実行時点は、R が ρ に等しい時点ではなく、ρ をかなり上回った時点になりそうである。キャッシュフローの現在価が V_A に達したときに投資を実行することにして、これに対応するハードル・レートを γ_A とすると

$$\gamma_A=C_A/I+\alpha=\alpha+(\rho-\alpha)V_A/I \tag{1.12}$$

となり、V_H に対応するハードル・レート γ_H は、上の式の V_A に（1.10）を代入することにより

$$\gamma_H=\alpha+(\rho-\alpha)b_1/(b_1-1) \tag{1.13}$$

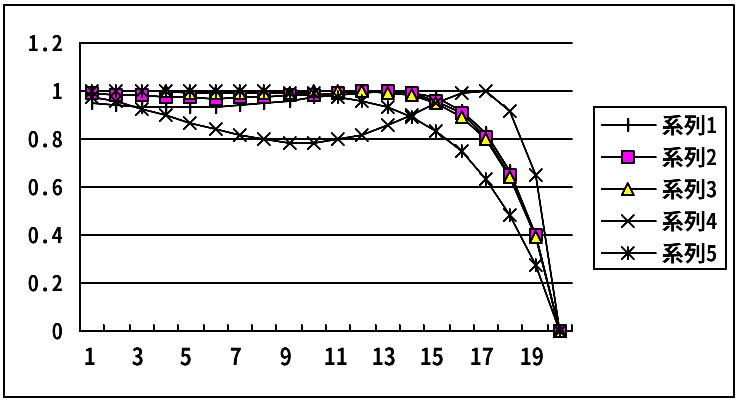
となる。リスク・フリー・レートを８％として、キャッシュフローのボラテイリテイ（σ)、成長率（α)、割引率（ρ）のいくつかの値について、最適なハードル・レートを求めると第１表のようになる。割引率に比較してハードル・レートはかなり高いことがわかる。このことは、通常ファイナンスのテキストに述べられているように、ハードル・レートは、リスク・フリー・レートにリスク・プレミアムを加えた割引率ではなく、これよりも大きな値にすることが適切であることを示している。

第１表　最適ハードル・レート（%）

キャッシュフロー ボラテイリテイ（%）	キャッシュフロー 成長率（%）	割引率		
		８%	12%	16%
20	-3	12.22	15.52	19.13
	0	13.12	16.00	19.40
	3	14.53	16.77	19.82
30	-3	15.83	19.06	22.55
	0	16.66	19.60	22.91
	3	17.80	20.35	23.40
40	-3	20.21	23.47	26.92
	0	20.94	24.00	27.31
	3	21.88	24.68	27.81

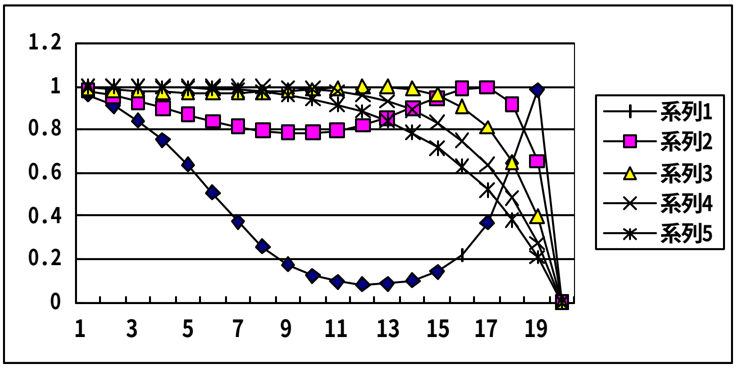
適切なハードル・レートはパラメーターの値によってかなり異なるが、ハードル・レートが異なってもオプションの値に大きな差がなければ、厳密に正確なハードル・レートを設定することはさほど重要視する必要がないかもしれない。実際、第１表のボラテイリテイと成長率の組み合わせのいくつかについて、ハードル・レートを20%に設定して、オプションの値を求め、それにたいし、最適なハードル・レートを使用したときのオプションの値との比を、横軸に割引率（ρ）がとって図示すると第１図のような結果が得られる。（系列１、２、３はともにボラテイリテイ（σ）が30%で、成長率（α）がそれぞれ－３%、０、＋３%のときのものである。系列４と５は成長率（α）が零で、ボラテイリテイ（σ）がそれぞれ20%と40%のときのものである。）これから、割引率が15%以下であれば、オプションの値はさほど変わらないことがわかる。ボラテイリテイが低下するとこの差はやや大きくなる。これは、ボラテイリテイが大きいときには、投資を実行するのが望ましいように見える状況が生じても、その後状況が悪化する可能性が高いので、十分にキャッシュフローの水準が高くなったときに投資を実行するのが最適であるのにたいし、ボラテイリテイが小さいときには、投資を実行するのが望ましい状況が生まれるとその後状況が悪化する可能性が低いので、キャッシュフローがある程度の水準達したときにはすばやく実行することが望ましいためである。

第１図　オプション価値の比（1）



ボラテイリテイの変化の方がオプション価値を大きく変化させるので、キャッシュフローの成長率を零として、ボラテイリテイが10%から50%まで10%ずつ変化したときにオプション価値の比がどのように変化するかを示したのが第２図である。（系列１，２，３，４，５はそれぞれボラテイリテイ（σ）が10%、20%、30%、40%、50%のときに対応する。）下に大きく垂れ下がった形をしているのが、ボラテイリテイが10%のときのもので、その次のものは、ボラテイリテイが20%のときのもので、第１図のグラフに示したものと同一のものである。ボラテイリテイが小さいときには、ハードル·レートを正しく認識しないと大きな損失が発生することになる。割引率がハードル・レートに等しいときには、ハードル・レートに達すると同時に投資を実行すると、正味現在価値は零で、オプション価値も零になるので、オプション価値の比も零になる。

第２図　オプション価値の比（2）



McDonald は利益性指数と回収期間について、同様な分析を行い、内部収益率のハードル・レートが割引率の大きな部分でうまく働かないのにたいし、利益性指数についてのハードル・レートは

割引率の大きな部分で比較的うまく働くので、内部収益率のハードル・レートと利益性指数のハードル・レートの２つを考えて、この２つのハードルを越えたときに投資を実行するというルールを提案しているが、ここでは、これについては省略する。コーポレート・ファイナンスのテキストが述べている利益性指数のハードル・レートは１であるが、最適なハードル・レートは（1.10）から明らかなようになな $b_1/(b_1-1)$ で、これは１より大である。

２．投資コストの変動[3)]

投資のタイミング・オプションについての考慮すると、コーポレート・ファイナンスのテキストが示すように正味現在価値が正である、あるいは、内部収益率がプロジェクトの要求収益率を越えているというだけでは、投資を実行するのが適当ではないということになり、正味現在価値あるいは内部収益率がファイナンスのテキストで述べている水準よりは高いある水準に達するまで待つことが必要となる。したがって、投資のタイミング・オプションを考慮することは、投資の実行を遅らせることになる。しかし、投資の実行を遅らせることは、競争上の不利益を発生させるかもしれない。この問題を分析するためには、他企業の行動を考えたモデルを使用するのが適切であると考えられるが、ここでは、それらの影響を外生的に与えられたものとして取り扱うことにする。企業が投資計画を立てる場合、このような取り扱い方が通常のやり方であろう。企業間の競争の結果はプロジェクトから生まれる将来のキャッシュフローが減少していく、あるいは、キャッシュフローの変動が増大することが予想される。これらは、αの値を減少させたり、σを増加させることになる。αの減少はハードル・レートを低下させるが、σの増加はハードル・レートを上昇させることになる。競争のもう一つの効果として投資コストの増加が考えられる。ここでは簡単に投資コストが一定率で増加していく場合を考えてみる。時刻 t での投資コストを $I(t)$とすると、投資コストは次の形で増加するものと仮定する。

$$I(t)=I_0\,e^{st} \tag{2.1}$$

上の式の s は投資コストの上昇率で正の一定値であるとする。プロジェクトを実行したときのキャッシュフローの動きは、前節の場合と同じで、（1.1）で表わされるものとする。まず、最適な投資実行ルールを求めてみる。キャッシュフローの変動が前節と同じであるから、キャッシュフローの現在価値は（1.4）となる。オプションの価値は、V ともに t にも依存するので、これを $W(V, t)$で表わすことにすると、式（1.7）に対応する式は、

$$1/2\cdot\sigma^2V^2W_{VV}+(\alpha-(\rho-r))VW_V+W_t-rW=0 \tag{2.2}$$

となる。$W=BV^be^{-gt}$ と仮定して、これを上の式に代入すると

$$\{1/2\cdot\sigma^2b(b-1)+(\alpha-(\rho-r))b-g-r\}BV^be^{-gt}=0$$

となる。したがって、

$$g=F(b)=1/2\cdot\sigma^2b(b-1)+(\alpha-\lambda)b-r \tag{2.3}$$

とならなければならない。関数 F は（1.8）の２次方程式である。他方、キャッシュフローの現在価値の水準が V^*に達したときに投資を実行するものとすると、価値同等条件（value matching condition）と滑らかな張り合わせ条件（smooth pasting condition）から

$$W(V^*,t)=V^*-I_0e^{st} \tag{2.4}$$

$$W_V(V^*,t)=1 \tag{2.5}$$

が成立しなければならない。（2.4）は投資を実行する時点でのオプション価値がその時点での投資の正味現在価値であることを示すものであり、（2.5）は投資の実行時点が最適であることを保証するものである。（2.4）と（2.5）に $W=BV^be^{-gt}$ を代入し、２番目の式の両辺に V^*を掛けてやると

$$BV^{*b}e^{-gt}=V^*-I_0e^{st} \tag{2.6}$$

$$bBV^{*b}e^{-gt}=V^* \tag{2.7}$$

となり、これから、

$$(b-1)BV^{*b}e^{-gt}=I_0e^{st}$$

となり、さらに、上の式の左辺に（2.6）を代入して整理すれば

$$V^*=b/(b-1)\cdot I_0e^{st} \tag{2.8}$$

となる。この式は（1.10）と良く似ているが、以下でみるように、ここでの b は（1.10）の b_1とは異なる。

$$V_0^*=b/(b-1)\cdot I_0$$

とし、（2.7）から B を求め、これに $V^*=V_0^*e^{st}$ を代入すると

$$B=(V^*)^{1-b}e^{gt}/b=(V_0^*)^{1-b}e^{(g-(b-1)s)t}/b \qquad (2.9)$$

となる。B は t に依存しない定数であるから

$$g=(b-1)s \qquad (2.10)$$

とならなければならない。g は（2.3）と（2.10）を満たさなければならないが、（2.3）の右辺は b の２次式であり、（2.10）の右辺は b の１次式であるから、それらのグラフから（2.3）と（2.10）をあわせた式

$$1/2\,\sigma^2 b(b-1)+(\alpha-(\rho-r)-s)b-(r-s)=0 \qquad (2.11)$$

の２根のうちの１根は１より大で、もう一つの根は１より小であることがわかる。b が１より小であると g は負になり、$t\to\infty$のときに $W(V, t)$が発散するので、１より大きな根が求める b である。

$$b=1/2-(r-(\rho-\alpha)-s)/\sigma^2+\sqrt{(r-(\rho-\alpha)-s)/\sigma^2-1/2)^2+4(r-s)/\sigma^2}$$

次にキャッシュフローの現在価値がある水準に達したときに投資を実行するという政策を考えてみる。投資コストが一定の率 s で増加していることと、最適投資水準が（2.8）であることから、投資を実行する水準として、時刻 t でのキャッシュフローの現在価値が $V_A e^{st}$ に達したときに投資を実行するという形を考える。この場合には、境界条件は

$$W(V_A e^{st}, t)=V_A e^{st}-I_0 e^{st}$$

となるから、$W(V,t)=BV^b e^{-gt}$ という形を仮定すると、

$$B=(V_A-I_0)(V_A)^{-b}e^{(g-(b-1)s)t}$$

となる。B が t に依存しない定数であるためには、(2.10)が成立しなければならない。B を代入した

$$W(V,t)=(V_A-I_0)(V_A)^{-b}V^b e^{-gt}$$

を最大にする V_A を V_H とすると

$$V_H=b/(b-1)\cdot I_0$$

となり、上で求めた結果と一致する。I_0の係数の $b/(b-1)$は、b が前節の b_1より大であるから、前

節の（1.10）での I の係数 $b_1/(b_1-1)$よりは小さくなり、I_0e^{st} が I に等しければ、前節の結果に比較して投資は早まることになるが、時間とともに、投資を実行するために必要な期待キャッシュフローの現在価値の水準は増加するので、早期に投資が実行されないときには、投資は前節の場合よりさらに遅れることになる。

　時刻 t でキャッシュフローの水準が C であると、将来の期待キャッシュフローの現在価値 $V(t)$ は $C/(\rho-\alpha)$となり、このときの内部収益率は

$$C/(R-\alpha)=I_0\, e^{st}$$

から

$$R=\alpha+C/(I_0\, e^{st})=\alpha+(\rho-\alpha)V(t)/(I_0\, e^{st})$$

となる。したがって、$V(t)$が V_Ae^{st} に達したときに投資を実行するということは、内部収益率がハードル･レート

$$\gamma_A=\alpha+(\rho-\alpha)V_A/I_0$$

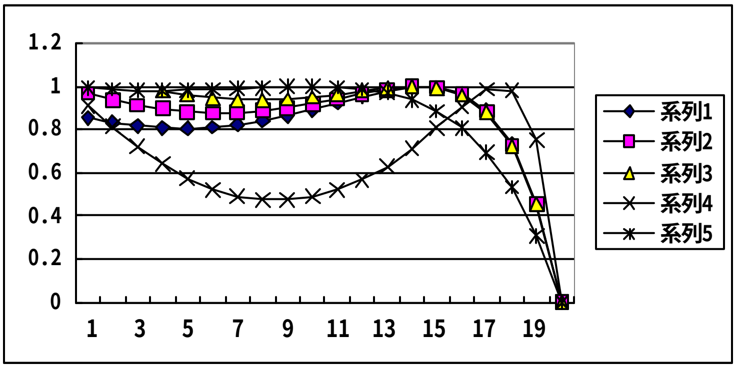
を越えたときに投資を実行するということになる。そして、最適な投資実行時点は、内部収益率が最適ハードル・レート

$$\gamma_H=\alpha+(\rho-\alpha)b/(b-1)$$

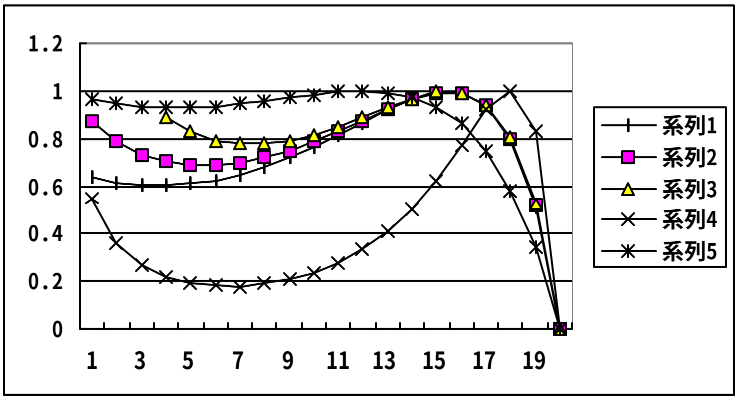
を越えた時点ということになる。これらの式は先の（1.12)、（1.13）とほとんど同一の形である。

（1.8）と（2.11）を比較すると、（1.8）の r を $r-s$ で置き換えれば（2.11）が得られることがわかる。投資コストが一定率で増加していくので、投資コストをニューメレールとすると、この世界の物価水準は一定率 s で低下することになり、実質金利は $r-s$ となる。したがって、（1.8）で名目金利の代わりに実質金利を使用すれば（2.11）になる。s が４％であるときについて、第１図に対応するグラフを作成すると第３図のようになる。全般的にハードル･レートを適切に設定しないことによる損失は先の場合より大きくなっているが、特に、ボラテイリテイが0.2のときには、そのことが顕著になる。さらに、s が８％であるときについて、グラフを示すと第４図のようになり、この傾向はさらに顕著になる。

第３図　オプション価値の比（3）(s＝４%)



第４図　オプション価値の比（4）(s＝８%)



おわりに

ここでは、投資のタイミング･オプションを考慮すると、キャッシュフローの現在価値が投資コストを上回るときに投資を実行するというルールは必ずしも最適な政策ではないことを明らかにし、投資実行のためのハードル･レートはかなり高めに設定することが必要であるが、ハードル･レートが最適値に設定されなくても、それほど大きな損失が発生しない場合もあることを明らかにした。しかし、こうしたことは、投資コストが次第に増加していくようなときには、かなり怪しくなるので、やはり、タイミング･オプションを正しく認識することが大切であろう。ここでは、投資は一度実行すると永久に存続するものと仮定して分析したが、状況が悪くなったときには、設備を売却して撤退する可能性を考慮すれば、最適投資実行時点は当然変化する。ただ、この場合は、最適投資実行時点について解析的な結果が得られず、数値的に計算することが必要になる。このため、こ

こでは、これについての分析を行わなかった。

注

1）投資タイミング・オプションについてはDixit & Pindyck（1994）およびTrigeorgis（1996）参照。

2）ハードル・トレールとリアル・オプションの関係についてはMcDonald（2000）参照。

3）投資コストが変動する場合のリアル・オプションについてはDixit & Pindyck（2000）参照。かれらは設備能力の拡張と縮小の問題を分析しているが、ここでは、投資タイミングの問題だけを取り上げることとした。

文　献

Dixit, A. and R. S. Pindyck. (1994). *Investment Under Uncertainty.* Princeton, Princeton University Press.

Dixit, A. and R. S. Pindyck. (2000). Expandability, Reversibility and Optimal Capacity Choice. In M. Brennan and L. Trigeorgis (eds.), *Project Flexibility, Agency, and Competition*. Oxford University Press.

McDonald, R. (2000). Real Options and Rules of Thumb in Capital Budgeting. In M. Brennan and L. Trigeotgis (eds.), *Project Flexibility, Agency, and Competition*. Oxford University Press.

Trigeorgis, L. (1996).*Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation.* MIT Press.

（2000年１月13日受理）