

確率的キャッシュフローの評価

飯 原 慶 雄

- 1 無危険利率が一定の場合
 - (1) Black=Scholes 型オプション価格モデル
 - (2) リスクの市場価格
 - (3) 確率的割引因子
- 2 無危険利率が確率的な場合

確率変動するキャッシュフロー、特に、その変動が幾何ブラウン運動で表現できる場合のキャッシュフローの評価額（現在価値）を求めることを考えてみる。時刻 t から $t+dt$ までの間のキャッシュフローが $D_t dt$ で、 D_t の変動が

$$dD_t = \mu D_t dt + \sigma D_t dW \quad (1)$$

という形で表すことができるものとする。ここで、 μ と σ は定数で、 dW はウィーナー過程である。幾何ブラウン運動の性質から、

$$D_t = D_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \int_0^t dW \right] \quad (2)$$

であるから、もし、適切な割引率でキャッシュフローの期待値を割り引くことによりキャッシュフローが評価でき、かつその適切な割引率 r が一定であるとすれば、時刻 0 から T までのキャッシュフローの評価額は

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^T e^{-rt} D_t dt \right] &= D_0 E \left[\int_0^T \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - r \right) t + \sigma \int_0^t dW \right] dt \right] \\ &= D_0 \int_0^T \exp[(\mu - r)t] dt = \frac{D_0 [1 - e^{-(r-\mu)T}]}{r - \mu} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。 $r = \mu$ のときには、上の値は $D_0 T$ になる。

ここでは、適切な割引率として一定値 r が存在すると仮定したが、これはどのようにして求められるのか。また、割引率として無危険利率を使用し、ドリフト・レート μ を修正することも考えられるが、その場合どのような修正を行ったらよいのか。さらに、無危険利率が確率的に変動すると

したら、キャッシュフローの評価はどのようになるのか。こうした問題について考えてみたい。第1節では無危険利率が一定の場合について考察し、第2節では無危険利率が確率的に変動する場合について考察する。

1. 無危険利率が一定の場合

(1) Black=Scholes 型オプション価格モデル

Black=Scholes のオプション価格モデルでは、株価のドリフト・レートは無危険利率におきかえて、権利行使時のオプションのペイオフの期待値を割引くことによりオプションの価格を求めている。Black=Scholes 型のオプション価格理論を利用するために、問題にしているキャッシュフローを生み出すような資産が存在し、その資産が市場で取引されていて、その資産の時刻 t での価格が S_t であるとする。 S_t を株価と考え、配当がない場合の株価の変動が

$$dS_t = \mu_S S_t dt + \sigma_S S_t dW_S \quad (4)$$

であるとする。株価に比例する配当が連続的に支払われ、配当株価比率が δ であると、配当支払いがあるときの時刻 t での株価は $S_t e^{-\delta t}$ となる。時刻 t での株価 S_t の時刻 0 での危険中立的確率の下での割引期待値は S_0 となるので、時刻 t での株価が $S_t e^{-\delta t}$ であるときの時刻 0 での危険中立的確率の下での割引期待値は $S_0 e^{-\delta t}$ となる。時刻 t から $t+dt$ までの間の配当は $\delta S_t e^{-\delta t} dt$ であるから、時刻 0 から時刻 T までの配当の時刻 0 での危険中立的確率の下での割引期待値は

$$\int_0^T \delta S_0 e^{-\delta t} dt = S_0 (1 - e^{-\delta T}) \quad (5)$$

となる。この場合の配当をキャッシュフローと考え、 $\delta S_t = D_t$ とすれば、キャッシュフローの評価額は $D_0 (1 - e^{-\delta T}) / \delta$ となる。なお、 $D_t = \delta S_t$ の変動は

$$dD_t = \mu_S D_t dt + \sigma_S D_t dW_S \quad (6)$$

となるので、(1)式と比較することにより、 $\mu_S = \mu$ 、 $\sigma_S = \sigma$ 、 $dW_S = dW$ であることがわかる。ただし、ここで S_0 がわからなければ δ を求めることができないので、これでは問題の解決にはならない。しかし、(5)式と(3)式を比較すれば、 $\delta = r - \mu$ であることがわかり、 r あるいは μ を修正するときの指針を与えてくれることになる。

(2) リスクの市場価格

気温のような、それ自体が取引の対象でないものであっても、それに対するディリバティブ（天

候デリバティブ) が取引されていれば、デリバティブの価格から気温のリスクの市場価格を求めることができる。いま、デリバティブの対象となる変数(上の例では気温) X の変動が

$$dX = \mu_X X dt + \sigma_X X dW_X \quad (7)$$

であるとする。 X についての2種類のデリバティブの価格を f_1 と f_2 とし、 f_1 と f_2 が X と t の関数であるとする、伊藤のレナマにより、

$$\begin{aligned} df_1 &= \mu_1 f_1 dt + \sigma_1 f_1 dW_X \\ df_2 &= \mu_2 f_2 dt + \sigma_2 f_2 dW_X \\ \mu_i &= \left(\frac{1}{2} \sigma_X^2 X^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial X^2} + \mu_X X \frac{\partial f_i}{\partial X} + \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) / f_i \quad (i=1,2) \\ \sigma_i &= \left(\sigma_X \frac{\partial f_i}{\partial X} \right) / f_i \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

となる。そこで、それぞれのデリバティブを $\sigma_2 f_2$ 単位と $-\sigma_1 f_1$ 単位売買するポートフォリオを考えると、そのポートフォリオの収益は

$$(\sigma_2 \mu_1 - \sigma_1 \mu_2) f_1 f_2 dt$$

となり、収益は確定的なものになる。したがって、裁定利益が生じないためには、この収益は、このポートフォリオの価格に無危険利子 $r_f dt$ をかけたものに等しくなければならない。すなわち、

$$r_f (\sigma_2 - \sigma_1) f_1 f_2 dt = (\sigma_2 \mu_1 - \sigma_1 \mu_2) f_1 f_2 dt \quad (8)$$

が成立しなければならない。この条件は

$$\frac{\mu_1 - r_f}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r_f}{\sigma_2} \quad (9)$$

と書きなおすことができる。 X にたいするデリバティブの価格のドリフト・レート μ_d 、ボラティリティ σ_d とすると、無裁定条件が成り立つならば、 X に対するデリバティブである限り、すべてのデリバティブについて、 $(\mu_d - r_f) / \sigma_d$ は等しくなる。この値を λ で表し、 X のリスクの市場価格 (market price of risk) と呼ぶ。リスクの市場価値が求まると、 X に対するデリバティブの価格は容易に求まる。すなわち、 X のドリフト項 μ_X を $\mu_X - \lambda \sigma_X$ に変更した上で、満期時の X の確率分布を求める。 X に対するデリバティブの価格は、満期時の X の関数として決まるペイオフにたいして満期時の X の確率分布を使って期待値を求めこれを無危険利率で割り引けばデリバティブの価格が求まる。

キャッシュフローはそれ自体キャッシュフローのディリバティブと考えることができるので、キャッシュフローの市場価格を知ることができれば、将来のキャッシュフローの変動が(1)式で表されるときには、時刻 t から $t+dt$ までのキャッシュフローの危険中立的(risk neutral)期待値は $D_0 e^{(\mu-\lambda\sigma)t} dt$ となり、これを無危険利率 r_f で割引いた $D_0 e^{-(r_f-\mu+\lambda\sigma)t} dt$ が時刻 0 でのキャッシュフローの評価額となる。 λ が一定であれば、時刻 0 から時刻 T までのキャッシュフローの現在価値は

$$D_0 \left[1 - e^{-(r_f-\mu+\lambda\sigma)T} \right] / (r_f - \mu + \lambda\sigma)$$

となる。したがって、この場合、ドリフト・レート μ から $\lambda\sigma$ を差し引いたものを修正ドリフト・レートとし、この修正ドリフト・レートを使ってキャッシュフローの期待値を求め、さらに無危険利率を割引率として現在価値を求めることにより、キャッシュフローの現在価値が求められることを示している。また、無危険利率にリスク・プレミアムとして $\lambda\sigma$ を加えたものを割引率としてもキャッシュフローの現在価値を求めることができる。(5)式と比較すれば

$$\delta = r - \mu + \lambda\sigma \quad (10)$$

となることがわかる。

(3) 確率的割引因子

投資家の t 期の消費 C_t ($t=0, 1, 2, \dots$) からの効用が $U_t(C_t)$ で、投資家は各期間の消費からの効用の期待値の合計を最大にするものとする。最初に簡単化のため 2 期間モデルで考える。 t 期の価格が P_t で、 $t+1$ 期に X_{t+1} のペイオフ(配当)が得られる資産を ξ 単位購入する。投資家の最適計画は

$$\begin{aligned} & \underset{\xi}{\text{maximize}} \quad U_t(C_t) + E_t[U_{t+1}(C_{t+1})] \\ & C_t = e_t - P_t \xi, \quad C_{t+1} = e_{t+1} + X_{t+1} \xi \end{aligned}$$

の解となる。ここで、 e_t と e_{t+1} は資産以外からの収入で、これは確定的で、 X_{t+1} は不確実であるとする。最大化のための第 1 次条件は

$$P_t U'_t(C_t) = E_t[U'_{t+1}(C_{t+1}) X_{t+1}] \quad (11)$$

となる。

$$m_{t+1} = \frac{U'_{t+1}(C_{t+1})}{U'_t(C_t)} \quad (12)$$

とすると、(11)式は

$$P_t = E_t[m_{t+1}X_{t+1}] \quad (13)$$

となる。 m_{t+1} は資産から生じる将来のキャッシュフローにこれをかけて期待値を求めると資産価格が得られることから確率的割引因子 (stochastic discount factor) と呼ばれる。また、限界代替率 (marginal rate of substitution) あるいはプライシング・カーネル (pricing kernel) と呼ばれることもある。

資産からの将来のキャッシュフローが、 d_{t+1} , d_{t+2} , ... であると

$$\begin{aligned} & \max_{\xi} E_t \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} U_{t+i}(C_{t+i}) \right\} \\ & C_t = e_t + P_t \xi, \quad C_{t+i} = e_{t+i} + d_{t+i} \xi \quad (i=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

から、期待効用最大化の第1次条件は

$$P_t U'_t(C_t) = E_t \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} [U'_{t+i}(C_{t+i}) d_{t+i}] \right\} \quad (14)$$

となる。

$$m_{t+i} = U'_{t+i}(C_{t+i}) / U'_t(C_t) \quad (15)$$

とすれば、上の条件は

$$P_t = E_t \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} [m_{t+i} d_{t+i}] \right\} \quad (16)$$

となり、資産価格は、将来のキャッシュフローに確率的割引因子 m_{t+i} をかけて合計したものの期待値となる。

連続時間モデルでは、時刻 t から $t+dt$ までの配当が $D_t dt$ で、その間の消費 $C_t dt$ からの効用が $e^{-\rho t} U(C_t) dt$ で表すことができると、(14)式に対応する式は

$$P_t e^{-\rho t} U'(C_t) = E_t \int_t^{\infty} e^{-\rho s} U'(C_s) D_s ds \quad (17)$$

となる。

$$A_t = e^{-\rho t} U'(C_t) \quad (18)$$

とすると、上の条件は

$$P_t A_t = E_t \int_t^{\infty} A_s D_s ds \quad (19)$$

となる。(19)式の右辺は

$$E_t \int_t^{\infty} A_s D_s ds = A_t D_t dt + E_t [P_{t+dt} A_{t+dt}] = A_t D_t dt + P_t A_t + E_t [d(P_t A_t)]$$

となるので、(19)式は

$$\begin{aligned} 0 &= A_t D_t dt + E_t [d(P_t A_t)] \\ &= A_t D_t dt + E_t [P_t dA_t + A_t dP_t + dP_t dA_t] \end{aligned}$$

となり、両辺を $P_t A_t$ で割ることにより

$$0 = \frac{D}{P} dt + E \left[\frac{dA}{A} + \frac{dP}{P} + \frac{dP}{P} \frac{dA}{A} \right] \quad (20)$$

という関係が得られる (添字の t は省略)。

いま、無危険資産が存在し、時刻 t から $t+dt$ までの無危険利率が $r_t^f dt$ であるとする。利子の支払があれば、 $t+dt$ でのこの無危険資産の価格の時刻 t での期待値は時刻 t での価格に等しいので、(20)式の資産を無危険資産とすると、

$$\frac{D_t}{P_t} dt = r_t^f dt, \quad E_t [dP_t] = 0$$

から、

$$r_t^f dt = -E_t \left[\frac{dA_t}{A_t} \right] \quad (21)$$

となる。(18)式に伊藤のレンマを適用すると

$$dA_t = -\rho e^{-\rho t} U'(C_t) dt + e^{-\rho t} U''(C_t) dC_t + \frac{1}{2} e^{-\rho t} U'''(C_t) dC_t^2$$

あるいは、

$$\frac{dA_t}{A_t} = -\rho dt + \frac{C_t U''(C_t)}{U'(C_t)} \frac{dC_t}{C_t} + \frac{1}{2} \frac{C_t^2 U'''(C_t)}{U'(C_t)} \frac{dC_t^2}{C_t^2} \quad (22)$$

となる。

効用関数がべき型で、 $U(C) = C^{1-\gamma} / (1-\gamma)$ であり、 C_t の変化が

$$dC_t = \mu_C C_t dt + \sigma_C C_t dW_C \quad (23)$$

で表すことができれば、(22) 式は

$$\frac{dA_t}{A_t} = -\left(\rho + \mu_C - \frac{1}{2} \gamma(\gamma+1) \sigma_C^2 \right) dt - \gamma \sigma_C dW_C$$

となり、(21) 式を考慮すれば

$$\frac{dA_t}{A_t} = -r_t^f dt - \gamma \sigma_C dW_C, \quad r_t^f = \rho + \mu_C - \frac{1}{2} \gamma(\gamma+1) \sigma_C^2 \quad (24)$$

となる。

無危険利率が一定値 r_f であれば、

$$A_s = A_t \exp \left(- \left(r_f + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_C^2 \right) (s-t) - \gamma \sigma_C \int_t^s dW_C \right) \quad (25)$$

となり、 D_t の変動が

$$dD_t = \mu D_t dt + \sigma D_t dW$$

と表すことができ、時刻 0 から時刻 T までキャッシュフローが発生するときには、(19) 式は

$$\begin{aligned} P_0 &= D_0 E \left\{ \int_0^T \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - r_f - \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_C^2 \right) t - \gamma \sigma_C \int_0^t dW_C + \sigma \int_0^t dW \right] dt \right\} \\ &= D_0 \int_0^T \exp \left[(\mu - r_f - \gamma \beta_C) t \right] dt = D_0 \frac{1 - e^{-(r_f - \mu + \gamma \beta_C)T}}{r_f - \mu + \gamma \beta_C} \end{aligned} \quad (26)$$

となる。ここで、 $\beta_C dt = \sigma \sigma_C dW dW_C$ である。したがって、 $\gamma \beta_C$ が先のリスクの市場価格を使用したときの修正項 $\lambda \sigma$ に対応することになる。

2. 無危険利率が確率的な場合

無危険利率 r_t^f の変動について Vasicek 型を仮定する。

$$dr_t^f = (b - ar_t^f)dt + \sigma_r dW_r \quad (27)$$

キャッシュフローの変動については、前節と同様

$$dD_t = \mu D_t dt + \sigma D_t dW$$

であるとする。新しい変数として、

$$X_t = r_t^f e^{at}$$

を考える。

$$dX_t = e^{at} dr_t^f + ar_t^f e^{at} dt = e^{at} (bdt + \sigma_r dW_r)$$

となるので、

$$X_t = X_0 + b \int_0^t e^{as} ds + \sigma_r \int_0^t e^{as} dW_r = X_0 + b(e^{at} - 1)/a + \sigma_r \int_0^t e^{as} dW_r$$

となり、 $X_0 = r_0$ であることから

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at})/a + \sigma_r \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_r \quad (29)$$

となる。

まず、キャッシュフローを無危険利率で割引いた期待価値を求めてみる。当然、リスクを考慮しなければならないのであるが、前節で無危険利率が一定の場合には μ を修正することにより、リスクを考慮することができるがわかっているので、ここでも μ を修正することによりリスクを処理できるものとして、(28) 式の μ はリスク修正後のものであるとして、割引計算を行う。 r_t^f が変動する場合、割引因子は $\exp(-\int_0^t r_t^f d\tau)$ の代わりに、 $\exp(-\int_0^t r_t^f d\tau)$ となるので、 $\int_0^t r_t^f d\tau$ を先に求めておく。積分の結果は

$$\int_0^t r_t^f d\tau = r_0 \frac{1 - e^{-at}}{a} + \frac{b}{a} \left(t - \frac{1 - e^{-at}}{a} \right) + \sigma_r \int_0^t \frac{1 - e^{-a(t-\tau)}}{a} dW_r$$

となる。利率 a 、期間 t の年金の現在価値を表す $(1 - e^{-at})/a$ を $B(t)$ で表し、Vasicek モデルで

無危険利率の長期的な回帰水準となる b/a を $\bar{r}$ で表すと上の式は

$$\int_0^t r_t^f d\tau = r_0 B(t) + \bar{r}(t - B(t)) + \sigma_r \int_0^t B(t - \tau) dW_r \quad (30)$$

と表せる。キャッシュフローが永久に続くものとすれば、キャッシュフローの割引期待値は

$$\begin{aligned} P_0 &= E \left\{ \int_0^\infty e^{-\int_0^t r_\tau^f d\tau} D_t dt \right\} \\ &= E \left\{ \int_0^\infty D_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \int_0^t dW - r_0 B(t) - \bar{r}(t - B(t)) - \sigma_r \int_0^t B(t - \tau) dW_r \right] dt \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。

$$\begin{aligned} E \left\{ \exp \left[\int_0^t B(t - \tau) dW_r \right] \right\} &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1 - 2e^{-a(t-\tau)} + e^{-2a(t-\tau)}}{a^2} d\tau \\ &= \frac{1}{2a^2} \left(t - 2 \frac{1 - e^{at}}{a} + \frac{1 - e^{-2at}}{2a} \right) = \frac{1}{2a^2} \left\{ t - B(t) - \frac{a}{2} [B(t)]^2 \right\} \end{aligned}$$

であるから、 $\sigma_r \sigma dW dW_r$ を $\beta_r dt$ で表すことにすると、(31)式は

$$P_0 = D_0 \int_0^\infty \exp \left[\mu t - r_0 B(t) - \left(\bar{r} - \frac{\sigma_r^2}{2a^2} + \frac{\beta_r}{a} \right) (t - B(t)) - \frac{\sigma_r^2 [B(t)]^2}{4a} \right] dt \quad (32)$$

となる。Vasicek モデルでは、満期までの期間が t で、現在の無危険利率が r_0 のときのゼロ・クーポン債（割引債）の価格を $B_0(r_0, t)$ とすると、

$$B(r_0, t) = E \left[e^{-\int_0^t r_\tau^f d\tau} \right] = \exp \left[-r_0 B(t) - \left(\bar{r} - \frac{\sigma_r^2}{2a^2} \right) (t - B(t)) - \frac{\sigma_r^2 [B(t)]^2}{4a} \right] \quad (33)$$

となるので、これを使ってプロジェクトの評価額を表せば、

$$P_0 = D_0 \int_0^\infty B(r_0, t) \exp \left(\mu t - \frac{\beta_r}{a} (t - B(t)) \right) dt \quad (34)$$

となる。したがって、キャッシュフローの期待値 $D_0 e^{\mu t}$ を $D_0 \exp(\mu t - \beta_r(t - B(t))/a)$ に修正した上で、これに割引債価格をかけて合計したものがプロジェクトの評価額になる。 a は正の値をとると考えられるが、 a が正であると $B(t)$ は t より小さくなるので、利子率が上昇するときにキャッシュフローが増加するようであれば、キャッシュフローの修正額は減少し、キャッシュフローが減

少するようであれば、修正額は増加する。キャッシュフローの変動と利子率の変動が独立であれば、キャッシュフローの期待値と利子率の期間構造だけからプロジェクトの評価額を求めることができる。キャッシュフローの変動と利子率の変動が独立で、 μ が零であれば、キャッシュフローの期待値 D_0 に単位時間当たり 1 単位の金額をクーポンとする永久債の価格をかけたものがプロジェクトの評価額となる。

次に確率的割引因子の利用について考える。前節の (25) 式に、無危険利子率についての Vasicek モデルでの利子率 (29) 式を代入すると、

$$A_t = A_0 \exp \left[-r_0 B(t) - \bar{r}(t - B(t)) - \sigma_r \int_0^t B(t - \tau) dW_r - \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_C^2 t - \gamma \sigma_C \int_0^t dW_C \right] \quad (35)$$

となり、これにキャッシュフローをかけて合計したものの期待値を求めると、

$$\begin{aligned} P_0 &= D_0 E \left\{ \int_0^\infty \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t - r_0 B(t) - \bar{r}(t - B(t)) - \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_C^2 t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma \int_0^t dW - \gamma \sigma_C \int_0^t dW_C - \sigma_r \int_0^t B(t - \tau) dW_r \right] dt \right\} \\ &= D_0 \int_0^\infty \exp \left[\mu t - r_0 B(t) - \bar{r}(t - B(t)) + \frac{\sigma_r^2}{2a^2} \left(t - B(t) - \frac{a}{2} [B(t)]^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \gamma \beta_C t - \frac{\beta_r}{a} (t - B(t)) + \gamma \beta_{Cr} (t - B(t)) \right] dt \end{aligned} \quad (36)$$

となる。ただし、 $\sigma_C \sigma_r dW_C dW_r = \beta_C dt$ である。このモデルでは割引債の価格は

$$B(r_0, t) = \exp \left[-r_0 B(t) - \left(\bar{r} - \frac{\sigma_r^2}{2a} - \gamma \beta_{Cr} \right) (t - B(t)) - \frac{\sigma_r^2 [B(t)]^2}{4a} \right] \quad (37)$$

となり、先の (33) 式と比較すると指数関数のべき項が $\gamma \beta_{Cr} (t - B(t))$ だけ異なっている。しかし、利子率モデルを実際に利用するときには、実際のイールド・カーブと一致するようにパラメータを決定する場合が多いので、 $\bar{r}$ の推定が異なるだけであると考えられるであろう。満期までの期間 t の割引債の価格を $B(r, t)$ とすると、

$$P_0 = D_0 \int_0^\infty B(r_0, t) \exp \left[\left(\mu - \gamma \beta_C \right) t - \frac{\beta_r}{a} (t - B(t)) \right] dt \quad (38)$$

となるので、確率的割引因子によるプロジェクトの評価は、無危険利率が一定の場合と同様に μ を $\mu - \gamma \beta_C$ に修正した上で、無危険利率が変動することによる効果として時刻 t でのキャッシュフ

ローに $\exp[-\beta_r(t-B(t))/a]$ をかけた上で、イールド・カーブに従った割引を行うことにより、評価額が得られることになる。

参考文献

Cochrane, John H. (2001) Asset Pricing, Princeton University Press.

Bjork, Tomas(1998) Arbitrage Theory in Continuous Times, Oxford University Press.

Hull, John C. (2000) Options, Futures, and Other Derivatives, 4th ed., Prentice-Hall.

Neftci, Salih N. (2000) An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, 2nd ed., Academic Press.

(2001年9月26日受理)