

マルコフ・スイッチング GARCH モデルのベイズ推定法

里 吉 清 隆

要旨

1. はじめに
2. モデル
 2. 1 MS-GARCH モデル
 2. 2 最尤推定の問題点
3. モデルの推定
 3. 1 MCMC 法によるベイズ推定
 3. 2 状態変数のサンプリング
 3. 3 GARCH モデルの推定
 3. 4 推移確率のサンプリング
 3. 5 MCMC 法によるベイズ推定の手順
4. 結論と今後の課題
5. 補論
 5. 1 状態変数の条件付き同時分布
 5. 2 A-R/M-H アルゴリズム

参考文献

要旨

本稿では、GARCH モデルのパラメータがマルコフ過程に従う状態変数に依存してスイッチングを起こすマルコフ・スイッチング GARCH モデルの推定法を提案している。このモデルは最尤法によって推定できないことが一般に知られているが、マルコフ連鎖モンテカルロ法と呼ばれる手法を用いることによってベイズ推定を行うことができる。マルコフ・スイッチングを表す状態変数のサンプリングには Albert / Chib (1993) の手法を用いた。また、GARCH モデルのパラメータのサンプリングは三井 / 渡部 (2003) の手法に従った。

1. はじめに

ボラティリティは金融資産の投資リスクを表す指標であり、その時系列的変動の特性を明らかにすることはリスク管理を行ううえで非常に重要である。Engle (1982) はボラティリティの変動を捉えるために、各時点のボラティリティを過去の予期しないショックの2乗の線形関数として定式化する ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) モデルを提案した。また、Bollerslev

(1986)はボラティリティの説明変数に過去のボラティリティの値を加えて、GARCH (Generalized ARCH) モデルと呼ばれるより一般的なモデルに拡張した。その後、ARCH モデルは改良が続けられ、数多くのバリエーションが提案されている。

一般に、ARCH モデルの文献では、資産市場においてボラティリティに対するショックの持続性は非常に高いということが指摘されている。しかし、Diebold (1986)、Lamoureux / Lastrapes (1990)は、このようなボラティリティの高い持続性は、サンプル期間内におけるボラティリティ・プロセスの構造変化によって引き起こされた可能性があることを示唆している。つまり、ある期間のボラティリティは高く、それ以外の期間のボラティリティは低いといったケースでは、たとえそれぞれの期間ではボラティリティの持続性が低かったとしても、ボラティリティの高低によって ARCH モデルなどの持続性を示すパラメータの値が高めに推定されることを指摘している。このことから、Hamilton / Susmel (1994)は、ARCH の定式化に構造変化を含めたマルコフ・スイッチング ARCH (MS-ARCH) モデルを提案した。このモデルでは、構造変化を表す状態変数はマルコフ過程に従うと仮定している。ニューヨーク証券取引所の加重平均ポートフォリオ週次収益率で分析を行なったところ、ショックの持続性の多くはマルコフ・スイッチングの持続性で説明できることを明らかにした。また、Cai (1994)は同様のアイデアを財務省短期証券 (TB) のボラティリティに適用して、スイッチングを導入することにより ARCH モデルの持続性は大幅に減少するという結果を得ている。

MS-ARCH モデルの拡張として、GARCH モデルにマルコフ・スイッチングを導入したマルコフ・スイッチング GARCH (MS-GARCH) モデルがある¹。しかし、このモデルは Cai (1994)、Hamilton / Susmel (1994)が指摘しているように最尤法によって推定することができない。なぜなら、ある時点の尤度は過去の全ての状態変数に依存しているので、尤度関数を書くことが事実上不可能になるからである。MS-GARCH モデルは Gray (1996)の短期金利の変動に関する研究で最初に提案され、Klaassen (2002)の為替レートのボラティリティ予測にも使用されている。しかし、これらの文献ではボラティリティの定式化に強い仮定をおいて、過去のボラティリティの期待値をとることにより、各時点のボラティリティは過去の状態変数には依存せず、その期の状態変数のみに依存するモデルにしている。これによって最尤法で簡単に推定することができ、従来のスイッチングの無い GARCH モデルよりも予測などの点において優れているという結果を得ている。しか

¹ MS-ARCHモデル、MS-GARCHモデルの他に、確率的ボラティリティ変動 (Stochastic Volatility) モデルにマルコフ・スイッチングを導入したものとして、So / Lam / Li (1998)のマルコフ・スイッチング確率的ボラティリティ変動 (MS-SV) モデルがある。

し、もし現実の資産価格の変動がこのような強い仮定をおいていない MS-GARCH 過程に従っているのであれば、過去のボラティリティに期待値をおいたモデルの尤度は近似的なものでしかなく、パラメータの推定値に偏りが生じてしまう可能性がある。したがって、本稿では Gray (1996)、Klaassen (2002) のような仮定はおいていない。

このように、MS-GARCH モデルは最尤法によって推定することができない。そこで、本稿では最近の計量分析において非常に注目を集めているマルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo; MCMC) 法というテクニックを使ったベイズ推定法を提案している。この手法を用いると、先に述べたような状態変数の依存性にもかかわらずモデルの推定を行うことができる。状態変数のサンプリングには Albert / Chib (1993) の手法を用いた。ただし、サンプリングの収束を速めるため、若干の改良をしている。また、GARCH モデルのパラメータのサンプリングは、三井/ 渡部 (2003) の手法に従った。

本稿の構成は次の通りである。第2節では、マルコフ・スイッチング GARCH (MS-GARCH) モデルを説明し、最尤推定が不可能である理由を述べる。第3節では、MCMC 法を用いたベイズ推定法を説明する。第4節で結論と今後の課題を述べる。第5節は補論である。

2. モデル

2. 1 MS-GARCH モデル

R_t を時系列データ、 h_t をボラティリティとする。ボラティリティの式の定数項がマルコフ・スイッチングを起こす以下のような MS-GARCH モデルを考える。

$$R_t = \varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad z_t \sim i.i.d.N(0,1), \quad (1)$$

$$h_t = \alpha_{s_t} + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma h_{t-1}, \quad (2)$$

$$\alpha_{s_t} = \alpha_0 + \alpha_1 S_t. \quad (3)$$

ここで、 $z_t \sim i.i.d.N(0,1)$ は z_t が過去と独立で、かつ平均0、分散1の同一な正規分布に従うことを表している。時系列データ R_t は自己相関が無く、平均はゼロと仮定している。また、(2) 式の GARCH モデルは簡単化のため次数は増やさず、GARCH(1, 1) とした。(3) 式の S_t はマルコフ過程に従う状態変数であり、その推移確率は

$$\Pr[S_t = 1 | S_{t-1} = 1] = p, \quad \Pr[S_t = 0 | S_{t-1} = 0] = q \quad (4)$$

とする。ただし、 $\Pr[S_t = j | S_{t-1} = i]$ は状態 i から状態 j に推移する確率である。したがって、(2) 式の定数項 α_{s_t} は、 $S_t = 0$ のとき $\alpha_{s_t} = \alpha_0$ 、 $S_t = 1$ のとき $\alpha_{s_t} = \alpha_0 + \alpha_1$ というようにマルコフ過程に従って変化する。

2. 2 最尤推定の問題点

Cai (1994)、Hamilton / Susmel (1994) が指摘しているように、GARCH モデルのボラティリティは過去の予期しないショックの 2 乗だけでなく過去のボラティリティの値にも依存しているため、マルコフ・スイッチングを含めた MS-GARCH モデルに拡張した場合、最尤法によるパラメータの推定は困難になる。このことを示すために、まず、(2) 式を以下のように書き換える。

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_{s_t} + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma h_{t-1} \\ &= \alpha_{s_t} + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma (\alpha_{s_{t-1}} + \beta \varepsilon_{t-2}^2 + \gamma h_{t-2}) \\ &\vdots \\ &= \sum_{i=1}^t \gamma^{i-1} (\alpha_0 + \alpha_1 S_{t+1-i}) + \beta \sum_{i=1}^t \gamma^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma^t h_0. \end{aligned}$$

上式より、 t 期のボラティリティは t 期の状態変数 S_t だけに依存するのではなく、過去の全ての状態変数 $S_1, \dots, S_{t-1}$ にも依存していることが分かる。したがって、マルコフ・スイッチング・モデルを最尤法で推定するには、まずはじめに観測値 R_t および状態変数の同時確率密度が必要になるのだが、MS-GARCH モデルの場合は R_t と $S_1, \dots, S_t$ の同時確率密度になる。同時確率密度は R_t の条件付き確率密度と $S_1, \dots, S_t$ の周辺確率密度の積として表すことができるので

$$\begin{aligned} f(R_t, S_1, \dots, S_t | R_1, \dots, R_{t-1}, \varepsilon_0^2, h_0) \\ = f(R_t | S_1, \dots, S_t, R_1, \dots, R_{t-1}, \varepsilon_0^2, h_0) f(S_1, \dots, S_t | R_1, \dots, R_{t-1}, \varepsilon_0^2, h_0) \end{aligned}$$

となる。ただし、 ε_0^2 、 h_0 は初期値である。 R_t の周辺確率密度を求めるために、同時確率密度を全ての $S_1, \dots, S_t$ について足し合わせると

$$\begin{aligned} f(R_t | R_1, \dots, R_{t-1}, \varepsilon_0^2, h_0) &= \sum_{S_1=0}^1 \dots \sum_{S_t=0}^1 f(R_t | S_1, \dots, S_t, R_1, \dots, R_{t-1}, \varepsilon_0^2, h_0) \\ &\quad \times f(S_1, \dots, S_t | R_1, \dots, R_{t-1}, \varepsilon_0^2, h_0) \end{aligned}$$

となる。したがって、パラメータが 2 つの状態にスイッチングする MS-GARCH モデルの場合、尤度関数を求めるには t 期において上式の 2^t 個の和を計算しなくてはならず、データ数が多いと最尤

推定は実行不可能になる²。

3. モデルの推定

3. 1 MCMC 法によるベイズ推定

この節では、MS-GARCH モデルの MCMC 法を用いたベイズ推定法について解説する。以下では(2)、(3)式のパラメータをベクトルとしてまとめて $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta, \gamma)'$ とする。MCMC 法によるベイズ推定を行うには未知のパラメータの条件付き分布が必要になるので、まずはじめに、データ $R_1, \dots, R_T$ 、状態変数 $S_1, \dots, S_T$ 、パラメータ θ 、推移確率 p 、 q の同時確率密度を考える。ベイズの定理より

$$\begin{aligned} f(R_1, \dots, R_T, S_1, \dots, S_T, \theta, p, q) &= f(S_1, \dots, S_T, \theta, p, q) f(R_1, \dots, R_T | S_1, \dots, S_T, \theta, p, q) \\ &= f(S_1, \dots, S_T, \theta, p, q | R_1, \dots, R_T) f(R_1, \dots, R_T). \end{aligned}$$

したがって、事後分布は

$$f(S_1, \dots, S_T, \theta, p, q | R_1, \dots, R_T) \propto f(S_1, \dots, S_T, \theta, p, q) f(R_1, \dots, R_T | S_1, \dots, S_T, \theta, p, q) \quad (5)$$

となり、事前分布 $f(S_1, \dots, S_T, \theta, p, q)$ と尤度 $f(R_1, \dots, R_T | S_1, \dots, S_T, \theta, p, q)$ の積に比例する。(5)式の左辺は

$$\begin{aligned} f(S_1, \dots, S_T, \theta, p, q | R_1, \dots, R_T) \\ = f(S_1, \dots, S_T | R_1, \dots, R_T) f(p, q | S_1, \dots, S_T) f(\theta | R_1, \dots, R_T, S_1, \dots, S_T) \end{aligned}$$

と書き換えることができる。ただし、推移確率 p 、 q は $S_1, \dots, S_T$ を条件としたとき他のパラメータ θ ならびにデータ $R_1, \dots, R_T$ と独立になると仮定している。また、(5)式の右辺の事前分布は

$$f(S_1, \dots, S_T, \theta, p, q) = f(\theta) f(p, q) f(S_1, \dots, S_T | p, q)$$

となる。したがって、 θ の条件付き分布と p 、 q の条件付き分布はそれぞれ次のように表される。

² Klaassen (2002)が指摘しているように、Gray (1996)の提案したモデルでは(2)式の右辺にある過去のボラティリティ h_{t-1} を $E[h_{t-1} | R_1, \dots, R_{t-2}]$ としている。この場合、 $E[h_{t-1} | R_1, \dots, R_{t-2}]$ は定数となるので、 t 期のボラティリティ h_t は t 期の状態変数 S_t のみに依存することになる。したがって、過去の全ての状態変数について同時確率密度を足し合わせる必要がなくなり、最尤推定が簡単になる。しかし、本稿ではCai (1994)、Hamilton / Susmel (1994)の提案したMS-ARCHモデルの拡張を考えているので、1期前のボラティリティは h_{t-1} のままでボラティリティの変動を定式化している。

$$f(\theta | R_1, \dots, R_T, S_1, \dots, S_T) \propto f(\theta) f(R_1, \dots, R_T | S_1, \dots, S_T, \theta), \quad (6)$$

$$f(p, q | S_1, \dots, S_T) \propto f(p, q) f(S_1, \dots, S_T | p, q). \quad (7)$$

パラメータ θ 、推移確率 p 、 q の具体的なサンプリング方法は 3.3 節、3.4 節で詳しく述べる。

MCMC 法によってマルコフ・スイッチング・モデルを推定するには、 θ 、 p 、 q だけでなく状態変数 $S_1, \dots, S_T$ も合わせてサンプリングしなければならない。そこで、次節では $S_1, \dots, S_T$ のサンプリングについて解説する。

3.2 状態変数のサンプリング

状態変数 $S_1, \dots, S_T$ のサンプリングには、これまでに大きく分けて2つの手法が提案されている。1つは、Albert / Chib (1993)によって提案されたシングル・ムーブ・サンプラーであり、もう一方は、Carter / Kohn (1994)、Chib (1996)、Kim / Nelson (1998)によって提案されたマルチ・ムーブ・サンプラーである。シングル・ムーブ・サンプラーは S_t を一つ一つ条件付き密度からサンプリングするのに対し、マルチ・ムーブ・サンプラーは $S_1, \dots, S_t$ をまとめてサンプリングする。状態変数の自己相関が高いケースではサンプリングはなるべく一度にまとめて行うほうが収束が速くなるので、一般に後者を用いることが多い³。マルチ・ムーブ・サンプラーでは、まずはじめに t 期までの情報が与えられたもとで $S_t = j$ ($j = 0, 1$) となる確率 $\Pr[S_t = j | R_1, \dots, R_{t-1}, \varepsilon_0^2, h_0]$ を Hamilton (1989) のフィルタリングで求めることになる。ところが、前節で説明したように MS-GARCH モデルは最尤法で推定できないのでこのようなフィルタリングを行うことができず、マルチ・ムーブ・サンプラーは適用できない。したがって、本稿ではシングル・ムーブ・サンプラーに基づいた手法を用いることにする。

通常のシングル・ムーブ・サンプラーでは、収束の速度が極端に遅くなる可能性がある。そこで、ここでは Albert / Chib (1993)の方法を改良し、 S_t を一つ一つ条件付き密度からサンプリングするのではなく、任意の数の状態変数をまとめてサンプリングを行うことにする。 $S_1, \dots, S_T$ を一度にサンプリングするのは事実上不可能であるため、いくつかのブロックに分け、1つのブロックに含まれる状態変数の数を $(k+1)$ とする。そして、以下の条件付き同時分布から $S_t, \dots, S_{t+k}$ をサンプリン

³ So / Lam / Li (1998)は、MS-SVモデルの推定する際にマルチ・ムーブ・サンプラーを使用している。

グする。

$$f(S_t, \dots, S_{t+k} | S_1, \dots, S_{t-1}, S_{t+k+1}, \dots, S_T, R_1, \dots, R_T, \theta, p, q, \varepsilon_0^2, h_0).$$

ただし、条件の中に初期値 ε_0^2, h_0 も含めることにする。この条件付き同時分布を展開すると

$$f(S_t, \dots, S_{t+k} | S_1, \dots, S_{t-1}, S_{t+k+1}, \dots, S_T, R_1, \dots, R_T, \theta, p, q, \varepsilon_0^2, h_0) \\ \propto \left\{ \prod_{j=t}^{t+k+1} f(S_j | S_{j-1}) \right\} \left\{ \prod_{i=t}^T f(R_i | S_1, \dots, S_i, R_1, \dots, R_{i-1}, \theta, p, q, \varepsilon_0^2, h_0) \right\} \quad (8)$$

となる。ただし、 $f(S_j | S_{j-1})$ は推移確率であり、

$$f(R_i | S_1, \dots, S_i, R_1, \dots, R_{i-1}, \theta, p, q, \varepsilon_0^2, h_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_i}} \exp \left[-\frac{R_i^2}{2h_i} \right]$$

である。(8)式の導出は補論5.1節に示した。同時分布の条件を省略して書くと、例えば、 $k=1$ のとき $S_t = i$ ($i=0,1$)、 $S_{t+1} = j$ ($j=0,1$) となる同時確率 $\Pr[S_t = i, S_{t+1} = j | \cdot]$ は、(8)式より、

$$\Pr[S_t = i, S_{t+1} = j | \cdot] = \frac{f(S_t = i, S_{t+1} = j | \cdot)}{\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 f(S_t = i, S_{t+1} = j | \cdot)}$$

となる。上式より $\Pr[S_t = i, S_{t+1} = j | \cdot]$ が計算されたら、 $[0,1]$ の一様分布の乱数を用いて S_t 、 S_{t+1} のサンプリングを行う。

3. 3 GARCH モデルの推定

MCMC 法による GARCH モデルのベイズ推定法としては、これまでに Bauwens / Lubrano (1998)、Nakatsuma (2000)、Kim / Shephard / Chib (1998)、三井 / 渡部 (2003) がある。Asai / Watanabe (2003) はこれらの手法の比較分析を行い、Tierney (1994) の A-R/M-H (Acceptance-Rejection/Metropolis-Hastings) アルゴリズムを用いた三井 / 渡部 (2003) の推定法が、サンプリングの効率性などの点において最も優れていることを明らかにした。したがって、本稿ではこの手法を採用する。

ベイズ推定を行うには、まずはじめに(6)式の事前分布 $f(\theta)$ を設定しなければならない。事前分布は

$$f(\theta) = f(\alpha_0) f(\alpha_1) f(\beta, \gamma)$$

と分解することができる。右辺のそれぞれの分布はボラティリティの非負性および定常性を保つた

め、次のような事前分布を仮定する。

$$f(\alpha_0) \propto I[\alpha_0 > 0], \quad f(\alpha_1) \propto I[\alpha_1 \geq 0], \quad f(\beta, \gamma) \propto I[\beta \geq 0]I[\gamma \geq 0]I[\beta + \gamma < 1].$$

ここで、 $I[\cdot]$ は括弧内の区間では1、それ以外では0とする関数である。3.1節で述べたように条件付き事後分布は事前分布と尤度の積で表され、(6)式の条件に初期値 ε_0^2, h_0 を加えると

$$f(\theta | R_1, \dots, R_T, S_1, \dots, S_T, \varepsilon_0^2, h_0) \propto f(\theta) f(R_1, \dots, R_T | S_1, \dots, S_T, \theta, \varepsilon_0^2, h_0) \quad (9)$$

となる。右辺の尤度は

$$\begin{aligned} f(R_1, \dots, R_T | S_1, \dots, S_T, \theta, \varepsilon_0^2, h_0) \\ &= f(R_1 | S_1, \theta, \varepsilon_0^2, h_0) \prod_{t=2}^T f(R_t | R_1, \dots, R_{t-1}, S_1, \dots, S_{t-1}, \theta, \varepsilon_0^2, h_0) \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp \left[-\frac{R_t^2}{2h_t} \right] \end{aligned}$$

と表される。したがって、(9)式は基準化定数 (normalizing constant) を除いて解析的に計算できる。しかし、その分布は例えば正規分布といったよく知られた分布ではないので、このままではサンプリングを行うことはできない。サンプリングを行うには、まず(9)式の右辺の対数を取り、

$$l(\theta) \equiv \ln(f(\theta) f(R_1, \dots, R_T | S_1, \dots, S_T, \theta, \varepsilon_0^2, h_0))$$

とする。次に、 $l(\theta)$ を θ について最大化し、そのときのパラメータを $\hat{\theta}$ とする。関数 $l(\theta)$ を $\hat{\theta}$ のまわりで2次までテーラー展開すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} l(\theta) &\approx l(\hat{\theta}) + \frac{\partial l}{\partial \theta'} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} (\theta - \hat{\theta}) + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta})' \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} (\theta - \hat{\theta}) \\ &= \text{constant} + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta})' A (\theta - \hat{\theta}). \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、

$$A \equiv \frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}$$

であり、 $l(\theta)$ は $\hat{\theta}$ で最大化されるので $\frac{\partial l}{\partial \theta'} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$ である。(10)式より $\exp[l(\theta)]$ を基準化したもの

は平均 $\hat{\theta}$ 、分散共分散行列 $-A^{-1}$ の多変量正規分布の確率密度関数であることが分かる。したがって、この分布を提案密度関数 (proposal density) として、A-R/M-H アルゴリズムにより θ のサンプリングを行えばよい。サンプリングの手順は補論 5.2 節に示してある。

3.4 推移確率のサンプリング

3.1 節で述べたように、潜在変数 $S_1, \dots, S_T$ が与えられたとき推移確率 p 、 q は、データセット $R_1, \dots, R_T$ ならびに他のパラメータ $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta, \gamma)'$ と独立になると仮定している。したがって、 p と q の条件付事後分布はモデルの定式化にかかわらずに導くことができる。

推移確率 p 、 q の事前分布には、それぞれ独立なベータ分布⁴を仮定する。

$$p \sim \text{beta}(u_{11}, u_{10}), \quad q \sim \text{beta}(u_{00}, u_{01}).$$

このとき、 p と q の同時事前分布は

$$f(p, q) \propto p^{u_{11}-1} (1-p)^{u_{10}-1} q^{u_{00}-1} (1-q)^{u_{01}-1} \quad (11)$$

となる。また、尤度関数は状態変数 $S_1, \dots, S_T$ からカウントされる n_{ij} (状態 i から状態 j に推移する回数) を用いて

$$f(S_1, \dots, S_T | p, q) = p^{n_{11}} (1-p)^{n_{10}} q^{n_{00}} (1-q)^{n_{01}} \quad (12)$$

と与えられる。よって、(11)、(12)式より、(7)式の条件付き分布は

$$\begin{aligned} f(p, q | S_1, \dots, S_T) &\propto f(p, q) f(S_1, \dots, S_T | p, q) \\ &\propto p^{u_{11}+n_{11}-1} (1-p)^{u_{10}+n_{10}-1} q^{u_{00}+n_{00}-1} (1-q)^{u_{01}+n_{01}-1} \end{aligned}$$

となる。このことから、 p と q はそれぞれ以下のような独立なベータ分布に従うことが分かる。

$$p | S_1, \dots, S_T \sim \text{beta}(u_{11} + n_{11}, u_{10} + n_{10}), \quad (13)$$

$$q | S_1, \dots, S_T \sim \text{beta}(u_{00} + n_{00}, u_{01} + n_{01}). \quad (14)$$

これらの条件付き分布から、 p と q をサンプリングすることになる⁵。

⁴ 確率変数 $0 < X < 1$ がパラメータ $\alpha > 0$ 、 $\beta > 0$ とするベータ分布に従うとき、つまり、 $X \sim \text{beta}(\alpha, \beta)$ のとき、密度関数は以下のように与えられる。 $f_b(x) = C_b^{-1}(\alpha, \beta) x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$ 。ただし、 $C_b(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ であり、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。また、期待値と分散はそれぞれ、 $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ 、 $\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$ となる。

3. 5 MCMC 法によるベイズ推定の手順

推定の手順は以下の通りである。ただし、 N はサンプリングの回数であり、各パラメータの右肩の (i) は、 i 番目にサンプリングされたことを示す。

- (1) $S_1, \dots, S_T$ 、 p 、 q 、 $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta, \gamma)'$ に適当な初期値を与えて、それを $S_1^{(0)}, \dots, S_T^{(0)}$ 、 $p^{(0)}$ 、 $q^{(0)}$ 、 $\theta^{(0)}$ とする。
- (2) $p^{(i-1)}$ 、 $q^{(i-1)}$ 、 $\theta^{(i-1)}$ の条件のもとで、3. 2 節で説明した手法を用いて $S_1^{(i)}, \dots, S_T^{(i)}$ をサンプリングする。
- (3) $p^{(i-1)}$ 、 $q^{(i-1)}$ 、 $S_1^{(i)}, \dots, S_T^{(i)}$ の条件のもとで、3. 3 節の A-R/M-H アルゴリズムにより $\theta^{(i)}$ をサンプリングする。
- (4) $S_1^{(i)}, \dots, S_T^{(i)}$ 、 $\theta^{(i)}$ の条件のもとで、(13)、(14) 式の条件付き分布から $p^{(i)}$ と $q^{(i)}$ をサンプリングする。 $i < N$ の場合には $i = i + 1$ として (2) に戻る。 $i = N$ の場合には終了。

4. 結論と今後の課題

本稿では、MCMC 法によって MS-GARCH モデルのパラメータ推定が可能になることを示した。これまでの先行研究では最尤法で推定するために MS-GARCH モデルのボラティリティ変動には強い仮定がおかれていたが、本稿で提案した手法を用いればそのような必要は無い。このことから、従来のモデルに比べてボラティリティの変動についての説明力が高まることが期待される。

今後の課題としては、まずはじめに MCMC 法による推定値の効率性がどの程度かをシュミレーション調べる必要がある。また、現実の金融資産データに対して MS-GARCH モデルはスイッチングの無い GARCH モデルよりも当てはまりが良いのか、また、ボラティリティの予測力は向上するのか否かなどの実証研究を行う予定である。

5. 補論

5. 1 状態変数の条件付き同時分布

以下では、分布の条件に含まれる $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta, \gamma)'$ 、 p 、 q 、 ε_0^2 、 h_0 の記述を省略する。条件のデータ $R_1, \dots, R_T$ を、 $R_1, \dots, R_{t+k}$ 、 $R_{t+k+1}, \dots, R_T$ に分割する。

$$f(S_t, \dots, S_{t+k} \mid S_1, \dots, S_{t-1}, S_{t+k+1}, \dots, S_T, R_1, \dots, R_T)$$

⁵ ベータ分布からのサンプリングはガンマ乱数を用いて簡単に行なうことが出来る。まず、2 つのガンマ分布に従う乱数 $Y_1 \sim G(\alpha, 1)$ 、 $Y_2 \sim G(\beta, 1)$ を発生させる。次に $X = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$ とすれば、これは $\text{beta}(\alpha, \beta)$ に従うことが知られている。

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(S_t, \dots, S_{t+k}, R_{t+k+1}, \dots, R_T \mid S_1, \dots, S_{t-1}, S_{t+k+1}, \dots, S_T, R_1, \dots, R_{t+k})}{f(R_{t+k+1}, \dots, R_T \mid S_1, \dots, S_{t-1}, S_{t+k+1}, \dots, S_T, R_1, \dots, R_{t+k})} \\
&\propto f(S_t, \dots, S_{t+k}, R_{t+k+1}, \dots, R_T \mid S_1, \dots, S_{t-1}, S_{t+k+1}, \dots, S_T, R_1, \dots, R_{t+k}) \\
&= f(S_t, \dots, S_{t+k} \mid S_1, \dots, S_{t-1}, S_{t+k+1}, \dots, S_T, R_1, \dots, R_{t+k}) \\
&\quad \times f(R_{t+k+1}, \dots, R_T \mid S_1, \dots, S_T, R_1, \dots, R_{t+k}). \tag{15}
\end{aligned}$$

上式の右辺の $f(S_t, \dots, S_{t+k} \mid \cdot)$ について、条件のデータ $R_1, \dots, R_{t+k}$ を $R_1, \dots, R_{t-1}$ 、 $R_t, \dots, R_{t+k}$ に分けて展開すると、

$$\begin{aligned}
&f(S_t, \dots, S_{t+k} \mid S_1, \dots, S_{t-1}, S_{t+k+1}, \dots, S_T, R_1, \dots, R_{t-1}, R_t, \dots, R_{t+k}) \\
&= \frac{f(S_t, \dots, S_{t+k}, R_t, \dots, R_{t+k}, S_{t+k+1}, \dots, S_T \mid S_1, \dots, S_{t-1}, R_1, \dots, R_{t-1})}{f(R_t, \dots, R_{t+k}, S_{t+k+1}, \dots, S_T \mid S_1, \dots, S_{t-1}, R_1, \dots, R_{t-1})} \\
&\propto f(S_t, \dots, S_{t+k}, R_t, \dots, R_{t+k}, S_{t+k+1}, \dots, S_T \mid S_1, \dots, S_{t-1}, R_1, \dots, R_{t-1}) \\
&= f(S_t, \dots, S_{t+k} \mid S_{t-1}) f(R_t, \dots, R_{t+k} \mid S_1, \dots, S_{t+k}, R_1, \dots, R_{t-1}) \\
&\quad \times f(S_{t+k+1}, \dots, S_T \mid S_{t+k}, R_1, \dots, R_{t+k}) \\
&\propto f(S_t, \dots, S_{t+k} \mid S_{t-1}) f(R_t, \dots, R_{t+k} \mid S_1, \dots, S_{t+k}, R_1, \dots, R_{t-1}) f(S_{t+k+1} \mid S_{t+k}) \tag{16}
\end{aligned}$$

となる。右辺の $f(S_t, \dots, S_{t+k} \mid \cdot)$ は

$$f(S_t, \dots, S_{t+k} \mid S_{t-1}) = f(S_t \mid S_{t-1}) f(S_{t+1} \mid S_t) \cdots f(S_{t+k} \mid S_{t+k-1}),$$

$f(R_t, \dots, R_{t+k} \mid \cdot)$ は

$$\begin{aligned}
&f(R_t, \dots, R_{t+k} \mid S_1, \dots, S_{t+k}, R_1, \dots, R_{t-1}) \\
&= f(R_t \mid S_1, \dots, S_t, R_1, \dots, R_{t-1}) f(R_{t+1} \mid S_1, \dots, S_{t+1}, R_1, \dots, R_t) \\
&\quad \times \cdots \times f(R_{t+k} \mid S_1, \dots, S_{t+k}, R_1, \dots, R_{t+k-1}) \\
&= \prod_{i=t}^{t+k} f(R_i \mid S_1, \dots, S_i, R_1, \dots, R_{i-1})
\end{aligned}$$

と書き換えることができる。(16)式は、

$$\begin{aligned}
&f(S_t, \dots, S_{t+k} \mid S_1, \dots, S_{t-1}, S_{t+k+1}, \dots, S_T, R_1, \dots, R_{t+k}) \\
&\propto \left\{ \prod_{j=t}^{t+k+1} f(S_j \mid S_{j-1}) \right\} \left\{ \prod_{i=t}^{t+k} f(R_i \mid S_1, \dots, S_i, R_1, \dots, R_{i-1}) \right\} \tag{17}
\end{aligned}$$

となる。また、(15)式の $f(R_{t+k+1}, \dots, R_T \mid \cdot)$ を展開すると

$$f(R_{t+k+1}, \dots, R_T \mid S_1, \dots, S_T, R_1, \dots, R_{t+k})$$

$$\begin{aligned}
& \propto f(R_{t+k+1} | S_1, \dots, S_{t+k+1}, R_1, \dots, R_{t+k}) f(R_{t+k+2} | S_1, \dots, S_{t+k+2}, R_1, \dots, R_{t+k+1}) \\
& \quad \times \dots \times f(R_T | S_1, \dots, S_T, R_1, \dots, R_{T-1}) \\
& = \prod_{i=t+k+1}^T f(R_i | S_1, \dots, S_i, R_1, \dots, R_{i-1}).
\end{aligned} \tag{18}$$

よって、(17)、(18)式を(15)式に代入すると

$$\begin{aligned}
& f(S_t, \dots, S_{t+k} | S_1, \dots, S_{t-1}, S_{t+k+1}, \dots, S_T, R_1, \dots, R_T) \\
& \propto \left\{ \prod_{j=t}^{t+k+1} f(S_j | S_{j-1}) \right\} \left\{ \prod_{i=t}^T f(R_i | S_1, \dots, S_i, R_1, \dots, R_{i-1}) \right\}
\end{aligned}$$

となり、(8)式が得られる。

5. 2 A-R/M-H アルゴリズム

提案密度関数を $g(\theta)$ とする。(9)式の $f(\theta | \cdot)$ からサンプリングを行う手順は以下の通りである。 θ の右肩の (i) は、 i 番目にサンプリングされたことを示す。

- (1) 提案密度関数 $g(\theta)$ からサンプリングを行い、得られた θ を使って受容確率 p を次のように計算する。

$$p = \min \left[\frac{f(\theta | \cdot)}{cg(\theta)} \right].$$

ここで、 c は定数である。

- (2) (1) で得られた θ を確率 p で受容し、確率 $1-p$ で棄却する。受容された場合には

$$\theta^{(candidate)} = \theta \text{ とおき、(3)に進む。棄却された場合は(1)に戻る。}$$

- (3) (2) でサンプリングされた $\theta^{(candidate)}$ と、1回前にサンプリングされた $\theta^{(i-1)}$ を用いて、受容確率 q を以下のように計算する。

$$(a) \quad f(\theta^{(i-1)} | \cdot) < cg(\theta^{(i-1)}) \text{ ならば、} q = 1.$$

$$(b) \quad f(\theta^{(i-1)} | \cdot) \geq cg(\theta^{(i-1)}) \text{ かつ } f(\theta^{(candidate)} | \cdot) < cg(\theta^{(candidate)}) \text{ ならば、}$$

$$q = \frac{cg(\theta^{(i-1)})}{f(\theta^{(i-1)} | \cdot)}.$$

$$(c) \quad f(\theta^{(i-1)} | \cdot) \geq cg(\theta^{(i-1)}) \text{ かつ } f(\theta^{(candidate)} | \cdot) \geq cg(\theta^{(candidate)}) \text{ ならば、}$$

$$q = \min \left[\frac{f(\theta^{(candidate)} | \cdot)g(\theta^{(i-1)})}{f(\theta^{(i-1)} | \cdot)g(\theta^{(candidate)})}, 1 \right].$$

- (4) $\theta^{(candidate)}$ を確率 q で受容し、確率 $1-q$ で棄却する。受容された場合には、 $\theta^{(i)} = \theta^{(candidate)}$ とする。棄却された場合には、 $\theta^{(i)} = \theta^{(i-1)}$ とする。

参考文献

- [1] Albert, J. H. and S. Chib (1993), "Bayes Inference via Gibbs Sampling of Autoregressive Time Series Subject to Markov Mean and Variance Shifts," *Journal of Business & Economic Statistics*, 11, 1-15.
- [2] Asai, M and T. Watanabe (2003), "Comparison of MCMC Methods for Estimating GARCH Models," unpublished manuscript, Faculty of Economics, Tokyo Metropolitan University.
- [3] Bauwens, L. and M. Lubrano (1998), "Bayesian Inference on GARCH Models using the Gibbs Sampler," *Econometrics Journal*, 1, c23-c46.
- [4] Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- [5] Cai, J. (1994), "A Markov Model of Switching-Regime ARCH," *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, 309-316.
- [6] Carter, C. K. and R. Kohn (1994), "On Gibbs Sampling for State Space Models," *Biometrika*, 81, 541-553.
- [7] Chib, S. (1996), "Calculating Posterior Distributions and Modal Estimates in Markov Mixture Models," *Journal of Econometrics*, 75, 79-97.
- [8] Diebold, F. X. (1986), "Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment," *Econometric Reviews*, 5, 51-56.
- [9] Engle, R. F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50, 987-1008.
- [10] Gray, S. F. (1996), "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process," *Journal of Financial Economics*, 42, 27-62.
- [11] Hamilton, J. D. (1989), "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica*, 57, 357-384.
- [12] Hamilton, J. D. and R. Susmel (1994), Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime, *Journal of Econometrics*, 64, 307-333.
- [13] Kim, C.-J. and C. R. Nelson (1998), "Business Cycle Turning Points, A New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor Model with Regime Switching," *The Review of Economics and Statistics*, 80, 188-201.
- [14] Kim, S., N. Shephard and S. Chib (1998), "Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models," *Review of Economic Studies*, 65, 361-393.
- [15] Klaassen, F. (2002), "Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH," *Empirical*

- Economics*, 27, 363-394.
- [16] Lamoureux, C. G. and W. D. Lastrapes (1990), "Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model," *Journal of Business & Economic Statistics*, 8, 225-234.
- [17] Nakatsuma, T. (2000), "Bayesian Analysis of ARMA-GARCH Models: A Markov Chain Sampling Approach," *Journal of Econometrics*, 95, 57-69.
- [18] So, M. K. P., K. Lam and W. K. Li (1998), "A Stochastic Volatility Model with Markov Switching," *Journal of Business & Economic Statistics*, 16, 244-253.
- [19] Tierney, L. (1994), "Markov Chains for Exploring Posterior Distributions (with discussion)," *Annals of Statistics*, 22, 1701-1762.
- [20] 三井秀俊・渡部敏明 (2003), 「ベイズ推定法による GARCH オプション価格付けモデルの分析」、『日本統計学会誌』、近刊.

(2004年1月8日受理)