

# ラグランジュ分解・調整法による生産スケジューリング： 近年の研究の流れと将来の展望に関する考察

今 泉 淳

- 1 目的
- 2 ラグランジュ緩和とラグランジュ分解・調整法
- 3 生産スケジューリング問題に対する解法
- 4 技術的側面について
- 5 適用における留意点
- 6 将来的展望
- 7 おわりに

## 1 目的

生産スケジューリング問題は、組合せ最適化問題の中でも非常に難しい問題に分類される。一部特殊な構造を持つ問題に対して効率的な解法が存在するものの、それ以外の多くの問題に対して最適解を求める場合は、汎用的な最適解法である分枝限定法に頼らざるを得ない。しかし、分枝限定法は、問題の規模が小さい場合や問題の構造をうまく利用して解法を構築できた場合でない限り実用的とはいえない。その代替的方法である近似解法としては、問題依存の方法(代表例は、ジョブショップスケジューリング問題に対するシフティング・ボトルネック法<sup>[1]</sup>)と問題に依存しない枠組の二種類があり、後者は模擬的焼きなまし法や禁断探索法、遺伝的アルゴリズムなどメタ解法(メタヒューリスティクス)がある。メタ解法に属するこれら枠組は、ベンチマーク問題を対象の中心とする精力的な数値実験による解法の提案や改良、より実務的な問題に対する応用例などが多数ある。

一方ここ数年、生産スケジューリング分野において「ラグランジュ分解・調整法」によるヒューリスティック解法に対する研究が盛んである。ラグランジュ分解・調整法が上記のメタ解法に属するかどうかの議論はさておき、本枠組がある種の構造を有する組合せ最適化問題に対して非常に良い解を提供することが経験的に知られており、殊に生産スケジューリング問題に対して近年数多くの適用例が報告されている。

本稿では、ラグランジュ分解・調整法の概要を説明し、生産スケジューリング問題に対するこの枠組に基づく各種の適用例やその分類をし、技術的な側面、将来の展望などに関して考察する。

## 2 ラグランジュ緩和とラグランジュ分解・調整法

ラグランジュ緩和は緩和法の一つであり、数理計画問題の制約の一部を目的関数に組み込んで緩和問題を生成する。ラグランジュ緩和法の詳細は数理計画の参考書に譲るとして、一般にラグランジュ緩和問題は元の問題の下界を与える。ここで下界値の「精度」が興味の対象になるが、精度に影響を与えるのは、

- ・緩和する制約の選び方
- ・ラグランジュ乗数 $\lambda$ の値の選び方

の2点であり、前者はラグランジュ緩和問題を最適化する際の手間にも影響を与える。後者は、元の問題に対して最大の下界を与えるような $\lambda$ を見つけることに帰着し、ラグランジュ双対問題を解けば良い。

ラグランジュ分解・調整法は、このラグランジュ緩和問題から下界値を得るのみならず、緩和問題の最適解の情報を「参照」して実行可能解を生成する。その意味で、より緩和問題の利用度が高い点がその特徴である。以下にラグランジュ分解・調整法の基本形の概要を示す。

手順1 ラグランジュ乗数を初期化する

手順2 ラグランジュ緩和問題を最適に解く

手順3 ラグランジュ緩和問題の最適解の情報を参照して、実行可能解を得る

手順4 終了条件を満たしてれば終了。さもなければ、ラグランジュ乗数を更新して手順2に戻る  
上記の手順中には、

- ・手順2でラグランジュ緩和問題を最適に解く必要がある。このために、予め元の問題の定式化や緩和を工夫することで、緩和問題をより解き易い子問題へ分解可能なようしておく必要がある
- ・手順3における「参照」の程度やそのやり方は、元の問題によって異なる
- ・手順4の終了条件は計算時間や反復回数、双対ギャップの値などが代表的であり、乗数の更新は劣勾配法を用いることが多い

など、いくつかの論点がある。

これらの中で、第一項目がラグランジュ分解・調整法では非常に重要であり、多くのスケジューリング問題ではこの分解可能性を利用して緩和問題を分解して、個々の子問題単位での最適化を行って高速に下界値を計算する。逆に言えば、このような分解可能性を達成するような定式化によって、分解を可能にすることが必須である。

第二項目は、元の問題の性質によってどのような緩和問題になるかが決まり、それによって得られた緩和問題の解がどのような情報を提供するか、実行可能解を生成する際にそれらをどのように

使うか、などが課題となる。

これら課題については、後でもう少し詳しく考察する。

### 3 生産スケジューリング問題に対する解法

生産スケジューリング問題に対して、ラグランジュ分解・調整法の適用を提唱したのは、コネチカット大学のLuhらの研究グループが最初である。本節では、Luhらの研究に端を発する生産スケジューリングに対する様々な適用を、モデル別に概観する。

#### 3.1 Luhらの基本的な考え方

以下にその概要<sup>[18]</sup>を示す。

##### 3.1.1 対象とする問題と定式化

$M$  台の同一並列機械と  $J$  個のジョブからなるスケジューリング問題を考える。時間は離散化されており、時刻1から時刻  $T$  までの計画期間  $T$  のスケジュールを考える。 $M$  台の機械は同一であり、 $J$  個の各ジョブはどの機械でも所与の加工時間  $p_j$  ( $j=1, \dots, J$ 、 $p_j$  は整数) で加工でき、加工の中断は許されない。各ジョブには納期  $d_j$  ( $j=1, \dots, J$ ) が与えられており、これらジョブの開始時刻  $b_j$  ( $j=1, \dots, J$ ) を決めた際の終了時刻  $c_j = b_j + p_j - 1$  によって定まる納期遅れ量  $T_j = \max\{c_j - d_j, 0\}$  の総和、すなわち  $F = \sum_{j=1}^J T_j$  を最小化することを考える。

ある時刻  $t$  において加工できるジョブ数が機械台数の  $M$  以下であること表すために、時刻  $t$  においてジョブ  $j$  が加工中である場合に1、さもなければ0であるような0-1変数  $\delta_{jt}$  を導入すると、元の問題は

$$\min \quad F = \sum_{j=1}^J T_j \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad b_j + p_j - 1 = c_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^J \delta_{jt} \leq M, \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$T_j = \max\{c_j - d_j, 0\} \quad j = 1, \dots, J \quad (4)$$

と定式化できる。ここで現れる変数は、開始時刻  $b_j$ 、終了時刻  $c_j$  (いずれも計画期間  $T$  内におさまっていなければならない)、納期遅れ量  $T_j$ 、各ジョブが加工中であるかどうかを示す  $\delta_{jt}$  であるが、各ジョブの開始時刻である  $b_j$  を決めればそれ以外の変数の値は自動的に定まることに留意し

よう。また、同一並列機械問題であるため、機械の台数とジョブの数にのみ着目している限り、「どの機械で加工するか」を表す変数は不要である。

この定式化は、 $b_j$ 、 $c_j$  と  $\delta_{jt}$  を結びつける制約式を含んでいないので、そのまま数理計画のパッケージで解くことはできない。しかし、ラグランジュ分解・調整法においては、後述するようにこのことは障害にはならない。

### 3. 1. 2 ラグランジュ緩和

元の問題の制約のうち、「ある時刻  $t$  において加工できるジョブ数は  $M$  以下である」という条件（一般に「機械能力制約」等と呼ばれる）に該当する制約を、非負の実数  $\lambda_t$  を導入して以下のようにラグランジュ緩和すると、緩和問題は、

$$\min \quad F = \sum_{j=1}^J T_j + \sum_{t=1}^T \lambda_t \left( \sum_{j=1}^J \delta_{jt} - M \right) \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad b_j + p_j - 1 = c_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (6)$$

$$T_j = \max \{c_j - d_j, 0\}, \quad j = 1, \dots, J \quad (7)$$

となる。ここで目的関数は、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J T_j + \sum_{t=1}^T \lambda_t \left( \sum_{j=1}^J \delta_{jt} - M \right) \\ &= \sum_{j=1}^J T_j + \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T \lambda_t \delta_{jt} - \sum_{t=1}^T \lambda_t M \\ &= \sum_{j=1}^J \left( T_j + \sum_{t=1}^T \lambda_t \delta_{jt} \right) - \sum_{t=1}^T \lambda_t M \end{aligned} \quad (8)$$

と変形できる。(8)式の第1項目は  $j$  (すなわちジョブ) に関しての和であり、 $\lambda_t$  が定数なので第2項目は定数である。一方、緩和問題の制約式は全てが  $j$  (すなわちジョブ) 毎になっているので、緩和問題は各ジョブ毎に分解可能である。すなわち、ジョブ毎に以下のような子問題、

$$\min \quad T_j + \sum_{t=1}^T \lambda_t \delta_{jt} \quad (9)$$

$$\text{s.t.} \quad b_j + p_j - 1 = c_j \quad (10)$$

$$T_j = \max \{c_j - d_j, 0\} \quad (11)$$

に分解できる。この子問題は、ジョブ(ここでは作業)単位に最適な開始日を決めるスケジューリング問題である。これら子問題は機械能力制約を緩和して生成された緩和問題の一部であり、他のジョブ(他の問題)による機械の使用を「乗数の値」によって表現している。つまり、本来は機械台

数を超えるジョブ数が機械を使用することは許されないが、使用する機械(と時刻)に対応する乗数の値だけのペナルティを支払う(目的関数に加える)ことで、緩和問題全体としては機械台数より多くのジョブを加工することを許している。なお、このペナルティについて、米田<sup>[37]</sup>は経済学的な観点から「機械の使用料」と解釈している。

それぞれの子問題は、そのジョブの開始時刻に応じて、機械を使用する時刻に対応する乗数の値の総和と納期遅れに対するペナルティの和を計算し、それが最も小さくなるような開始時刻を求めれば良いので、前述のような数理計画パッケージで解けないような定式化であることは障害にならない。特にこの場合の子問題は $O(T)$ で解けるため、非常に高速に下界値を求めることができる。

### 3. 1. 3 上界値計算と乗数の更新

一般に緩和問題は下界値を提供することが唯一かつ最大の役割であるが、本アプローチでは緩和問題を解いた結果の情報を活用し、上界値の計算、すなわち実行可能スケジュールの生成をする。

実行可能スケジュールの生成法には特別の決まりはないが、Luh et al.<sup>[18]</sup>は、緩和問題の最適解から各作業別の優先順位を決め、「リストスケジューリング」と呼ぶ一種のディスパッチングルールによって実行可能スケジュールを求めており、その後の研究は概ねこれを踏襲している。

上界値が得られれば、現在求まっている最良の下界値と最良の上界値から双対ギャップを求められるので、双対ギャップの値を終了条件に用いたり、一定回数の反復を終了条件にすることが考えられる。終了条件に達していない場合は、乗数 $\lambda_i$ の更新をする。

## 3. 2 基本モデルからの派生

ラグランジュ分解・調整法の基本は前節で述べた通りだが、派生モデルやそれに付随した技術的側面に関する議論が多数ある。本節では、モデルを分類する視点から説明する。それらモデルを解く上での技術的側面は次節で扱う。

### 3. 2. 1 並列機械問題

既に説明したように、Luh et al.<sup>[18]</sup>はラグランジュ分解・調整法をまず並列機械問題に適用し、以後のこの分野の基本形となっている。その後、Hoitomt et al.<sup>[9]</sup>がジョブ間に先行関係制約のあるような場合に対して拡張し、Luh and Hoitomt<sup>[17]</sup>はさらに複数作業の場合へ拡張し、ジョブショップへの拡張<sup>[17][10]</sup>につながっている。

### 3. 2. 2 ジョブショップスケジューリング問題

ジョブショップスケジューリング問題は、各ジョブ内の作業間に先行関係制約があるため、作業単位の子問題へは直接分解できない。この問題を解決するにあたり二つのアプローチがあるが、本節ではモデルの概要のみを記す。

Luh and Hoitomt<sup>[17]</sup>、Hoitomt et al.<sup>[10]</sup>は、ジョブショップに対して初めて本手法の適用を試みた。彼らが対象としたのは、組合せ最適化問題における総所要時間最小化問題として良く知られる典型的なジョブショップスケジューリング問題<sup>[4]</sup>ではないがジョブショップであることに変わりはない。以後このタイプの問題を基本に、複数作業からなるジョブを処理するショップに対する解法が提案されている。一方、緩和する制約の選び方を変えたアプローチを Chen et al.<sup>[5]</sup>が試みている。

その他、Della Croce et al.<sup>[8]</sup>、Tomastik et al.<sup>[22]</sup>、Jinyan et al.<sup>[11]</sup>は FMS を想定したモデルを対象にし、Luh et al.<sup>[16]</sup>はジョブ群依存の段取りや有限バッファなどを考慮している。

### 3. 2. 3 フローショップスケジューリング問題

フローショップに対しては、ジョブショップよりも後に、Liu and Luh<sup>[13]</sup>が順列フローショップに対するラグランジュ分解・調整法の適用を試みた。これは、順列フローショップではジョブの追い抜きが許されない他、フローショップであるため全ジョブの機械の訪問順序が同一であるなどの性質を利用して、Pinedo<sup>[21]</sup>の定式化に類似した0-1計画問題として定式化している。このため「機械能力を緩和する」という基本形と若干違いがあるが、作業単位の子問題に分解するという点では共通する。

一方、村上ら<sup>[28]</sup>や今泉と森戸<sup>[32][30]</sup>の考えるフローショップは、2工程だが上下工程の重複生産やジョブの分岐があるという特徴を持っている。また、西ら<sup>[39]</sup>は装置毎に段取りがあるようなフローショップを念頭に機械別分解によるアプローチを試み(後述)、それを承けて西ら<sup>[40]</sup>が資源制約と段取りコストを考慮した。

### 3. 2. 4 その他

部品の供給速度制約 米田ら<sup>[34]</sup>と Zhang et al.<sup>[25]</sup>は、部品の供給速度に制限がある問題を扱っている。定式化では、この制限を「ある特定のジョブ種が定められた期間内には上限を超えて生産できないという制約」(スループット制約)という形で表現している。

ロットストリーミング ロット分割を許すロットストリーミングやトランスファロットに対しては Liu and Luh<sup>[12]</sup>があるが、これは後続する工程のトランスファロットの開始時刻の求め方

が若干異なる程度で、構造的には大きな影響を与えるものではない。一方、今泉と森戸<sup>[32][30]</sup>が重複生産を扱うことは既に述べたが、ジョブの分岐を伴うために後続する作業群同士で開始時刻に依存関係がある部分が異なる。

**階層構造を持つスケジューリング** 製品オーダを扱う上位階層(マクロレベル)と企業内の製造計画である下位階層(詳細レベル)からなる階層的な製造の管理に対するラグランジュ分解・調整法の適用を成松<sup>[33]</sup>が提案している。

**不確定な要素** ラグランジュ分解・調整法は一般に確定的スケジューリング問題に対する方法論であるが、不確定要素を持つ問題に対して適用を試みたのが、Luh et al.<sup>[14][15]</sup>である。彼らの拡張は、目的関数における各ジョブに対する重み、納期、部品の到着、加工時間が確率的である点にある。

**動的スケジューリング問題に対する適用** 多くの研究は、静的問題すなわちスケジュール作成時にデータが既知かつ変更されることがない問題を対象にしているが、ジョブが到着したり作業時間の変更が伴ったりする動的問題に対してラグランジュ分解・調整法を適用しようとする考えがある<sup>[31][29]</sup>。すなわち、動的問題を静的問題の連鎖とみなして、ある時点における問題を「疑似静的問題」として近似最適化し、予定されていない変化が生じるたびに疑似静的問題を定義し最適化をし直すというものである。この方法は、ある疑似静的問題を解いた際のラグランジュ乗数を次の疑似静的問題の最適化に利用するという技術的な側面と、座席予約型生産スケジューリングへの応用という実務的側面の両者を骨子としている。

## 4 技術的側面について

ラグランジュ分解・調整法における技術的側面に関する話題としては、i)緩和の考え方とその最適化、ii)計算の高速化、iii)実行可能解の生成法、などがある。i)とii)は密接な関係があり、以下ではモデルの派生による技術的側面への影響ならびに内容を概観する。iii)は、次説で触れる。

### 4.1 緩和の考え方とその最適化

緩和する制約条件の選び方によって、緩和問題の分解単位が異なる。緩和問題がどこまで分解可能かは当然子問題の最適化の手に影響を与えるが、一方で緩和の度が高すぎると下界値の精度などにも影響を与える。緩和問題の最適化は可能な限り高速に行えることが望ましいが、元の問題

の性質などによってそれが可能か否かが異なる。特に、単一工程ではないジョブの場合、何に関して緩和するかに関する選択肢がある。

#### 4. 1. 1 作業間の先行関係制約をラグランジュ緩和する

Luh and Hoitomt<sup>[17]</sup>、Hoitomt et al.<sup>[10]</sup>は、子問題が作業単位に分解可能なように作業間の先行関係制約をラグランジュ緩和している。その際の子問題は、機械の重複利用に対応する機械使用料と、ジョブ内の作業の重なり(ある作業の開始日が、先行する作業の終了日よりも前になる部分)に対するペナルティの和を最小にするような問題となる。

このように分解すれば、3. 1節で述べた並列機械問題に対する枠組を流用することが基本的に可能である。実行可能スケジュール生成の際に若干の工夫を要するが、Luh らが一連の研究で「リストスケジューリング」を用いることで良好な精度のスケジュールを得ていることを考えると、技術的にみてさほど大きな障害でないともみなせる。ただし、緩和の度合いが大きいと、

- ・元の問題と緩和問題の解離が大きい
- ・ラグランジュ乗数が多くなるために、その更新の手間がかかる

といった問題を誘発する。前者は、直接的には下界値の精度に影響を与える他、実行可能スケジュールを生成する際に緩和問題の解をどのような形で利用するかとも関係する。Luh and Hoitomt<sup>[17]</sup>、Hoitomt et al.<sup>[10]</sup>は、緩和問題の解を優先順位に置き換えているおり、そのことが特に大きな障害にはなっていないが、問題によってはこのような上界値の計算方法が採れない場合もある(後述)。

#### 4. 1. 2 作業間の先行関係制約を緩和せずジョブ単位の子問題を解く

作業間の先行制約を緩和しない場合、ジョブ単位までしか分解できない。ジョブ単位の子問題は組合せ最適化問題となるので解く際に手間がかかるが、一方乗数の数が少なく元の問題との遊離が小さいため、下界値の精度に優れるとともに子問題(緩和問題)の解の利用価値が高まると考えられる。このような緩和によって Chen et al.<sup>[5]</sup>は子問題を動的計画法(DP)で最適化するアプローチを採っており、以降の研究では一つの基本形となっている。また、子問題に確率変数が含まれていても動的計画法を解く上では障害にならないため、これを利用した不確定要素を含むスケジューリングを Luh et al.<sup>[14][15]</sup>が提案している。

#### 4. 1. 3 機械毎に分解し一機械問題を解く

Jinyan et al.<sup>[11]</sup>は、FMS タイプのジョブショップを扱っているが、従来の Luh らのやり方が作業

単位まで分解することを前提にし機械能力と先行関係制約を緩和していたものを、先行関係制約のみを緩和して機械毎の子問題に分解するアプローチを採っている。本問題は FMS タイプであるため各作業の候補機械が複数あることを考慮する必要があることから、Hoitomt et al.<sup>[10]</sup>に比べてその分だけ多くの変数を必要とする。よって、子問題はとりあえず代替機械全部で行うように変数の値を仮に決め、その後に各作業の経路を選択する、という二段階のアプローチを採っている。

その他 Della Croce et al.<sup>[8]</sup>、西ら<sup>[39]</sup>も機械毎(あるいは装置毎)分解を検討している。機械分解は、子問題の最適化の手間やラグランジュ乗数の振動の問題、収束までの時間に関して工夫の余地があるが、このことは後の節で触れる。

#### 4. 1. 4 特定工程の機械で加工されるジョブ群での分解

今泉と森戸<sup>[32][30]</sup>は2工程のハイブリッドフローショップを対象にしているが、ジョブが下流工程に行くとき岐する特徴を有し、同時に隣接した工程の時間的な重複生産を許す。このような問題では、作業単位の分解でもジョブ単位の分解でも良い結果を生まない。これは、ジョブ内の各作業(殊に第2工程で加工される作業)の開始時刻間に組合せ的な要素があり、第1工程の作業の開始時刻の決定が大切であるためとしている。そこで、元の問題に対して緩和問題は第2工程の能力のみを緩和するアプローチを採り、緩和問題を解いたならば第1工程のスケジュールはそのまま実行可能スケジュールの生成(上界値の計算)に使えるようにしている。

このアプローチでは、子問題が組合せ最適化問題としてもやや厄介な性質を持ついるため動的計画法による最適化が行えず、子問題を分枝限定法で解いている。

#### 4. 2 計算の高速化:乗数の値の振動や計算初期の不安定対策

ラグランジュ分解・調整法においてしばしば問題になる現象に、乗数の値の振動が挙げられる。ラグランジュ乗数は一種の価格(機械の使用料)と解釈できることは既に述べた。ある反復において、価格の高い物(ある時刻の機械)には消費者(ジョブ、作業)が手を出す(その機械を使用する)のを差し控え、そうすると価格が下がる。価格が下がると、市場は再び一気にそれに殺到する。すなわち、反復毎にこれが繰り返され、解あるいは乗数が振動してしまい、収束しなくなってしまう。

##### 4. 2. 1 緩和における工夫

ラグランジュ分解・調整法の初期の研究である Hoitomt et al.<sup>[10]</sup>は、問題を作業単位まで分解するために、機械能力制約と作業の先行関係制約をラグランジュ緩和するアプローチを示したが、分解した問題において、開始時刻を表す変数にかかっている係数の符号に解が大きく依存することを

指摘し、開始時刻が早くなったり遅くなったりする解の振動 (*solution oscillation*) がラグランジュ乗数の振動を引き起こし乗数の収束を著しく困難にしていると述べている。これに対する Hoitomt et al.<sup>[10]</sup>の対策は、後述する納期ずれの2乗のみならず、拡張ラグランジュ緩和法によって制約違反に対し2次のペナルティ項を用意するというものである。このアプローチは、緩和問題が厳密には作業単位へ分解できなくなるという不利を伴い、分解可能性を保つためには若干の工夫を必要とする。拡張ラグランジュ緩和法は、先行関係制約のみを緩和する Della Croce et al.<sup>[8]</sup>も採用している。

また、村松<sup>[36]</sup>は、スケジューリング問題に段取りコストが関連するだけで問題が凸でなくなり、ラグランジュ分解・調整法の「調整」がうまく働かなくなり解の振動を引き起こすという指摘をしている。その対策として拡張ラグランジュ緩和法を用いると分離可能性を破壊されてしまうので、非凸な問題に対して解の収束を導き、かつ問題の分離可能性を保持する拡張ラグランジュ緩和・調整法を提唱している。

#### 4. 2. 2 インスタンスの性質からの対策

このような「解く手段」における対策に対して、インスタンスの性質で対処する考え方もある。米田ら<sup>[34]</sup>は、乗数の値の「振動」と、乗数の初期値が0であることからジョブや作業が集団で上記のような行動を起こす「初期不安定」という問題として捉え、前者に対して「ジョブの個性化」、後者に対しては「ジョブの主体化」という方法で対処することを提唱している。米田ら<sup>[34]</sup>によれば、

- ・「ジョブの個性化」は、納期ずれ尺度に対する重みをジョブ毎に変える
- ・「ジョブの主体化」は、目的関数にジョブの時間的な意味での理想的な位置を組み込むときに無制約でも子問題の解が一意に定まるように時間範囲を定める

などを例として述べている。すなわち、ジョブ毎の納期の違いなどによって「この時間のこの機械を使うのが望ましい」という「理想状態」があればあるほど、各ジョブが振動したり不安定な状態になることが少なくなると言える。単なる総納期遅れではなく上述のような納期ずれを用いたり、ずれの2乗総和の最小化<sup>[10]</sup>なども、これに類する良い対策になると考えられる。

与えられた問題(インスタンス)を素直に解くという立場からは採れない方策ではあるものの、一つの性質として把握しておく価値はあろう。

#### 4. 2. 3 補助的な問題を考える

本来の元問題をラグランジュ緩和するのではなく、補助的な問題を考えることで振動対策を施す考え方がある。Hoitomt et al.<sup>[10]</sup>が採ったような作業単位までの分解や Jinyan et al.<sup>[11]</sup>のような先行

関係制約を緩和した機械単位への分解は、作業の開始時刻を表す変数にかかっている係数の符号の影響を受け振動を起しやす。よって、各作業が時間軸上どの位置にあれば好ましいかをなんらかの形で与えることで、この振動を強制的に抑えてしまうことが考えられる。

これを最初に試みたのは Czerwinski and Luh<sup>[7]</sup>であり、本来の問題は各ジョブの納期ずれの最小化であるが、各ジョブの納期から逆算した各作業の納期(operation due date)を設定し、このことで各作業の時間的な意味での理想を与えて子問題に相当する補助問題(auxiliary problem)を解く。このアプローチは、振動を抑制するという意味で一定の効果が期待できるが、その一方で i) 各作業の納期をどう設定するか、ii) 補助問題を最適に解いても元の問題の下界値を与えない、などの点に関して工夫する必要がある。

作業毎の納期の設定は、西ら<sup>[39]</sup>も行っているが、そのアプローチの特徴は、

- ・ 補助問題を考える
- ・ 補助問題をシミュレーティッドアニーリング法で解く
- ・ 下界値の算出に拘らない

とまとめられる。さらに、一般には簡便な方法を用いることの多い上界値の算出(実行可能解の生成)にも、シミュレーティッドアニーリング法を用いている。西らの狙いは、装置毎に段取りを必要とするような問題に対するラグランジュ分解・調整法の適用であり、その延長上に西ら<sup>[40]</sup>の研究がある。

#### 4. 2. 4 代理劣勾配法

双対問題の最適化、すなわちラグランジュ乗数の更新には劣勾配法を用いるのが一般的である。通常の劣勾配法は、全ての子問題を最適化してから乗数の更新を行うが、代理劣勾配法<sup>[26][27]</sup>は、各子問題を近似最適化することで代替する。「近似最適化」にはいくつかのバリエーションが考えられるが、その一つとして子問題を一つ解く毎に乗数を更新する、すなわち今最適に解いた問題以外の問題の解を「近似最適解」とみなす方法があり、これを *interleaved subgradient method* と呼ぶ。大規模問題においては、劣勾配法に対して代理劣勾配法のほうが計算が高速であるとされる<sup>[34]</sup>。

### 5 適用における留意点

ラグランジュ分解・調整法を適用する際のいくつかの留意点や問題点を列挙、考察する。

#### 5. 1 分解可能な定式化が必要である

既に述べたように、ラグランジュ分解・調整法の枠組では、元の問題の「分解可能性」が重要で

ある。制約の一部を緩和した結果、

- ・残りの制約条件を何らかの単位毎に分解できる
- ・目的関数が分解可能である

の両者が必要である。これらを達成するためには、定式化をある程度工夫することが要求される。特に目的関数は、個々のジョブや機械の属性値の「最大値」のようなものではなく、各ジョブや各機械に関する属性値の「和」の形をしていることが望ましい。既に説明した「総納期遅れ」「総納期ずれ」などがその一例であり、総滞留時間も当てはまる。

元々の問題がこのような加法的性質を満足しているかどうかは保証の限りではないので、もしラグランジュ分解・調整法を用いる場合には、問題の解決者がモデル化する際に加法的性質を満足するように問題を定義する必要がある。ショップ稼働率の関連の標準的尺度として従来から良く用いられていた総所要時間に対して、顧客それぞれの要望が多様化し、また顧客別に満足度を評価可能な納期関連尺度に対する要望が高まっている現状を踏まえれば、このような尺度が第二の標準的な目的関数となりつつあると言っても過言ではない。

ただ、これらはあくまでも形式的に分解可能かどうかを決めるだけであり、あくまでも「必要な条件」に過ぎない。すなわち、そのような定式化や分解ができたからといって、常に良い結果をもたらすか保証の限りでないことは言うまでもない。

## 5. 2 どのような分解を考えるか

基本的には「何を単位に分解するか」と換言でき、定式化と密接な関係がある。一般には、ジョブ毎か、ジョブを更に作業まで分解するか、また機械や装置毎に分解するのかなど、いくつかの選択肢がある。

「何を単位に分解するか」に対して定量的な分析や結論、すなわち「何に対して分解するのが一番良いか」に関する一般的な方向づけは今のところ無いが、ジョブショップスケジューリングにおいてはジョブ毎の分解が常識化しつつある。また、例えば装置産業では各装置や工場毎の切替えコストの存在や各装置毎の独立性などの問題から、機械や装置毎の分解に対する現実的な要請がある<sup>[39]</sup>。その一方で、理論モデルのジョブショップスケジューリング問題に対して、機械毎に分解を行った際の性能の定量的分析による検証はまだ試みられていない。ジョブ毎分解に対する機械毎分解の性能はやや悲観的にならざるを得ないが、現実的な要請を考慮するといずれにせよ定量的比較が必要であろう。

### 5. 3 子問題が最適かつある程度効率的に解ける必要がある

子問題に分解できたとしても、問題の特性や規模によっては最適化が容易でない場合がある。多くの研究ではこのことが顕在化した例はあまり多くなく、またジョブショップでは先行関係制約を緩和せずジョブ単位の子問題を動的計画法で解く<sup>[5]</sup>のが近年では定石となっている。子問題に対する適当な解法が存在したり動的計画法による定式化が可能であれば良いが、動的計画法の適用は必ずしも可能ではなく、分枝限定法などによる最適化が必要な場合がある(子問題の最適化としての効率は分枝限定法のほうが良いと期待される一方で、実装の手間は確実に増す)。

子問題の最適解を得るのに時間がかかる、あるいは最適解が得られない場合は、既に説明した代理劣勾配法を用いる方法が考えられる。すなわち、全子問題の最適化によって勾配方向を得るのではなく、ある特定の子問題だけを最適に解く、あるいは子問題全ての近似解を求めることで勾配方向を求め、それにより乗数の更新を行う方法である。ただし、その際に下界が得られるかどうかは、更新幅を求める際に一定の条件を満たすことが必須であり、実際の計算では別途全子問題を厳密に解いて下界値を算出する必要がある。

### 5. 4 実行可能化

一般に下界値の精度は、緩和の割合によって決まる比重が高いと考えられる。すなわち、緩和の割合が高いほど緩和問題の最適化に要する時間は短くなり下界値の精度は低くなる。逆に、緩和の割合が低いと最適化に要する時間が長くなるが、下界値の精度は高くなる。もちろん、緩和する制約の選び方によって定まる緩和問題の性質によって、得られる精度の上限はある程度定まってしまう面もあり、「悪い緩和」に対していくら時間をかけても良い精度は期待できない。

いずれにせよ、精度を犠牲にすることなく可能な限り計算時間が短いことが望ましいが、最適化問題を解く以上、ある程度の計算コストを要するのはやむを得ない。よって、この計算に要するコストを考慮すれば、単に下界値を算出することのみに用いるのではなくて、緩和問題の答を別の場面でも利用したいと考えるのが自然である。できれば、緩和問題の答をなるべく壊さずに、かつ計算コストをかけずにそのまま実行可能化ができればより好ましい。すなわち、緩和問題の答の特徴(開始時刻や使用する機械など、子問題が算出した解の内容)をできる限り変えずに、本来の制約条件を満たすよう実行可能解を生成することが望ましいと考えられる。

Luh らが扱った問題では、彼らが「リストスケジューリング」と呼ぶ、緩和問題の解に基づき作業の優先順序を決める方法によって解決していたが、ジョブショップスケジューリング問題では、最終的にはこのような簡便な手順でも概ね良好な実行可能解が得られており、ラグランジュ分解・調整法ではあまり問題視されないことが多い。しかし、問題によってはこのような優先順序では良

い解が得られないこともある<sup>[28]</sup>。

リストスケジューリングがどのような問題に対しても万能である保証が無いことから、メタ解法において近傍の定義を問題毎に考える必要があるのと同様に、ラグランジュ分解・調整法においても緩和問題の解の実行可能化の方法を問題毎に考えざるを得ない。

この部分については一定の枠組があるわけではなく、ラグランジュ分解・調整法の適用における問題点の一つになる可能性がある。もちろん、ある程度の手間をかければ良い上界値を得られる可能性は高くなるが、そもそも下界値計算に時間をかけておきながら、それを利用することなく上界値を計算するのにさらに時間をかけることはあまり得策とは言えない。緩和問題の解とは全く無関係にメタ解法で上界値を計算するようなアプローチもあるが、計算の手間や緩和問題の答から得られる情報の内容や質を考慮した上で採否を考えるべきであり、計算時間全体を下界値計算、上界値計算それぞれにどのように割り振るといふ問題に帰着すると考えられる。

## 6 将来的展望

ラグランジュ分解・調整法は、生産スケジューリングの分野ではここ10年程度で急速な発展を遂げ、その適用範囲の拡大とともに技術上の進展もしている。このような背景を踏まえて、本枠組の将来的展望を考察しよう。

### 6.1 製造業を取り巻く環境

顧客の要望の多様化は、スケジューリングの視点からは正しく顧客毎に異なる納期という形でとらえることができ、時代の趨勢にあったものといえる。その意味で、納期尺度の問題を扱える枠組の重要性は高く、従来の理論的な研究が総所要時間の最小化問題を対象としたことを考えると、今後ますますその重要性は増すと考えられる。本枠組では分離可能性が要求され、これが達成されない限りこの枠組の適用は難しいが、前述のように注文個々の納期が異なることが多くなりつつある現状を考えれば、その心配は杞憂であろう。

### 6.2 枠組の汎用性

ラグランジュ分解・調整法の枠組は、元々の問題の構造や定式化に依存して適用の可否が決まると言っても過言ではない。可否を決める一つの要因に目的関数の設定が挙げられ、伝統的な総所要時間最小化問題に対しては適用が難しい。しかし、総所要時間最小化問題に対しては既に多くの解法が存在していることを考えれば、このこと自体は本枠組の弱点とはならない。既に納期尺度をもつ多くの問題に対する適用例が報告されていることを勘案すれば、納期尺度あるいは分解可能な評

価尺度を有する問題に対する汎用性を有するとみなしても良い。

一方、本枠組を用いたスケジューリングソフトウェアあるいはパッケージの開発も興味を持たれる話題であるが、ソフトウェアの汎用性や対象の範囲などに関してやや限定的にならざるを得ないと考える。その理由は、本枠組は定式化(モデル化)と緩和に一種の工夫を必要とする側面を持っており、数理計画のパッケージでは「モデル化」「求解」という手順で済むのに対して、さらに「どの制約を緩和するか」という判断を伴う人為的作業を必要とするからである。緩和する制約の選び方は分解可能性と子問題の構造に影響を与え、これを機械的に行えるかは一つの課題であろう。また、実行可能化についても、多くの研究ではさほど深刻な議論をしておらずまたそれでも良い精度を得ているのは事実であるが、その一方でどのような問題であっても緩和問題の解から制約条件を満たす「比較的良い解」を得られるかどうかに関しては、未だ限られた問題に対して実験的に明らかにされたに過ぎず、さらに研究が必要である。

無論、既に十分な性能が確認されている問題に限定すれば実用的にも十分に良い解を提供できることになるが、ショップ形態に依存する場合にはパッケージとしての汎用性は大幅に損なわれる。

### 6. 3 他の解法との対比

最適解法の代表である分枝限定法の実装には、プログラミング言語やデータ構造に精通した人であってもそれなりの労力を要する。動的計画法の実装作業は分枝限定法ほどではないが、計算時間は一般に分枝限定法には劣る。いずれにせよ、これら解法を元の問題に対して適用することは、問題規模の増大に伴う計算時間の爆発的増加という側面を無視し得ない。

メタ解法は、多くの問題に対する数々の数値実験結果があり、十分にその性能が確認されている。ただし、これら「性能」は最適解が分かっている問題に関して最適解と比較をしたり下界値と比較をしたりすることで得られるものであり、元来精度そのものを計算するメカニズムをもっているわけではない。

一方、ラグランジュ分解・調整法では、数学的な意味ではラグランジュ緩和という理論的背景を持ち、上界値と下界値の両方を計算できるので、実際に使うスケジュールが「どの程度良いか」ということを吟味できることが従来のメタ解法と異なる。また、最適解法に対しては、計算時間の面で大幅に優位に立っている。

### 6. 4 分散環境に対するスケジューリング手法

生産設備が複数の装置からなっていたり、またそれら装置が分散している環境、あるいは複数の組織に跨るような計画立案を行う場合、各装置、各組織が自律的に意思決定を行い、それを調整す

るメカニズムが望ましいと考えられる。問題を数理モデルによって解決する視点からこれらを見ると、各装置や各組織の関係を考慮しつつ、それらを部分問題として扱いそれぞれの答を統合する際に調整する、という解釈が可能である。

このような分散環境におけるスケジューリング手法に対しては既にいくつかのアプローチがあるが、ラグランジュ分解・調整法は、まさに部分問題への分解とそれぞれの答を調整しながら統合するという枠組であり、組織の巨大化や問題の大規模化に対する一つの答といえよう。西ら<sup>[39][40]</sup>や成松<sup>[33]</sup>の試みは、このような考えの上に立脚しているアプローチとみなすことができる。

問題を分解した際に導入するラグランジュ乗数が調整のための指針となるわけであるが、問題の分解のやり方によってはラグランジュ乗数に頼って調整することが良い結果を生まない例もあることから、一概にこのようなアプローチを採用することを現時点では推奨するものではない。すなわち、スケジューリング問題に対するラグランジュ分解・調整法のプロトタイプはあくまでもジョブ単位でみた場合の競合の解決を目指しているのに対して、分散協調スケジューリングは基本的に資源単位での問題解決がその主目的であるため、現時点における技術にはまだ解決すべき事項が残されていると考える。その一方で、なんらかの妥協(例えば下界値の算出をあきらめる)をした上で本枠組を利用するという立場に立てば、現実的な問題解決における利用価値はあると考えられる。

## 7 おわりに

本稿では、ラグランジュ分解・調整法の研究に関する概観、技術上解決すべき各種課題、将来に関して考察してきた。製造業の置かれた環境の複雑化や大規模化は、計算機技術がいかに発展しようと、それを上回る速度で解決すべき問題を巨大化させてしまう。その意味で、小さい問題を解いてそれを寄せ集めたり修正したりして全体の答を作り出すというアプローチは、極めて自然な考え方であろう。アプローチや元々のアイデアは異なるものの、近年注目を浴びつつある列生成法(column generation)<sup>[3]</sup>も、小さな問題を解きつつ元の問題解決を図るという意味では共通する。

そのような視点から見れば、数学的な意味での理論を背景に持ち、かつ良好な答を短時間に提供する本アプローチの価値が高いことに疑いの余地は無い。その一方で、さらに多くの問題の解決が試みられ、問題の性質や構造との相性、提供される解の精度などに関してより多くの研究が発表され情報が豊富になることが、次の世代の製造業やさらにはサプライチェーンにおける問題解決に対する貢献の源となろう。

## 参考文献

- [1] J. Adams, E. Balas, and D. Zawack. The shifting bottleneck procedure for job shop scheduling. *Mgmt.Sci.*, Vol. 34, No. 3, pp. 391-401, 1988.
- [2] J.F. Bard. Short-term scheduling of thermal-electric generators using Lagrangian relaxation. *Opns.Res.*, Vol. 36, No. 5, pp. 756-766, 1998.
- [3] C. Barnhart, E.L. Johnson, G.L. Nemhauser, M.W.P. Savelsberg, and Vance P.H. Branch-and-price:column generation for solving huge integer programs. *Opns.Res.*, Vol. 46, No. 3, pp. 316-329, 1998.
- [4] J. Carlier and E. Pinson. An algorithm for solving the job-shop problem. *Mgmt.Sci.*, Vol. 35, No. 2, pp. 164-176, 1989.
- [5] H. Chen, C. Chu, and J.-M. Proth. A more efficient Lagrangian relaxation approach to job-shop scheduling problems. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 496-501, 1995.
- [6] C.R.Reeves 編, 横山隆一他訳. モダンヒューリスティクス-組合せ最適化の先端手法. 日刊工業新聞, 1997.
- [7] S.C. Czerwinski and P.B. Luh. Scheduling products with bills of materials using an improved Lagrangian relaxation technique. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 10, No. 2, pp. 99-111, 1994.
- [8] F. Della Croce, R. Tadei, M. Cavalotto, and L. Petri. Cellular control of manufacturing systems. *Eur.J.Opnl.Res.*, Vol. 69, pp. 498-509, 1993.
- [9] D.J. Hoiomt, P.B. Luh, E. Max, and K.R. Pattipati. Scheduling jobs with simple precedence constraints on parallel machines. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 10, No. 2, pp. 34-40, Feb. 1990.
- [10] D.J. Hoiomt, P.B. Luh, and K.R. Pattipati. A practical approach to job-shop scheduling problems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 1, pp. 1-13, Feb. 1993.
- [11] M. Jinyan, S.Y. Chai, and W. Youyi. FMS jobshop scheduling using Lagrangian relaxation method. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 490-495. IEEE, 1995.
- [12] G. Liu and P.B. Luh. Scheduling job shops with transfer lots. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1996.
- [13] G. Liu, P.B. Luh, and R. Resch. Scheduling permutation flow shops using the Lagrangian relaxation technique. *Annals of Opns.Res.*, Vol. 70, pp. 171-189, 1997.
- [14] P.B. Luh, D. Chen, and L.S. Thakur. Scheduling of job shops with uncertain parts. In *Proceedings of 1996 Conference on Computer Integrated Manufacturing in the Process Industries*, 1996.
- [15] P.B. Luh, D. Chen, and L.S. Thakur. Modeling uncertainty in jobshop scheduling. In *Proceedings of 1st International Conference on Operations and Quantitative Management*, pp. 490-497, 1997.
- [16] P.B. Luh, L. Gou, Y. Zhang, T. Nagahora, M. Tsuji, K. Yoneda, T. Hasegawa, Y. Kyoya, and T. Kano. Job shop scheduling with group-deoendent setups, finite buffers, and long time horizon. *Annl's of Opnes.Res.*, Vol. 76, pp. 233-259, 1998.
- [17] P.B. Luh and D.J. Hoiomt. Scheduling of manufacturing systems using the Lagrangian relaxation technique. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No.7, pp. 1066-1079, 1993.
- [18] P.B. Luh, D.J. Hoiomt, E. Max, and K.R. Pattipati. Schedule generation and reconfiguration for parallel machines. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.6, No. 6, pp.687-696, Dec. 1990.
- [19] G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnoy Kan, and M.J. Todd, editors. *Optimization*, Vol. 1 of *HandBooks in Operations*

- Research and Management Science*. Elsevier Science publishers, 1989. (邦訳, 最適化ハンドブック, 朝倉書店).
- [20] G.L. Nemhauser and L.A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley, 1989.
- [21] M. Pinedo. *Scheduling*. Prentice-Hall, 1995.
- [22] R.N. Tomastik, P.B. Luh, and G. Liu. Optimization-based scheduling of flexible manufacturing systems for apparel production. In *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, pp. 3152-3157. IEEE, December 1996.
- [23] J. Wang and P.B. Luh. A combined Lagrangian relaxation and dynamic programming algorithm for job shop scheduling. In *Proceedings of the 5th Rensselaer International Conference on Computer Integrated Manufacturing and Automation Technology*, 1996.
- [24] K. Yoneda, T. Hasegawa, T. Kano, Y. Kyoya, T. Nagahora, M. Tsuji, P.B. Kuh, L. Gou, and Y. Zhang. An optimization-based production scheduling system: progress report. In *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, pp. 2387-2388, 1996.
- [25] Y. Zhang, P.B. Luh, K. Yoneda, T. Kano, and Y. Kyoya. Mixed-model assembly line scheduling using Lagrangian relaxation technique. *IIE Transactions*, Vol. 32, pp. 125-134, 2000.
- [26] X. Zhao, P.B. Luh, and J. Wang. The surrogate gradient algorithm for Lagrangian relaxation method. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 1997.
- [27] X. Zhao, P.B. Luh, and J. Wang. Surrogate gradient algorithms for Lagrangian relaxation. *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 100, No. 3, pp. 699-712, 1999.
- [28] 村上元一, 今泉淳, 森戸晋. ジョブの分岐のある2段階複数機械フローショップにおける納期遅れ最小化スケジューリング: ラグランジュ緩和に基づくヒューリスティックアプローチ. 生産スケジューリングシンポジウム'97, 東京, 1997.
- [29] 黒田充. ラグランジュ分解・調整法と動的スケジューリング. オペレーションズ・リサーチ, Vol.45, No.6, pp.9-15, 2000.
- [30] 今泉淳, 森戸晋. 分岐型ジョブのスケジューリング問題に対するラグランジュ分解・調整法. オペレーションズ・リサーチ, Vol.45, No.6, pp.22-27, 2000.
- [31] 黒田充, 遠国祐介, 榎本雅夫. ラグランジュ緩和法を用いたリアルタイム・スケジューリングの疑似最適化. 生産スケジューリングシンポジウム'98講演論文集, 仙台, 1998.
- [32] 今泉淳, 森戸晋. ジョブの分岐と重複生産を許す2工程並列機械フローショップスケジューリング問題: 納期遅れ最小化に対するラグランジュ緩和に基づくヒューリスティックアプローチ. 生産スケジューリングシンポジウム'98講演論文集, 仙台, 1998.
- [33] 成松克己. マクロレベルスケジューリングのための Lagrange 分解・調整法. オペレーションズ・リサーチ, Vol.45, No.6, pp.28-32, 2000.
- [34] 米田清, 加納敏行, 京屋祐二, P.B. Luh, Y.Zhang. 部品の供給速度が限られた多品種受注組立て工場のスケジューリング. 生産スケジューリングシンポジウム'98 講演論文集, 仙台, 1998.
- [35] 西岡靖之, 久保宏. ラグランジュ調整法を用いた複数工場の協調スケジューリング. スケジューリングシンポジウム2000講演論文集, 浜松, 2000.
- [36] 村松健児. 拡張ラグランジュ分解調整法による同時最適化スケジューリング. オペレーションズ・リサーチ, Vol.45, No.6, pp.16-21, 2000.

- [37] 米田清. ラグランジュ緩和法によるスケジューリング. システム/制御/情報, Vol.41, No.4, pp.130-138, 1997.
- [38] 米田清. 競売のシミュレーションがラグランジュ緩和法. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 45, No.6, pp.3-8, 2000.
- [39] 西竜志, 長谷部伸治, 橋本伊織. 近似ラグランジュ緩和法を用いた装置を要素とするスケジューリング法. スケジューリングシンポジウム'99講演論文集, 京都, 1999.
- [40] 西竜志, 長谷部伸治, 橋本伊織. ラグランジュ分解・調整法による装置を要素とした分解型スケジューリング法-資源制約を有するフローショップ問題への適用-. スケジューリングシンポジウム2000講演論文集, 浜松, 2000.

(2001年5月17日受理)