

現在価値ルールとリアル・オプション

飯 原 慶 雄

1. 参入問題

(1) 確定的モデル

(2) 確率的モデル

2. 生産能力拡張問題

(1) 基本モデル

(2) 競争条件と正味現在価値

リアル・オプションの議論、特に、リアル・オプションの解説書では、しばしば、現在価値が単に正の価値であるだけではなく、かなり高い水準にならないと投資を実行すべきではないという結論が得られることから、従来の現在価値基準を否定する新しい理論であるかに述べられていることがある。他方、リアル・オプションで取り上げられる例が、単独のプロジェクトで、競争関係を考慮していないもので、競争関係を考慮すると、現在価値ルールが成立するという主張もなされている。このノートでは、リアル・オプションで取り上げられている参入問題は、相互排反的プロジェクトの選択問題であり、正味現在価値の正負が投資の採用条件を決めるのではなく、正味現在価値が最大になるような採用条件を求めているものであることを、確定的状況と比較しながら、明らかにする。

競争関係については、需要関数を考え、生産能力拡張問題について考察する。競争関係を考慮して正味現在価値が零になるという主張は、リアル・オプションの問題であるより、競争についての仮定から生まれてきていることを明らかにする。

1. 参入問題

(1) 確定的モデル

現在時点を0とし、時刻 t で投資を実行したとき、時刻 t から、将来無限にキャッシュフローが発生するものとし、時刻 s から時刻 $s+ds(s>t)$ の間のキャッシュフローは $C_s ds$ であるとする。以下では C_s をキャッシュフローと呼ぶことにする。キャッシュフローは価格、需要などの変化、技術革新などによって変化するが、これが一定率 $m(>0)$ で増加する場合について考えてみる。すなわち、

$$C_s = C_0 e^{ms}$$

であるとする。時刻 t で投資を実行したときに発生するキャッシュフローの現在時点(時刻 0)での現在価値は、割引率を r とすると

$$\int_t^{\infty} C_s e^{-rs} ds = \int_t^{\infty} C_0 e^{-(r-m)s} ds = C_0 e^{-(r-m)t} / (r-m)$$

となる(現在価値が有限になるように $r > m$ と仮定する)。投資コストが投資時点に関係なく K であるとする、その現在価値は Ke^{-rt} となる。時刻 t で投資を実行することにしたときのこのプロジェクトからの正味現在価値を $NPV(t)$ で表すことにすると

$$NPV(t) = e^{-rt} \left[C_0 e^{mt} / (r-m) - K \right]$$

となる。もし、投資時点が自由に選択できるのであれば、 $NPV(t)$ が最大になるような t が選択されるであろう。すなわち、第 1 次条件から

$$rK = C_0 e^{mt} \quad (1)$$

を満たすような t が選択される。このような時刻 t で投資を実行したとき、その時点以降に発生するキャッシュフローのその時点での現在価値は(1)式の関係から

$$C_0 e^{mt} / (r-m) = rK / (r-m)$$

となり、仮に、 $r = 4\%$ 、 $m = 2\%$ とするとキャッシュフローの現在価値が投資コストの 2 倍になる時点で投資が行われることになる。これは、正味現在価値が正であれば投資を実行するということとは異なる。しかし、これは正味現在価値ルールを否定するものではない。

正味現在価値を投資決定に利用する際には、プロジェクトの採否決定問題と、相互排反的投資案の選択のような順位決定問題を区別する必要がある。採否決定問題では、正味現在価値の正負がプロジェクトの採否を決定するが、相互排反的投資案のようにある案の採用が他の案の採用を不可能にしてしまう場合には、正味現在価値の最大のものが採択される(もちろん、そのときの正味現在価値がプラスでなければ採択されないが)。ここで取上げた問題ではある時点で投資を実行すれば他の時点での投資の実行は不可能になるのであるから、投資実行時点の異なるものを異なる投資案

と考えれば、相互排反的投資案の中から1つをえらぶ問題となり、正味現在価値の正負ではなく、正味現在価値が最大になる投資実行時点が問題となる。(1)式は正味現在価値が最大となる時点の条件で、左辺は投資の実行を遅らせることによりえられる投資金額からの利子であり、右辺は投資を遅らせることによって失われるキャッシュフローで、この両者が等しくなる時点が投資実行時点となることを示している。

以上の議論では、キャッシュフローの増加率 m が一定値であると仮定したが、キャッシュフローが時間だけの関数であれば

$$NPV(t) = \int_t^{\infty} C_s e^{-rs} ds - Ke^{-rt}$$

についての第1次条件は

$$C_t e^{-rt} = rKe^{-rt}$$

から

$$C_t = rK \quad (1')$$

となる。 C_s が s の増加関数であれば、(1')式を満たす t が最適な投資実行時点となる。このプロジェクトに参入することを計画している企業が多数存在しても、キャッシュフローと投資コストの条件が等しければ、(1')式の条件が成立する以前にこの投資案を実行するのは最適ではない。もし、多数の企業の参入により、キャッシュフローの増加が止まり、(1')式が成立した水準すなわち、 rK にとどまると、投資実行時点以降のキャッシュフローのその時点での現在価値は K になり、その時点での正味現在価値は零となる。そのときでも最適な投資実行時点は(1')式が成立時点であることには変わらない。

(2) 確率的モデル

次にキャッシュフローが確率的に変動する場合について考える。これまでの議論と同じように無リスク金利 r を割引率として使用するために、確率的なキャッシュフローの変動は危険中立的測度で表現されたものとし、その動きが幾何ブラウン運動

$$dC = mCdt + sC dW$$

で表現されるようなものであるとする。 m と s は定数で、 W はウィーナー過程である。 C が C^*

に最初に到達する時刻を t とし、

$$f(C) = E_0 \left[e^{-rt} \mid C_0 = C \right]$$

とする。 $f(C)$ は C が C^* に最初に到達した時点での 1 単位の金額の現在価値である。 $f(C)$ は dt 時間後の $f(C + dC)$ との関係と伊藤のレンマから

$$\begin{aligned} f(C) &= E_0 \left[e^{-r dt} f(C + dC) \mid C_0 = C \right] \\ &= f(C) + \left(f'(C) m C + \frac{1}{2} f''(C) s^2 C^2 - r f(C) \right) dt \end{aligned}$$

となるので、 $f(C)$ は微分方程式

$$\frac{1}{2} s^2 C^2 f''(C) + m C f'(C) - r f(C) = 0$$

を満たす。 $f(C)$ の一般解は

$$f(C) = A C^a + B C^b$$

となる。 a と b は、2 次方程式

$$\frac{1}{2} s^2 x(x-1) + m x - r = 0 \quad (2)$$

の解である。2 次方程式の解は 2 個であるが、 $r > 0$ であると、それらは正値と負値をとるので、 $a < 0$ 、 $b > 0$ とする。 $f(C)$ は境界条件 $f(0) = 0$ 、 $f(C^*) = 1$ を満たさなければならないので、 $A = 0$ 、 $B = (1/C^*)^b$ であることがわかる。これらから、 $f(C) = (C/C^*)^b$ となる。 C が C^* に達したときに投資を実行すると、投資実行時点以降のキャッシュフローのその時点での現在価値の期待値は

$$E_t \left[\int_t^{\infty} C_s e^{-r(s-t)} ds \mid C_t = C^* \right] = C^* / (r - m)$$

となるので、投資コストを K とすると、投資時点での正味現在価値は $C^* / (r - m) - K$ となる。 C が C^* に最初に達した時点での 1 単位の金額の現在時点での現在価値が $f(C) = (C/C^*)^b$ であるから、プロジェクトの現在時点での正味現在価値は

$$NPV(C^*) = [C^*/(r-m) - K] (C/C^*)^b \quad (3)$$

となる。この正味現在価値を最大にするような C^* についての第1次条件は

$$\frac{C^*}{r-m} = \frac{b}{b-1} K \quad (4)$$

となる。仮に $r = 4\%$ 、 $m = 0\%$ 、 $s = 20\%$ とすると b は2になるので、投資実行時のキャッシュフローの現在価値は投資コストの2倍になる。 b は(2)式を満たすので、

$$b/(b-1) = (r + s^2 b/2)/(r-m)$$

となり、これから(4)式は

$$C^* = (r + s^2 b/2) K \quad (4')$$

となる。 $s^2 \rightarrow 0$ のときには、(4')式は(1)式と一致する。

2. 生産能力拡張問題

前節の後半で、確率的キャッシュフローについて考えたときには、多数の企業が参入することを考慮していないし、また、他社の参入がなくても、自社の生産能力を拡張する可能性を考慮していない。こうした可能性を考慮したとき、投資の実行時点は変化するのではあろうか。また、プロジェクトの正味現在価値は零になるのではあろうか。こうした問題を考えるため、不完全競争の状況を考え、その極限として完全競争について詳しく検討してみることにする。

(1) 基本モデル

産業全体の総生産能力を Q で表し、特定の企業の生産能力を q で表す。生産能力と生産量は等しいものとし、生産量が Q のときの製品価格が $XD(Q)$ で表すことができるものとする。 X は確率変数で、その変動が

$$dX = mXd t + sXdW$$

で表すことができるものとする。生産費用は零とすると、特定企業のキャッシュフローは $qXD(Q)$ となる。 $qD(Q)$ を $p(q, Q)$ で表し、 q についての偏導関数を $p_q(q, Q)$ で表す。

$$\begin{aligned} p(q, Q) &= qD(Q) \\ p_q(q, Q) &= D(Q) + qD_Q(Q) \end{aligned}$$

$D_Q(Q)$ は $D(Q)$ の導関数である。独占の場合は $q=Q$ であり、完全競争の場合は、 $D(Q)=1$ とし、 X をキャッシュフローと考えることにする。産業全体の生産能力が Q で、特定企業の生産能力が q 、状態変数の値が X のときの企業価値を $V(q, Q; X)$ で表すことにすると、これに関して、次の微分方程式が得られる。

$$\frac{1}{2}s^2X^2V_{XX} + mXV_X - rV + p(q, Q)X = 0$$

X が零のとき、 V は零になるので、上の微分方程式の解は

$$V(q, Q; X) = B(q, Q)X^b + p(q, Q)X/(r-m) \quad (5)$$

となる。 b は先の(2)式の正値解である。 X が X^* に達したときに能力を拡張するという政策について考えてみることにする。 X^* は Q に依存するので $X^*(Q)$ と表すことにする。生産能力追加のための費用が追加される生産能力に比例し、 dq の生産能力追加のためのコストが Kdq であるとす。 K の投資コストによる生産能力の追加により $\partial V(q, Q; X^*(Q))/\partial q$ だけ企業価値が増加するので、 $V(q, Q; X(Q))$ についての境界条件は

$$\partial V(q, Q; X^*(Q))/\partial q = B_q(q, Q)(X^*(Q))^b + p_q(q, Q)X^*(Q)/(r-m) = K$$

となる。 $B_q(q, Q)$ は $B(q, Q)$ の q についての偏導関数である。さらに、最適な $X^*(Q)$ のための条件として

$$\frac{\partial^2}{\partial X \partial q} V(q, Q; X^*(Q)) = 0$$

を考えると、これらの条件から

$$\frac{p_q(q, Q)}{r-m} X^*(Q) = \frac{b}{b-1} K \quad (6)$$

$$B_q(q, Q) = K \left(X^*(Q) \right)^{-b} / (1 - b) \quad (7)$$

が得られる。 b が(2)式を満たすことから、(6)式は

$$p_q(q, Q) X^*(Q) = \left(r + s^2 b / 2 \right) K \quad (6')$$

となる。これらの式は前節の(4)、(4')式に対応するものである。

(2)競争条件と正味現在価値

ここまでは、前節の結果にほぼ対応し、特に、完全競争の場合は完全に一致している。しかし、企業価値を示す $V(q, Q; X)$ は大きく異なってくる。 $V(q, Q; X)$ を直接解く代わりに、 $V(q, Q; X)$ を q で微分した $v(q, Q; X)$ について解を求めると、(5)式から、

$$v(q, Q; X) = B_q(q, Q; X) X^b + p_q(q, Q) X / (r - m)$$

となり、(6)式の関係から

$$\begin{aligned} v(q, Q; X) &= \frac{p_q(q, Q)}{r - m} X - \frac{K}{b - 1} \left(\frac{X}{X^*(Q)} \right)^b \\ &= \frac{p_q(q, Q)}{(r - m)} X - \left(\frac{p_q(q, Q)}{(r - m)} X^*(Q) - K \right) \left(\frac{X}{X^*(Q)} \right)^b \end{aligned} \quad (8)$$

となる。右辺の第1項は限界的な生産能力から得られるキャッシュフローの現在価値を表している。前節では将来の拡張を考慮していないため、投資を実行すれば、追加的投資を行ったときの投資から発生するキャッシュフローの現在価値は $p_q(q, Q) X / (r - m)$ （上の式の右辺第1項）になると考えている。他方、投資実行する前の正味現在価値は $\left(p_q(q, Q) X^*(Q) / (r - m) - K \right) \left(X / X^*(Q) \right)^b$ （上の式の右辺第2項の符号を逆にしたもの。 $p_q(q, Q) = 1$ 、 $X = C$ 、 $X^*(Q) = C^*$ とすると(3)式になる。）であると考えた。(8)式の意味を考えるために、 X が $X^*(Q)$ に達したときに、 $v(q, Q; X)$ が $v(q, Q; X^*(Q))$ 以上に増加しないものとし、

$$\partial v(q, Q; X^*(Q)) / \partial X = 0$$

という境界条件を考えると、微分方程式の解は(8)式となる。すなわち、(8)式の $v(q, Q; X)$ は、追

加的投資を行ったときに発生するキャッシュフローについて、 X が $X^*(Q)$ 以上になってもキャッシュフローの現在価値は $v(q, Q; X^*(Q))$ 以上にはならないものとしてキャッシュフローの現在価値を計算したものと同じになっている。 $X^*(Q)$ で投資を実行したときのキャッシュフローの現在価値は

$$v(q, Q; X^*(Q)) = K$$

となるので、 $v(q, Q; X)$ に基づく正味現在価値は零になる。しかし、これは、境界条件ないし競争条件をどのように考えるかによる。もちろん、競争条件あるいは追加投資条件を考慮することは将来のキャッシュフローを正しく推測する上で重要なことであるが、通常の正味現在価値の計算とは異なる視点といえることができる。ここで注目すべきことはそれにもかかわらず、投資実行の条件が一致することで、前節で指摘したように、投資実行条件は、正味現在価値の正負とは関係ないものであって、競争条件などを考慮すると正味現在価値の大きさは変化するが投資実行条件については同一の結果が得られることに注目すべきであろう。

(2002年9月25日受理)